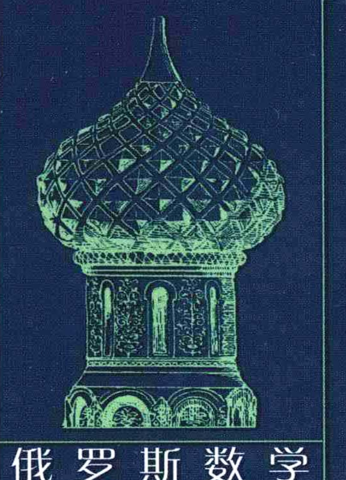
“十一五”国家重点图书



俄罗斯数学教材选译

非线性动力学定性理论方法

（第二卷）

□ Leonid P. Shilnikov
Andrey L. Shilnikov
Dmitry V. Turaev
Leon O. Chua 著

□ 金成桴 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

总 策 划：张小萍
责任编辑：蒋 青
封面设计：王凌波

分支与混沌控制了非线性动力学研究20多年，关于这个课题已经出版了许多介绍性的和高级水平的著作。但是，还亟需一本教科书作为这两者之间的桥梁，它同时满足教学上的诉求和数学的严谨性。本书正是为完成上面这个难以执行的任务编写的。

沿着Poincaré以及著名的Andronov非线性振动学派的脚步，本书着眼于高维非线性动力学的定性研究。书中阐述的许多定性方法和工具只是在最近才被发展起来的，且还没有以教科书的形式出现过。

本书保持自封的特色。所有课题都介绍了发展背景且保持了数学的严谨，并配以丰富的插图和高水平的阐述。本书适合对非线性动力学——一个极为迷人的领域——严格数学基础感兴趣的初学者、高年级本科生以及研究生使用参考。

“本书是分支理论中很受欢迎的著作。特别地，该书的第12章和第13章包含了大量大范围分支（尤其是关于余维2分支）的材料，这些内容在这之前还没有在教科书中出现过。这本书写得很好，并有漂亮的插图，同时数学上非常严谨(某些地方非常有技巧性)。它对任何一个人都有意义，包括从大学本科生到研究生水平的希望学习(大范围)分支数学理论的非专家读者。”

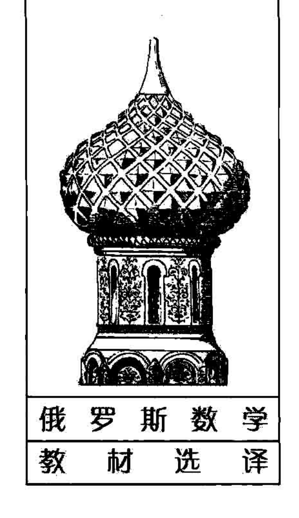
——*Mathematical Reviews*

“本书是一系列受欢迎的分支理论经典著作之一，是一本尝试用这个理论的更一般的抽象理论写成的高级著作。它写得非常好，并包含了大量的脚注和插图。因此，这部书即使是对在这个领域中刚开始工作的研究者也是非常有益的。纵使本书是高水平的，也适合用作教科书。因此，它对分支理论有诚挚兴趣的每一位读者都是‘必须’要读的。”

——*Zentralblatt MATH*


ISBN 978-7-04-029464-4
9 787040 294644 >
定价 69.00 元


学科类别：数学/物理/工程
academic.hep.com.cn



俄罗斯数学教材选译

“十一五”国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

非线性动力学定性理论方法

Feixianxing Donglixue Dingxing Lilun Fangfa

（第二卷）





图字: 01–2009–7934 号

METHODS OF QUALITATIVE THEORY IN NONLINEAR DYNAMICS, PART II

图书在版编目（CIP）数据

非线性动力学定性理论方法. 第 2 卷 /（俄罗斯）施尔尼科夫（Shilnikov, L.P.）等著; 金成桴译. — 北京: 高等教育出版社, 2010.9

ISBN 978-7-04-029464-4

Ⅰ.①非… Ⅱ.①施…②金… Ⅲ.①非线性力学: 动力学 Ⅳ.①O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 131098 号

策划编辑 李 鹏　**责任编辑** 蒋 青　**封面设计** 张 楠
责任绘图 尹 莉　**版式设计** 王 莹　**责任校对** 杨雪莲
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 1092　1/16	版　　次	2010 年 9 月第 1 版
印　　张	27.5	印　　次	2010 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	570 000	定　　价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 29464–00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为

主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

中文版序

我很高兴为我们的书《非线性动力学定性理论方法》(Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics) 的第一卷和第二卷的中文版写这个序. 该书原来的思想和内容是俄文的, 但是首先是由世界科技出版公司 (World Scientific) 于 1998 年和 2001 年出版英文版, 再由计算机研究院出版社 (Институт компьютерных исследований) 和有序与混沌动力学出版社 (Regular and Chaotic Dynamics) 分别于 2004 年和 2009 年从英文翻译回到俄文版, 感谢高等教育出版社现在出版中文版. 这样, 对本书的读者将有更多的科学语言可使用.

本书系统地讨论了动力系统简单极限集的所有主要分支, 这些极限集包括稳定平衡态, 周期轨道和不变环面. 但是重点是对高维系统中的大范围分支 —— 同宿分支和异宿分支的讨论. 通常这种无形解是大部分非线性系统中复杂动力学的主要组织中心. 我们对同宿研究所用的关键方法都得到了严格的论述且具有完全的一般性. 我高兴地强调大范围分支的工具箱中的大部分工具在这里即在 Nizhny Novgorod (以前的 Gorky) —— 大家引以为豪的世界著名的 Andronov 非线性振动学派的基地得到了发展.

这本特别偏爱数学技巧的严格的教科书为大学生和研究生水平的数学课程打下了坚实的基础. 本书也可作为工程或者任何其它非线性动力学交叉学科的参考书以及一本十分透彻的自学教材. 书中包含有大量的迄今为止还没有在教科书中出版的大范围分支材料. 其中包括许多第一次详细阐述的新奇分支, 例如蓝天突变以及鞍点和鞍 - 焦点之间的各种同宿连接和异宿连接. 这些新颖分支现在已经在非线性动力学的各种应用, 例如在神经科学、医学、化学和流体力学中被广泛地发现. 本书已经被横跨欧美和俄罗斯的大学中普遍地作为动力系统的教材, 当然我也希望这个趋势将延伸到中国.

现今中国正在崛起. 当我于 2002 年接受邀请在北京的世界数学家大会上递送题为《分支理论与奇怪吸引子》的报告而访问这个国家的时候亲眼目睹了她的指数式飞速增长. 我想这个国家如果没有科学和研究的发展, 那么她的经济的显著发展也是不可能的. 一个明显的迹象是在纯粹数学与应用数学、物理和生命科学的中国研究的各种不同顶级杂志大量增长. 我希望用中文母语出版的我们的这两卷书将进一步鼓舞和培养中国新一代的非线性动力学家.

最后, 我仅代表合著者感谢金成桴教授为我们全书所作的出色翻译工作.

Leonid Shilnikov
Nizhny Novgorod
2010 年 6 月

译者序

由国际著名动力系统专家 L.Shilnikov 等四人合写的这部《**非线性动力学定性理论方法**》一书共分两卷 (中本版按英文版 Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics, World Scientific 出版社出版的第一卷 (1998), 第二卷 (2001) 翻译. 该书现已出版俄文译本, 第一卷 (2004), 第二卷 (2008). 本书是前苏联著名 Andronov 非线性振动学校继 Andronov, A. A., Vitt, A. A. 和 Khaikin, S. E. 的《**振动理论**》, Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. E. 和 Maier, A. G. 的《**平面动力系统分支理论**》以及 Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. E. 和 Maier, A. G. 的《**平面动力系统理论**》等著名著作 (原书都为俄文版, 现在都有英文版) 后又一部关于非线性动力学理论方法的优秀著作. 该书除介绍平面动力系统分支理论的重要结果以外, 主要以严谨的数学理论为基础, 介绍高维动力系统 (连续和离散) 的定性理论和分支理论. 其介绍的理论和方法介于基础教科书和抽象动力系统理论之间.

由常微分方程和映射 (包括微分同胚) 定义的动力系统的高维分支理论在上世纪 60 年代开始得到了很大发展, 特别是那时出现了这种系统的混沌解. 为了研究这种以前没有发现过的新现象的发展规律, 必须对高维分支问题作系统而细致的分析. 但是高维定性理论和分支问题比平面情形复杂得多. 平面系统由于有著名的 Poincaré-Bendixson 理论, 它们的极限集相对比较简单, 高维情形就不一样, 其不变集除了平衡态、周期轨线、鞍点分界线连接以外, 还可以有其它更加复杂的不变集, 如奇怪吸引子等.

本书作者用新的方法详细阐述了由常微分方程和映射 (包括微分同胚) 定义的系统的高维定性理论和分支问题. 他们从对平衡态和周期轨线邻域内线性化系统的特征值作更细致分划开始, 详细分析了平衡态和周期轨线 (特别是与混沌性态有关的高维空间中的鞍点, 鞍 - 结点, 鞍 - 焦点等各类, 各类同宿回路和异宿环) 邻域内

的轨线性态, 用他们的边值问题新方法分析局部和大范围各类不变流形 (包括不变叶层) 的存在性、光滑性. 最后详细并严格地讨论了各类局部分支和大范围分支 (包括余维 2 分支), 其中包含有通向混沌道路的分支.

本书对有关问题的发展历史, 与实际问题的联系介绍得很清楚, 对问题的来龙去脉也介绍得很详细. 书中用到较高深的数学概念一般都有说明, 定理证明大多比较细致. 但必须指出, 书中有些公式和分支的推导是借助于有关计算机软件得到的, 用通常的分析方法一般很难办到. 读者开始接触时不要被搞得望而生畏. 欲知其详, 建议读者可参考译者不久前翻译并由科学出版社出版的库兹涅佐夫著的《**应用分支理论基础**》(2010 版) 一书, 那里对分支理论的数值分析有较详细的介绍, 并有一些具体计算例子, 例如, 如何用 MAPLE 命令计算 Hopf-Hopf 分支的 Poincaré 规范形以及用其它专适用于动力系统分支理论的软件计算分支曲线等.

还值得一提的是本书两卷的序言写得特别详细, 这在一般著作中也是少有的, 特别是第二卷, 作者花了相当大的篇幅介绍非线性动力学有关课题的发展历史以及各章内容, 读者可以经常回过头来反复查看. 另一个值得注意的是全书后面的例子、问题与练习, 这部分内容特别对于刚开始做研究工作的读者很有参考价值. 书中列举的问题不少来自有关文献. 例如对以本书作者之一 L.O.Chua 名字命名的 Chua 电路的详细分析, 它是继 Lorenz 方程出现混沌性态后又一个来自实际问题出现混沌现象的系统. 书中对每一个问题的研究分析都提出了详细的方案, 对有些作为例子的问题还作了细致的讨论. 这也是对各章正文很好的补充.

本书有些内容是本书第一作者 L.P.Shilnikov 本人在 Nizhny Novgorod 大学应用数学与控制论研究所微分方程系 30 年来教授 "**平面定性理论**" 课程 (一学年) 的教材. 对于要学习高维定性理论和混沌理论的高年级学生和研究生来说本书无疑是一本难得的好教材. 当然, 对于那些从事非线性动力学研究工作的工程师、学者和专家, 本书也是一本有价值的参考书.

对于不同水平和不同要求的读者可以选读本书的不同内容, 对初学者最好同时补充一些本书没有介绍而在非线性动力学中很重要的相关内容, 例如平面定性理论的基本知识, 不变环面上轨线性态的 Poincaré-Denjoy 理论以及著名的 Smale 马蹄等. 动力系统中一些著名定理, 如 λ - 引理、封闭性引理等都作了介绍并给出应用.

本书的第一卷对全书是引论性的, 主要介绍常微分方程和动力系统的基本概念, 结构稳定平衡态 (特别对鞍点) 和周期轨线附近的性态、不变环面以及局部和大范围中心流形定理. 第二卷是本书的重点, 介绍结构稳定系统、Morse-Smale 系统、平衡态的第一、第二、第三临界情形、弱共振和强共振、平衡态和周期轨线 (包括鞍 - 结点, 鞍 - 焦点周期轨线) 的局部分支和大范围分支以及通往混沌动力学的一些分支. 在最后的例子、问题和练习中特别介绍了有关 Lorenz 方程, Henon 映射 Khorozov-Takens 方程, Hindmarsh-Rose, Shimizu-Morioka 等模型和 Chua 电路等的详细分析.

本书翻译过程中改正了原书的一些错误. 由于原书是由不同人执笔写成的, 每

人写作风格和所用数学名词都有所不同, 译文在忠实原文的原则下尽量做到统一和通顺易懂.

最后, 感谢 L. P. Shilnikov 教授为中文版写的热情洋溢的序, 也感谢 Andrey 和我对本书一些问题的多次讨论和对为中文版序所提供的帮助. 感谢高等教育出版社编辑李鹏的热心支持与帮助和责任编辑蒋青的认真负责仔细的辛勤劳动. 另外, 也要感谢我妻子何燕俐对我这项工作自始至终的理解支持和关心.

金成桴 2009 年 12 月

第二卷引言

下面几章我们叙述具有简单动力学的动力系统的分支理论. 过分强调分支理论在非线性动力学中的作用有一定的困难, 理由非常简单: 分支理论的方法是由研究动力学模型的成套工具箱组成. 除此以外, 分支理论还为不同科学领域的学者们提供一种通用语言, 以便他们之间沟通和交流思想以及彼此理解各中间学科之间的讨论.

分支理论研究当系统参数变化时相空间的改变. 大体上, 分支理论的真正概念最初是由 Henry Poincaré 在他研究一个自由度的 Hamilton 系统时提出的. 但是, 我们必须指出, 当这个理论发展到现阶段时, 他那个直观明显的定义就总觉得不够了. 事实上, 我们需要适当的数学基础去定义相空间的结构和结构的改变等概念.

第一个尝试创造这种数学形式化的是 Andronov 和 Pontryagin 在 1937 年的工作, 就是说, 他们引入粗系统的概念. 一个系统为粗的, 意味着任何一个与它充分接近的系统与这给定的系统是拓扑等价的. 此外, 共轭的同胚必须接近恒同. 换句话说, 两个系统必须有匹配的相图, 对应的轨线只能相差很小.

在同一篇论文中, Andronov 和 Pontryagin 还叙述了平面粗系统的充分必要条件. 因此, 由于得到了必要的数学基础, 许多非线性动力学问题可以用二维动力系统模拟.

Andronov 和 Pontryagin 理论的主要论述将在本书的第七章第一节中叙述, 作为本书第二卷的开场白. 在那里我们也给出结构稳定性的定义 (这是属于 Peixoto 的). 结构稳定性和粗性这两个概念的主要差别是, 对前者定义结构稳定性的共轭的同胚并不假设要接近恒同. 从纯粹数学观点看, 这是相当方便的, 因为由定义立即得知结构稳定系统组成一个开集. 即使从许多仅对结构稳定性所作的已知证明来看, 粗性本身可以当作副产品从同一证明中得到. 因此, 这两个概念的差别看来不是本质的.

注意, 尽管如此, 结构稳定性概念在俄罗斯以外却广为人知, 尤其在西方国家, 因此本书将频繁地使用这一术语. 不管怎么样, 我们相信粗性概念原则上更合理, 因为它给出由于参数的微小变化而引起现实过程的小变化的自然反映.

二维粗系统的高维推广是 7.4 节讨论的 Morse - Smale 系统. 这种系统的一系列极限集仅包含平衡态和周期轨道. 此外, 这种系统的极限集也只可能有有限个. Morse-Smale 系统不允许有同宿轨线. 平衡态的同宿回路在这里可不存在, 因为它们是非粗轨线 —— 平衡态的稳定与不稳定流形的交沿着同宿回路不能横截相交. 粗的 Poincaré 同宿轨道 (周期轨道的同宿轨线) 也不可能存在, 因为由它们可推出存在无穷多个周期轨道. Morse-Smale 系统具有与二维系统相似的性质, 因而推测 (上世纪六十年代以及之前) 它们是所有光滑动力系统的空间中的一个稠集. 但是, 动力学混沌的发现打破了这种理想化的图像.

一个基本问题是 "如何区别简单动力学系统和混沌动力学系统? " 只有当我们能将某类轨线与可观察的物理过程对应时才能回答这个问题. 我们从对拟周期轨线 (本书第一卷第 4 章) 研究分类开始. 虽然这些轨线是非粗的, 但被证明可以作为诸如拍频与调制现象适当的模拟.

拟周期轨线是 Poisson 稳定轨线的特殊情形. 后者曾在动力系统理论中起过一次带头作用, 因为它们组成一大类在 Birkhoff 意义下的中心运动 (见 7.2 节). Birkhoff 曾将 Poisson 稳定轨线分成许多子类. 我们将在 7.3 节叙述这个分类的示意图. 选择了这个示意图作为基础, 早在上世纪 30 年代, Andronov 即着手搜集所有已知的动力学运动类型, 并与那些从物理实验可观察到的动力学运动相联系. 由于他的讨论基于个别轨线在 Lyapunov 意义下的稳定性概念, Andronov 不久就得出结论说, 所有可能为 Lyapunov 稳定的轨线将取尽平衡态, 周期轨道和概周期轨线 (在有限维情形下它们是拟周期和极限拟周期运动).

因此, 我们自然地假设每一个有意义的动力学机制具有离散频率谱. 关于这一点, 我们好奇地注意到 Landau 和 Hopf 曾建议把具有充分多个独立频率的拟周期运动当作流体力学湍流的数学映象 (假设这些频率的个数将随某个如 Reynolds 数等结构参数的增加而无限增加).

所有别的 Poisson 稳定轨线在 Lyapunov 意义下是不稳定的. 这些轨线如何才能成为动力学中的应用? 将近 30 年后才得到答案. 当 Lorenz 在 1963[87] 解释非线性动力学过程的复杂和混沌性态时, 由个别不稳定轨线组成的稳定极限集的意义才被第一次认识到.

在粗情形, 这一类极限集 (称为拟极小集, 定义为非闭 Poisson 稳定轨线的闭包) 的结构分析, 可用 Pugh 的封闭性引理来进行. 从这个分析 (7.3 节) 得出主要结论是周期轨道在粗拟极小集中是稠的. 特别地, 我们将看到周期轨道的个数为无限. 具有这种极限集的系统称为**复杂系统**.

具有复杂性态系统的一个更鲜明的特征是出现 Poincaré 同宿轨线, 即当 $t \to$

$\pm\infty$ 时双向渐近于鞍点周期轨道的轨线. 位于鞍点周期轨道的稳定与不稳定不变流形横截交集上的同宿轨道的存在性，导致相空间内无限多个其它鞍点周期轨道的存在性 (7.5 节).

但是对于 (相空间) 维数大于 2 的粗系统 (包含简单与复杂两类动力学) 在动力系统空间中不稠. 事实上，由此得知关键必须在其轨线中给出具有不稳定特性的**非粗**吸引极限集.

这种集合的一个例子是出现在各种模型中的 Lorenz 吸引子. 非驯螺线吸引子 [153] 是另一个迷人的例子.[1]

两个奇怪吸引子之间的相似性是它们没有一个包含稳定周期轨道. 而两者之间的差别，在 Lorenz 吸引子中所有 Poincaré 同宿轨道都是粗的，而非驯吸引子的特征性质是由于同宿切触, 粗与非粗 Poincaré 同宿轨道共存. 两个吸引子的相似之处还在于它们都 "集中" 于一个粗平衡态，对 Lorenz 吸引子它是鞍点，对非驯吸引子则是鞍 - 焦点. 在具有这些奇怪吸引子的其它形式的模型中，我们可以在参数空间中选出存在性区域，其中对应于平衡态同宿回路的参数值是个稠集.

要想完全理解如此复杂的现象，不通过基本分支 (局部的和大范围的) 的知识是不可能的. 第 8 章评述这个理论的一般概貌. 我们按照 Andronov 与 Leontovich 的先驱性工作，从分析最简单的二维非粗系统开始. 他们实现了对平面极限环所有主要分支的系统分类, 一共分成四个子类；即极限环产生于:

(1) 简单弱焦点,
(2) 简单半稳定极限环,
(3) 简单鞍 - 结点的分界线回路, 以及
(3) 鞍点的分界线回路，鞍点处向量场的散度不为零.

Andronov-Leontovich 的分类利用了一个附加的概念即所谓非粗度. 这个理论进一步的发展还导致了另一个方向，即对原有分支选取余维 1 的分支集以及在一般情形选取任意 (当然是有限的) 余维分支集. 此外，尽管在给定有限余维分支曲面的连通分支上的所有二维流都是拓扑等价的 (Leontovich-Mayer 定理), 但此结果对高维情形不再成立.

这个结果属于 Palis，他找到具异宿轨道的二维微分同胚，在它们的点上，一个鞍点不动点的不稳定流形与另一个鞍点不动点的稳定流形有二次切触，只要某些连续不变量的值相同，则这些微分同胚局部拓扑共轭. 这些连续不变量称为模数. 另外一些出现拓扑共轭模数的非粗例子在 8.3 节介绍.

令人惊奇的是，即使余维 1 的非粗系统也可以有无穷多个模数. 当然，由于非线性动力学模型是由具**有限**参数集的动力系统明显定义，这就产生了一个新障碍，使得经典分支理论用不上. 虽然余维 1 同宿回路情形没有带来任何原则性问题，然

[1] 这个吸引子的拟螺线形状来自鞍 - 焦点 (2,1) 的同宿回路, 并以它所构成的骨架出现. 它的非驯性是由于同时存在不同拓扑型的鞍点周期轨道以及粗和非粗 Poincaré 同宿轨道.

而余维 2 或更高余维情形就有更少的平凡性，例如，在包含鞍 - 焦点的同宿或异宿环情形，其中分支图的构造直接由相应模数的特殊值确定.

因此，如果没有模数就不能进行完全的分支分析，那研究动力学模型的 Andronov 方法 (8.4 节) 就必须予以纠正. 但我们注意到，如果某些更精细的现象可以不考虑，或者问题被限制在对诸如平衡态，周期以及拟周期运动等非游荡轨道的分析时，具有简单动力学的系统的主要分支研究，在有限参数族及某些合理要求的框架内仍有其现实意义 (8.4 节).

我们顺便指出，对于具复杂动力学的系统情况变得完全不同. 在大多数情形 (至少在出现同宿切触时)，由于基本参数控制了分支, 引入模数就是必然的了(见[63]).

虽然二维系统极限环的典型分支理论已被 Andronov 与 Leontovich 早在上世纪 30 年代就创造出来了[2]，但对高维系统的周期轨道与平衡态分支理论的系统发展，仅在它们的结果得到科学界应用以后才开始 (Hopf 在 1942 年的工作也许仅仅是个例外).

二维分支的直接推广不久以后就取得进展. 有些工作均为自然的修正，例如, 周期轨道的二维不变环面分支. 另外，高维空间中同宿回路分支并不总是仅产生周期轨道也成为明显的事实. 一个长时间未获解决的问题是，能否存在周期轨道的其它余维 1 分支? 至今只有一个与 [152] 中找到的所谓 "蓝天突变" 有关的新分支在最近才被发现. 所有这些高维分支将在本书第二卷详细论述.

在第 9 章与第 10 章中我们考虑结构不稳定平衡态与周期轨道. 这些极限集的分支将在第 11 章中研究. 这三章属于**局部**分支理论. 局部分支的结果在文献中都有很好的介绍，且这个理论继续在迅猛发展. 因此在这里我们将限于详细研究这类分支的基本情形. 首先，对于特征指数不在虚轴上的分支平衡态, 假设其特征指数严格位于虚轴的左边. 在虚轴上则假定存在单个零指数[3]，或一对复共轭纯虚指数. 对周期运动也作类似假设：乘子若不在单位圆上, 则它们必须在单位圆内，在单位圆上的由单个乘子 $+1$ 或 -1, 或一对复共轭 $e^{\pm i\varphi}$ $(0<\varphi<\pi)$ 组成. 在这些情形中相应的分支都相当简单, 因而可能不需对非线性项多加限制.

对于特征指数的谱作这些假设的理由非常清楚: 我们将特别关注平衡态与周期运动稳定性的消失问题以及由稳定性消失带来的分支问题. 显然这些问题是非线性动力学的主要内容.

当然，线性部分有较高退化性的情形也是非常有意义的. 例如，具有三个特征指数 $0, \pm i\omega$ 或具有两对纯虚指数 $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ 等的平衡态. 对这些余维 2 情形，典型地是将相应的 (截断) 规范形化为具有限个参数的二维系统. 这些规范形的系统研究在 [21,40,64,82] 中有叙述.

但是我们必须记住，截断规范形并不永远能保证原来系统动力学的完全重建.

---

[2] 见 Andronov,Vitt 和 Khaikin 的《振动理论》的第一版序言 (在 1937 年的印刷中没有 Vitt 名字).

[3] 在 13.2 节对二重零特征指数的情形作了部分考虑.

例如, 当截断规范形具有额外的对称性时, 原则上, 如果我们放回略去的高阶项则这种对称性可能遭到破坏, 甚至还会导致在参数空间的某个区域产生混沌. 这些区域在余维 2 分支点附近的形状非常狭窄, 但当我们从此分支点移动一个有限距离时, 其大小将迅速扩大.

线性部分高阶退化 (从余维 3 开始) 的意义在于这个有效规范形变成三维，而且可能呈现所谓瞬时混沌的复杂动力学，即使对规范形自身也如此. 这样的例子包括具有三重零特征指数以及完全和不完全 Jordan 块的平衡态分支规范形, 这种情形可以分别存在螺旋奇怪吸引子 [18], 或者 Lorenz 吸引子 [129] (后者要求额外的对称性). 由于我们将集中考虑简单动力学，所以本书不包括这些专题.

在我们叙述局部分支时，所用的关键方法是基于中心流形定理和不变叶层技巧 (见第一卷 5.1 节). 假设无特征指数位于虚轴的右边 (或无乘子位于单位圆外), 这允许我们引入一个光滑简化技巧, 将系统化为一个非常方便的 "标准形". 本书将使用这个简化法同时研究稳定性边界本身的局部分支以及通往稳定性边界的大范围分支 (12 章)[4]. 这些大范围分支与这样的事实有关; 与在平衡点的稳定性区域的任何边界上平衡态都得到保持不同, 周期轨道在稳定性边界上可能不存在. 特别地, 周期轨道在下列情况下可能消失：

(1) 它收缩到一个平衡态,

(2) 在它上面突然出现一个鞍 - 结点平衡态,

(3) 鞍点平衡态附有同宿回路, 以及

(4) 当趋于稳定性边界时周期轨道的周期和长度都变成无穷, 这时产生蓝天突变, 与同宿分支不同的是, 在蓝天突变里不含有任何平衡态.

在 12 章中我们将研究鞍 - 结点平衡态与周期轨道消失时的大范围分支. 首先我们介绍 Andronov 和 Leontovich 一个关于平面上从鞍 - 结点分界线回路产生稳定极限环的定理的高维类似. 与 [130] 中原来的证明比较, 由于我们用了不变叶层技巧, 证明被大大简化. 我们还考虑鞍 - 结点平衡态的同宿回路进入结点区域边界的情况 (非横截情况).

Andronov 与 Vitt [14] 在研究无线电工程中从同步到拍频调制的过渡时, 发现了鞍 - 结点分界线回路分支. 特别地, 他们研究了周期强迫的 van der Pol 方程

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t,$$

其中 $\mu \ll 1$, 和 $\omega_0 - \omega \sim \mu$. 他们证明了这个方程的平均方程存在鞍 - 结点分支, 以此解释从稳定平衡态到周期运动的简单过渡. 但是, 平均方程的极限集与原来方程的

[4] 在一般情况下, 如果谱中存在稳定和不稳定特征指数, 或是稳定与不稳定乘子, 则要感谢在中心流形上的简化, 局部分支问题并无任何特别困难. 因此, 从第 9—11 章中的图仅需要作一些小修改, 即将不稳定方向改为稳定方向, 或者在空间中附加一个流出方向. 但读者们都明白, 由于化为标准形时在一般情况下并不总是光滑, 所以不能直接应用到对某些大范围分支的分析 (例如鞍 - 鞍平衡点或鞍 - 鞍周期轨道的消失).

极限集之间的对应问题那时没有解决. Andronov 与 Vitt 在他们后一篇文章 [15] 中又回到这个问题, 他们在这篇文章中利用 Poincaré 的小参数方法证明了平均系统的粗平衡态与原来系统的周期轨道之间的对应问题. 后来，Krylov 与 Bogolyubov [81] 证明了平均方程中的粗周期轨道与原来系统中的二维不变环面之间的对应. 于是，对原来系统从同步到调幅的过渡的严格解释，需要对在鞍 – 结点周期轨道消失时可能产生的不变环面分支进行研究.

鞍 – 结点周期轨道消失时的大范围分支问题的一般提法是: 假设存在鞍 – 结点周期轨道, 且其它一切轨线当 $t \to -\infty$ 时, 都趋于这个周期轨道, 而当 $t \to +\infty$ 时, 它们都沿某中心流形趋于此周期轨道. 换句话说, 假设鞍 – 结点的不稳定流形 W^u 从结点区域这边回到鞍 – 结点轨道. 在这种情形下或者:

(1) W^u 是二维不变流形, 如环面或 Klein 瓶, 或者

(2) W^u 不是流形.

如果系统有大范围截面 (当处理周期强迫自治系统时, 这种截面总存在), 不稳定流形 W^u 将仅为环面. 流形 W^u 与此截面的交为闭曲线, 该曲线在 Poincaré 映射下不变. 因此, 出现下面两种可能的情形:

(1) 曲线为光滑, 以及

(2) 曲线不光滑.

如果鞍 – 结点消失时该曲线光滑, 则闭吸引不变曲线在截面上得到保持. 这个结果属于 Afraimovich 与 Shilnikov [3]. 如果不变曲线不光滑, 则情况本质上将变得更加复杂, 因为鞍 – 结点的消失现在将导致原系统脱离 Morse-Smale 类, 即系统可具有复杂结构. Afraimovich 与 Shilnikov 发现, 如果所谓 “大叶” 或 “小叶” 条件满足, 则存在对应于出现复杂动力学的参数区间序列. 此结果随后为 Newhouse, Palis 与 Takens [97] 所改进, 在不用大叶条件但限制在一类特殊的单参数族中, 他们证明, 存在一个对应于横截同宿轨道的参数值序列 (因此, 永远存在对应于复杂动力学的区间序列). 对于一般的单参族的这个分支, [151] 也得到一个类似的结果, 它证明如果大叶条件满足, 则对一切 (小) 参数值, 在鞍 – 结点消失后即出现混沌. 反之，如果这个条件不满足, 则复杂动力学的区间以及仅具简单动力学的区间 (这时存在连续不变曲线) 在参数轴上必须交替存在.

注意, 简单性态与复杂性态的交替区域的效应, 在 van der Pol [154] 的灯光发生器的周期强迫实验时第一次被发现 (当我们打开无线电并从一个台转向另一台听到噪音特性时就出现这种效应). 对这个 van der Pol 方程的第一个理论解释是由 Cartwright 和 Littlewood 给出的 [36].

我们将在 12.2 节, 对鞍 – 结点的不稳定流形 W^u 同胚于环面的结果作了简短介绍, 并对不变环面在光滑情形得到保持的定理给出了证明. 那里, 我们对将问题有效地化为某个圆周自同态族 (光滑不可逆映射) 的研究发展了一般理论.

当系统没有大范围截面时, 鞍 - 结点的不稳定流形 W^u 可能是一个 Klein 瓶 (如果系统定义在 $\mathbf{R}^n, n \geqslant 4$). 如果 Klein 瓶在分支点光滑, 则当鞍 - 结点消失时它仍将继续保持. 拓扑学上的理由是, 在 Klein 瓶上将永远存在一对周期轨道, 当原有鞍 - 结点突然出现时, 两个轨道的长度都增长到无穷. 几何上, 这些周期轨道由于向前与向后的倍周期分支, 其稳定性将改变无穷多次. 如果在分支点 Klein 瓶不光滑, 则就应该用大叶或小叶条件. 前者在鞍 - 结点消失以后保证对一切小参数值存在复杂动力学. 反之, 小叶条件仅能保证出现复杂动力学的参数值区间序列的存在性. 注意, 不像 W^u 同胚于环面的情形, 对于不光滑 Klein 瓶的情形, 当小叶条件不满足时 ("非常小叶" 的情形), 对所有小参数值动力学可能为简单的. 这些结果都在 12.3 节中叙述.

对系统不存在大范围截面, 且 W^u 不为流形时, 可能会出现完全不同的情况. 此时 (12.4 节), 在某些附加条件下, 鞍 - 结点周期轨道的消失可使另一个 (唯一且稳定的)周期轨道产生. 当这周期轨道靠近稳定性边界时, 其长度与周期将无限增大. 这个现象就是所谓 "**蓝天突变**". 由于现在还没有发现物理模型出现这种分支, 故我们将用一些自然例子叙述它.

注意在 n 维情形, 当 $n \geqslant 4$ 时, W^u 的其它拓扑图像可能会实现. 这种鞍 - 结点分支肯定会导致系统跑出具有简单动力学的系统类之外. 例如, 在 [139, 152] 中证明, 当鞍 - 结点周期轨道消失后, 即可出现 Smale-Williams 型的双曲吸引子[5].

在 Morse-Smale 系统类中另一个典型的余维 1 的分支 (本书将不涉及) 包括所谓鞍 - 鞍点分支, 其中具有一个零特征指数 (其它的均在左或右半平面) 的非粗鞍点平衡态, 与另一个具有不同拓扑类型的鞍点重合. 此外, 如果鞍 - 鞍点的稳定流形与不稳定流形沿某些同宿轨道彼此横截相交, 则当分支点消失时, 从同宿回路产生鞍点周期轨道. 如果只存在一条同宿回路, 则只有一条周期轨道从它产生, 分别地, 这个分支不至于使系统跑出 Morse-Smale 类之外. 但是如果有多于一条同宿回路, 则在鞍 - 鞍点消失后, 将出现具有无穷多个鞍点周期轨道的双曲极限集 [135].

当鞍 - 鞍点周期轨道 (具一个乘子等于 1, 其余乘子均在单位圆之内或外) 消失时也会出现类似的现象. 如果鞍 - 鞍点周期轨道的稳定与不稳定流形相交于 (至少) 两个不变环面, 则这种周期轨道的消失跟随着产生的极限集, 其上光滑的鞍点不变环面的无限集是稠密集 [6].

在第 13 章考虑鞍点平衡态的同宿回路分支. 我们从二维情形开始. 首先, 研究在一般情形 (非零鞍点量) 以及在零鞍点量情形分界线回路的稳定性问题[6]. 接下来, 详细研究任意有限余维情形, 其中将构造所谓 Dulac 序列, 它允许我们用此序列中第一个非零项的符号来确定回路的稳定性.

对非 - 零鞍点量情形, 我们介绍 Andronov 与 Leontovich 有关在分界线回路分

[5] 在 [139] 中考虑了鞍 - 结点环面的消失, 跟着出现 Anosov 吸引子和高维螺线管吸引子的更一般情形.

[6] 较自然的是仅考虑单侧稳定性.

支产生唯一极限环的一个经典结果. 我们的证明不同于 Andronov 与 Leontovich 在 [9] 中的原来证明, 他们在那里实质上运用了平面拓扑. 但按照他们的思路, 我们将在最小光滑性 ($\mathbb{C}^1$) 的要求下给出证明.

零鞍点量的情形是 E.A.Leontovich 在 1951 年考虑过的. 她的主要结果将在 13.3 节中介绍, 但用不同的术语重述: 在余维 n 的情形 (即 Dulac 序列中前面 $(n-1)$ 项恰好为零), 从平面分界线回路可以分支出不多于 n 个极限环; 此外, 这个估计是精确的.

在同一节我们给在分支点具有第一个鞍点量为零和第一个分界线量 (Dulace 序列的第二项) 不为零的余维 2 情形的分支图. Leontovich 的方法基于构造 Poincaré 映射, 此法允许我们在不可定向的二维曲面上考虑同宿回路, 其中分界线回路的小邻域可以是 Möbius 带. 我们在那里讨论两个情况的分支图.

13.4 节考虑高维鞍点平衡态的同宿回路的周期轨道分支. 首先找到产生周期轨道的条件. 这些条件保证平衡态的不稳定流形必须是一维的, 且鞍点量必须为负. 事实上, 确切的定理 (定理 13.6) 是 Andronov-Leontovich 定理在高维情形的直接推广. 我们再次强调, 与 Shilnikov 原来的证明 [130] 比较, 我们在这里的证明仅要求向量场具有 $\mathbb{C}^1$ – 光滑性.

接下来我们考虑鞍点的同宿分支, 它的不稳定流形仍为一维的, 但鞍点量现在假设为正. 不像负鞍点量情形, 在这里我们需要对系统加上一些额外的非退化条件. 实际上由这些条件得知系统存在稳定二维不变 $\mathbb{C}^1$ – 流形, 它或为柱面或是 Möbius 带 (这依赖于所谓分界线量的符号). 因此我们的问题本质上已化为 13.2 节中考虑过的二维情形. 由于这个问题是 13.5 节中考虑的更一般问题 (高维不稳定流形情形) 的特殊情形, 我们更关注这个结果的几何背景. 这个方法与 Lorenz 吸引子的研究有关, 同时也与另一些高余维同宿分支有关.

在结束本节时我们考虑不稳定流形为一维的鞍 – 焦点同宿回路. 我们证明当鞍点量为正时, 在鞍 – 焦点同宿回路附近有无穷多个鞍点周期轨道并存 (定理 13.8).

L. Shilnikov 在三维情形 [131] 发现了在鞍 – 焦点同宿回路附近的复杂动力学的存在性. 后来, [132] 中考虑了四维情形[7], [136] 中考虑了一般情形.

在 13.5 节中我们考虑鞍点同宿回路分支, 但对它的稳定与不稳定流形的维数不作任何限制. 我们证明一个定理, 它给出从回路产生单个周期轨道的条件 [134], 并叙述 (不给证明) 鞍 – 焦点同宿回路邻域内关于复杂动力学的一个定理. 在这里我们指出如何才能将非局部中心流形定理 (第一卷第 6 章) 用到简单鞍点, 以简化我们对已知结果 (定理 13.6) 的分析.

在鞍 – 焦点情形, [136] 的结果不能完全一般性地化到任何不变流形来得到. 但是, 一般地说 (即在某些简单的非退化条件下) 这个问题可化到三维或四维不变流形中的问题 [120,150].

[7] 这里, 鞍 – 焦点有两对复共轭特征指数, 且向量场的散度在鞍 – 焦点处不为零.

13.6 节讨论鞍点同宿回路余维 2 分支的三个主要情形. 这些情形都被 Shilnikov 选择在 [138] 中以解释如何从蝴蝶形同宿直接进行到 Lorenz 吸引子. 后来, 这些分支吸引了更多人的兴趣 (见 13.6 节的参考文献). 这里我们考虑的是具零鞍点量的鞍点同宿回路的高维情形, 以及所谓的 "轨道翻转 (orbit-flip)" 与 "倾角翻转 (inclination-flip)" 分支, 它们均未导致复杂动力学. 虽然相应的分支图已为大家知道 (对倾角翻转情形见 [126, 77, 129], 对轨道翻转情形见 [119], 对零鞍点量情形见 [99, 38, 77, 65]), 但发表在这里的明显而完全的证明, 可能是第一次.

在 13.7 节中我们描述另外两个余维 2 的情形, 即 8 字形同宿分支与两个鞍点的异宿环分支. 两者均在 Morse-Smale 系统类内考虑 (对 8 字形同宿情形要求鞍点量为负; 在异宿环情形, 要求鞍点量必须为负, 或者保证二维不变流形存在的条件必须满足). 这一节的结果取材于: 对 8 字形同宿是 [148, 151, 50, 149], 对异宿环是 [121, 122, 123, 124, 125]. 我们也介绍具有不同拓扑的异宿连接的另一些结果 [34, 35]. 对于包含两个鞍 - 焦点的情形, 其分支图的结构比两个鞍点连接的情形要复杂得多 (即使两者均保持在简单动力学内). 按照 [158], 在 8.3 节讨论鞍 - 焦点分支图的精细结构对连续拓扑不变量 (模数) 的任意小变化所引起的敏感性.

最后一章将集中讨论平衡态与周期轨道在稳定性边界上过渡的一般问题. 这些问题对于非线性动力学的主题有它的直接意义, 特别是当有关装置中的工作参数的改变有可能将平衡点或者周期轨道推出稳定区域时, 或是当控制参数特意选择使尽可能靠近稳定性边界以便达到最大性能时. 对驻定机制, 相应的问题 Bautin 第一个在 1949 年发表的论文里就曾涉及过. 他将稳定性边界分为安全与危险两类. 当穿过安全边界时, 代表的相点不会离开分支出来的平衡态或周期轨道的小邻域, 虽然后者已成为不稳定. 对于危险边界, 相点从分支轨线的小邻域内破裂出来. 显然, 在危险边界作局部分析是不合适的: 我们在这里必须研究不稳定集在临界时刻是如何变化的. 例如, 如果稳定极限环依附于鞍点同宿回路, 重要的是要知道别的分界线的走向, 因为它的 ω - 极限集将成为这个系统新的动力学机制. 但是, 也可能发生另一些情况, 即在临界参数值, 有多于一个稳定极限集包含在不稳定集的边界上 (如果这个分支在 Morse-Smale 类内, 这些极限集为稳定平衡点或周期轨道). 另一种选择则是包含所谓动力学不确定稳定性边界, 那里一个新机制的随机选择是作为自然动力学现象, 作为动力学不确定性出现.

有关分支理论的论文与著作数量非常巨大而且还在迅猛增长. 本书考虑的某些问题, 其某些内容也反映在一些别的著作里 (特别是参考文献中带星号的那些书). 但是, 在许多研究大范围分支的工作里, 我们强调在平衡态与周期轨道附近方程的光滑线性化假设, 我们经常这么做的目的只是为了取得最大的方便. 线性化假设要求没有共振, 因为共振将导致对系统要附加无穷多个不必要的条件 (或者, 这些条件的个数开始为有限, 而后随着系统维数的增加而很快增加). 因此, 任何一种基于线性化的

方法, 对于动力学模型理论结果的充分应用都将遭到某些质疑[8]. 而本书介绍的这些方法将与这些问题无关. 这要归功于我们在 Nizhny Novgorod 的研究小组发展的技术. 它们应用于 12 章与 13 章的非局部分支. 我们还要强调的是, 我们只需要很小的光滑程度. 或许这会使我们的分析更加复杂, 但它保证和提高了我们的大范围分支结果的有效性和合理性. 本书提供的方法也可应用于具有复杂动力学的系统, 特别对具有同宿切触的系统 [58, 59, 62], 还可见 [100, 101].

感谢我们在撰写本书时所得到的所有帮助. 特别要感谢 S. Gonchenko, M. Shashkov, O. Stenkin, L. Lerman 与 J. Moiola. 我们还要感谢美国海军研究所 (EPFL) 和瑞士联邦技术研究所 (ETH) 的慷慨支持.

[8] 经常会发生这样的情况, 即一些结果在数学上看起来非常细腻, 并表达为动力系统的 "典型" 或 "一般" 族, 但当应用于一个特殊问题时却被要求去验证它们的保证条件. 然而, 强使一个研究者浪费时间和计算资源仅仅为了验证这些事实上并不必要的条件, 这是不公平的.

内容提要

本书详细介绍非线性动力系统高维定性理论和分支理论(局部和大范围)。全书共分两卷。第二卷主要介绍高维动力系统的分支理论，共分 8 章和一个附录(例子，问题和练习)，主要内容有：结构稳定系统、动力系统的分支、平衡态和周期轨线的稳定性边界上动力系统的性态、通往稳定性边界的局部分支、鞍 – 结点平衡态以及周期轨道消失时的大范围分支、鞍点平衡态的同宿回路分支、安全和危险的稳定性边界。全书可作为大学数学系高年级本科生、研究生、教师的教科书和教学参考书，也供非线性动力学和动力系统其它方面的工程师、学生、教师、学者和专家学习和参考。

目录

第 7 章　结构稳定系统

动力系统的定性理论起源于 19 世纪的天体力学问题. 正如我们知道的, 从一般观点来看, 天体力学中的方程是一类特殊形式的 Hamilton 方程. 其实, 在那个时代还不特别需要非保守系统的定性理论. 尽管如此, Poincaré 创造了平面动力系统一般理论的重要部分连同它的关键性结果, 即极限环理论, 还有 Lyapunov 创造了稳定性的一般理论. 稍后, 这两个数学理论于 1920—1930 年在无线电的发明以及无线电工程的进一步发展中得到了应用.

无线电工程中的动力学机制是自激振动. 任何一个现实装置, 如氖气管或真空管, 都有可调控的某个参数集. 在实践中, 对同一装置或者一系列类似的装置, 它们对应于自激振动机制的参数值不能确切地确定. 因此, 如果一个装置重复出现类似的振动, 这意味着在某些误差允许范围内, 参数的小偏差不会改变过程的定性特征. 当然, 系统的任何一个现实数学模型也必须具有现实物理系统的这种性质.

当一个物理系统可由平面动力系统适当模拟时, 其确切的数学意义可给出物理学的 “可靠性” 面貌, 这就是 Andronov 所做的. 首先, 他应用 Poincaré 的极限环理论和 Lyapunov 的稳定性理论研究模型方程, 这允许他和 Vitt 得以解释无线电工程中的许多现实现象. 然后他将 Poincaré 稳定极限环的概念与可观察到的被他称为 “自激振动” 的周期振动联系起来. 此外, Andronov 引入 “粗” 环概念作为稳定自激振动的数学映像, 即在系统小的光滑扰动下得到保持的环.

但是, 超越了某个参数的变化范围, 控制参数可以导致振动机制的基本变化. 这引起对动力系统相图的定性改变. 在 Andronov 富有远见的论文 “自激振动理论的数学问题” [8] 中, 他强调振动机制分支的全面研究, 要求从孤立的单个轨线 (如极限环, 或平衡态) 到整个系统对粗性概念作出解释. 这个问题后来被 Pontryagin 和他本人解决. 下面我们概述他们的平面 “粗” 系统理论.

7.1 平面上的粗系统. Andronov-Pontryagin 定理

考虑平面上由方程

$$\dot{x} = X(x) \tag{7.1.1}$$

定义的二维系统集, 其中 $X(x_1, x_2)$ 是定义在有界闭区域 $G \subset \mathbb{R}^2$ 内的 $\mathbb{C}^r - (r \geqslant 1)$ 光滑函数.

在这个集合上引入下面的范数

$$\|X\|_{\mathbb{C}^1} = \sup_{x \in G} \left(\|X\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\| \right). \tag{7.1.2}$$

赋予这个范数后, 这个系统集就变成 **Banach 空间**, 记为 $\mathcal{B}$ 或 $\mathcal{B}_G$, 后者强调对区域 G 的选择.

我们也可引入系统 X 的 δ 邻域为满足条件

$$\|\tilde{X} - X\|_{\mathbb{C}^1} < \delta$$

的所有系统 $\tilde{X}$ 的集合.

定义 7.1　*动力系统 X 在区域 G 内称为粗的, 如果对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得:*

(1) 在 X 的 δ 邻域内的所有系统 $\tilde{X}$ 都拓扑等价于 X, 此外

(2) 建立这个拓扑等价的同胚 ε - 接近恒同映射, 即两个对应点的距离小于 ε.

像在对粗性的原始定义中所做的, 自然要对区域 G 的边界 ∂G 加上某些假设: 即 ∂G 必须是与向量场无切 (即不与向量场相切) 的光滑闭曲线[1]. 注意, 对在紧光滑曲面上的动力系统情形, 区域 G 恰好取与整个曲面重合, 故没有出现在边界上的条件.

定理 7.1 (Andronov-Pontryagin)　系统 X 在区域 G 内为粗的, 当且仅当系统

(1) 不存在特征指数在虚轴上的平衡态;

(2) 不存在特征乘子在单位圆上的周期轨道; 以及

(3) 不存在从一个鞍点到另一个 (或者到同一个) 鞍点的分界线.

最后这个条件可另述为系统没有同宿和异宿轨线.

由上面的定理得知平面上的粗系统只可有粗平衡态 (结点, 焦点和鞍点) 和粗极限环. 对鞍点分界线, 它们在向前时间或向后时间渐近趋于结点, 焦点或者极限环, 或者经有限时刻后离开区域 G.

[1] 这个条件可以减弱为允许在 ∂G 上有有限个点与向量场有二次切触. 这时既没有周期轨道也没有分界线通过这些切触点应该作为第四个条件加到 Andronov-Pontryagin 定理中去.

显然, 这个图像在光滑小扰动下得到保持. 因此, **粗系统组成 $\mathcal{B}_G$ 的开子集**.

此外, 从下面叙述的基于旋转向量场的简单论述得知, 如果 X 是非粗系统, 则任给 $\delta > 0$ 存在与 X 为 $\delta-$ 接近的粗系统 $\tilde{X}$. 换句话说, **粗系统构成 $\mathcal{B}_G$ 中的稠密集**.

从 Andronov-Pontryagin 定理立刻得知, **在 G 中的粗系统只可能具有有限个平衡态和周期轨道**.

平衡态、周期轨道和鞍点分界线都是**特殊**轨线. 将它们放在一起就确定一个**概形**, 它是一个完全拓扑不变量 (细节见第 1 章). 容易得知与一个给定粗系统 δ- 接近的所有系统具有相同的概形.

Andronov-Pontryagin 定理中的条件 (1) 和 (2) 的必要性是显然的. 事实上, 如果系统在 G 中为粗, 则它必须在 G 的任何子区域内保持粗性. 因此, 选择小邻域使得它包含平衡态, 可得知对应于这个平衡态的系统也必须是粗的. 对粗极限环类似的结论也成立.

现在我们来解释在粗系统中为什么不存在连接鞍点的分界线.

将系统 X 写为形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y). \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

考虑一个特殊的扰动系统 $\tilde{X}_\mu$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) + \mu Q(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y) - \mu P(x, y), \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

其中 μ 是参数. 注意到当 μ 变化时系统 (7.1.4) 的平衡态不移动. 在其它任何点, $\tilde{X}_\mu$ 和 X 的相速度向量之间的交角 ψ 由

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{Q-\mu P}{P+\mu Q} - \dfrac{Q}{P}}{1 + \dfrac{Q-\mu P}{P+\mu Q}\cdot\dfrac{Q}{P}} = -\mu \tag{7.1.5}$$

给出, 即角 ψ 是常数.

由于这个性质, 族 X_μ 称为向量场 X 经过常数角度的**旋转**. 如果 $\mu > 0$, 这个角度为正; 如果 $\mu < 0$, 它为负. 因此, 如果在 $\mu = 0$, 一个鞍点的分界线与另一个鞍点相连接 [见图 7.1.1(a)], 则对任意小的非零 μ, 这个连接将按如图 7.1.1 (b) 和 7.1.1 (c) 的方式分裂.

类似地, 如果在 $\mu = 0$ 有鞍点分界线回路, 它关于某个非零 μ 分裂, 如图 7.1.2 所示. 我们看到, 向量场的任意小光滑扰动将改变具有同宿回路或异宿连接的系统的相图; 这明显说明这样的系统是非粗的.

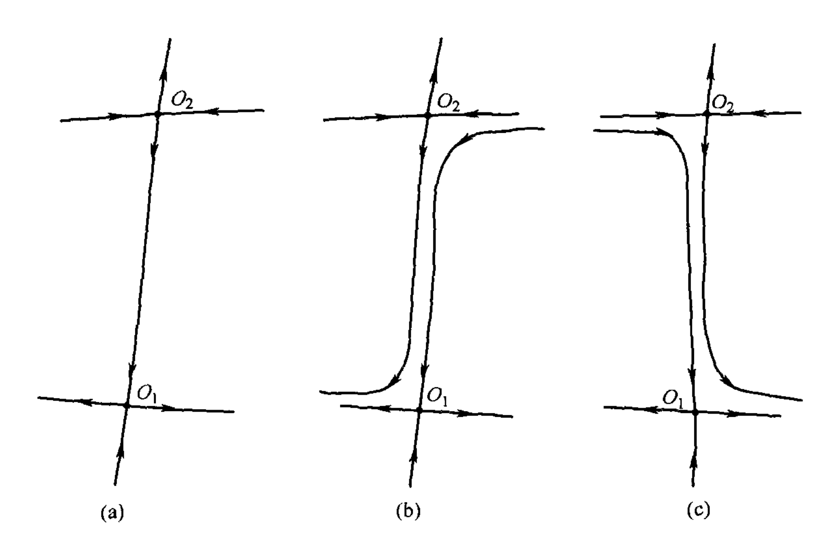


图 7.1.1　(a) $\mathbb{R}^2$ 中两个鞍点之间在 $\mu=0$ 的非横截异宿连接, 连接按两种方式分裂: (b) $\mu<0$ 和 (c) $\mu>0$.

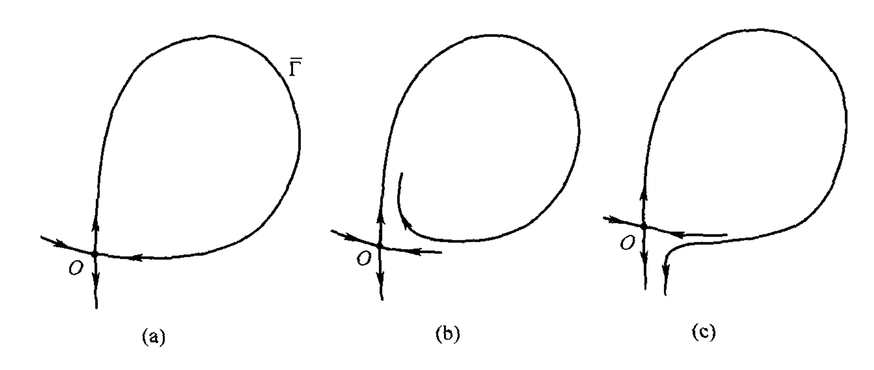


图 7.1.2　(a) 鞍点的同宿回路是结构不稳定的. 分界线性态:(b) 回路之前和 (c) 回路之后.

Andronov-Pontryagin 定理中条件的充分性证明完全依赖于 Poincaré-Bendixson 理论, 这个理论给出平面二维系统轨线的每一个可能类型的分类 (见 1.3 节). 详情可参考 [11,12].

Poincaré-Bendixson 理论也可用于柱面和二维球面上的系统. 对另外的紧曲面如环面、麻花纽结环面 (带柄的球面) 等, 其上可存在向量场, 它除了有平衡态和极限环还可具有非闭 Poisson 稳定轨线.

非线性动力学中特别有趣的是二维环面上的流. 考虑在环面上没有平衡态的系统, 它可化为圆周上可定向的微分同胚

$$\bar{\theta}=\theta+f_0(\theta)\equiv f(\theta) \quad \mod 2\pi.$$

引入度量

$$\text{dist}(f_1, f_2)_{\mathbb{C}^1} = \max_{\theta}(\|f_1(\theta) - f_2(\theta)\| + \|f_1'(\theta) - f_2'(\theta)\|),$$

这些微分同胚的集合构成一个度量空间 (按照第 4 章的 Mayer 定理的观点), **粗微分同胚在其上是稠密的**.

粗系统在二维可定向紧曲面上的系统空间内也稠, 在这种曲面上系统为粗的充分必要条件类似于 Andronov-Pontryagin 定理. 这种系统的理论被 Peixoto 所发展 [107]. 这个理论中的关键因素是证明在粗系统中不存在非闭 Poisson 稳定轨线 (它们可用旋转向量场排除).

这里必须注意, Peixoto 用了一个不同的粗性定义. 在平面系统的情形, 它被重新定义如下:

定义 7.2 一个系统 X 称为在区域 G 内是结构稳定的, 如果存在 $\delta > 0$ 使得当 $\|X - \tilde{X}\|_{\mathbb{C}^1} < \delta$ 时, X 和 $\tilde{X}$ 拓扑等价.

比较粗系统的定义, 上面的定义有其好处: 由此可直接得知结构稳定系统组成一个开集. 对粗系统类似的要求仅由 Andronov-Pontryagin 定理得知. 事实上, Peixoto 证明在定义 7.1 的意义下粗性的充要条件与二维系统在定义 7.2 意义下的充要条件是一致的.

粗性或结构稳定性概念可毫无问题地推广到高维情形. 但当我们需要明确寻找粗性的充要条件时就出现某些其它问题. 我们已经注意到, Andronov, Pontryagin 和 Peixoto 本质上都用了正常的二维系统的分类. 因此, 我们必须在这里停止讨论, 以便从动力系统一般理论中获得某些熟知的基本概念和事实.

7.2 中心运动的集合

回顾 20 世纪二、三十年代的无线电工程, 我们可以认为还有一些遗留问题要求借助于高于二阶的动力系统来模拟. 我们想知道除了周期运动, 还有什么类型的振动运动在复杂的物理系统中可被观察到, 以及怎样的数学映象可以适当地反映它们. 为解决这个问题, 我们必须对所有可能的轨线进行全面的分类. 第一步是从**游荡点**和**非游荡点**的选择开始. 对在紧集上系统的这两类点的定义在第1章已经给出过. 下面我们将考虑系统

$$\dot{x} = X(x),$$

其中在有界闭区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上 $X \in \mathbb{C}^1$, 区域 G 的边界由与向量场无切的 $(n-1)$ 维光滑曲面组成, 向量场在边界指向区域的内部, 即进入 G 内. 因此, 对任一点 $x_0 \in G$, 在 $t = 0$ 从点 x_0 开始的正半轨线 $x(t, x_0)$ 有定义.

定义 7.3　点 x_0 称为游荡点, 如果它存在邻域 U 使得对某个 $T>0$ 和对所有 $t\geqslant T$ 有

$$U\bigcap x(t,U)=\varnothing.$$

其中, 如前

$$x(t,U)=\bigcup_{\xi\in U}x(t,\xi).$$

由上述定义, 每一点 $\xi\in U$ 也是游荡点. 因此所有的游荡点的集合是开的. 此外容易看出, 若 x_0 是游荡点, 则对任何 t 点 $x(t,x_0)$ 也是游荡点. 因此, 我们可称 $x(t|_{t\geqslant 0};x_0)$ 为**正游荡半轨线**. 此外, 如果对所有 $t<0$ 有 $x(t,x_0)\in G$, 即如果通过点 x_0 的负半轨线整个地位于 G 内, 则 $x(t,x_0)_{t<0}$ 也将由游荡点组成. 因此整条轨线 $x(t,x_0)$ 也可以称为游荡的. 由于明显的理由, 游荡 (半) 轨线与我们曾经找到的运动类型未必有联系.

从而我们将更关注非游荡点. 即使从名字我们也可以预见它有某种 " 回归性".

定义 7.4　点 x_0 称为非游荡点, 如果对它的任何邻域 U 和任何 $T>0$, 存在 $\bar{t}\geqslant T$ 使得

$$U\bigcap x(\bar{t},U)\neq\varnothing.$$

在这种情形下, 任给序列 $T_n\to\infty$, 可找到序列 $\bar{t}_n\to\infty$ 使得 U 无限多次回到它自己. 容易看出, 如果点 x_0 为非游荡点, 则对所有 $t\in(-\infty,+\infty)$ 有 $x(t,x_0)\in G$ 以及轨线上的任何点也是非游荡点.

由于游荡点集是开的, 它的补集, 即非游荡点集是闭的. 用 $\mathcal{M}_1$ 记它. 我们证明在我们的假设下它非空. 首先注意到, 任何半轨线的 ω- 极限点集是非空的. 这是从 G 的紧性得知的.

命题 7.1　任何轨线 $x(t,x_0)$ 的 ω – 极限点是非游荡点.

证明　设 $x(t,x_0)$ 是半轨线, y 是它的极限点. 令 U 是 y 的任意邻域. 选择任意大的 $\bar{t}$. 由于 y 是 ω – 极限点, 我们可找到两个任意大的 t_1 和 t_2, 使得 $y_1=x(t_1,x_0)\in U$ 和 $y_2=x(t_2,x_0)\in U$. 可设 $t_2-t_1>\bar{t}$. 于是得 $x(t_2-t_1,U)\bigcap U\neq\varnothing$ (这个交含有点 y_2). 因此, y 事实上是非游荡点.

逆命题不真. 一般地, 可存在非游荡点, 它不是任何轨线的 ω – 极限点或 α – 极限点.

平衡态和周期轨道都是非游荡轨线. 对前一情形, 平衡态的任何邻域将永远包含此平衡态, 对于周期轨道, 由于周期性, 它的任一点只不过无穷多次回到初始邻域.

非游荡点的一个中心子类是在 Poisson 意义下的稳定点. Poisson 稳定点的主要特征是, 不仅它的邻域具有回归性而且轨线本身也具有回归性. 下面所给的 Poisson 稳定点的定义与第 1 章所给的定义略有不同, 但与之等价.

定义 7.5 点 x_0 称为在 Poisson 意义下正向稳定 (P^+ 稳定), 如果存在序列 t_n, 当 $n \to +\infty$ 时 $t_n \to +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty} x(t_n, x_0) = x_0.$$

换句话说, 点 x_0 是它的正半轨线的 ω - 极限点.

负向 Poisson 稳定 (P^- 稳定) 点的定义与上面的定义类似, 只不过这里的 $t_n \to -\infty$. 点 x_0 既 P^+ 稳定又 P^- 稳定, 则称它为在 Poisson 意义下稳定.

可以看出, 如果 x_0 是 P^+ (P^-) 稳定, 则它的轨线也是 P^+ (P^-) 稳定. 因此, 我们可以把 Poisson 稳定的概念扩展到半轨线和全轨线.

重要的是区别 P^+, P^- 和 P 稳定彼此之间的关系. 事实上, 从 1.2 节我们考虑过的一个二维环面上具有一个平衡态的系统的例子, 它有 P^+ 轨线以此平衡态为它的α - 极限点, 又有 P^- 轨线其 ω - 极限点也是它, 环面上所有其它轨线都 Poisson 稳定并稠密地覆盖此环面.

让我们回到非游荡点集 $\mathcal{M}_1$, 我们已经知道它是非空、闭的不变集 (由整条轨线组成). 集合$\mathcal{M}_1$ 可视为动力系统的相空间, 因此可以重复上述方法构造在 $\mathcal{M}_1$ 内由非游荡点组成的集合 $\mathcal{M}_2$. 显然 $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$. 就像 $\mathcal{M}_1$, 集合 $\mathcal{M}_2$ 也是紧不变集. 如果 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1$, 则 $\mathcal{M}_1$ 称为**中心**或**中心运动集**. 我们考虑的二维结构稳定系统正是这种情形.

在一般情形下, 我们有

$$\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{M}_k \supset \cdots.$$

如果从某个 k 开始有 $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+1}$, 则 $\mathcal{M}_k$ 也称为**中心**, k 称为中心运动的**序数**.

如果对任何 k 有 $\mathcal{M}_k \neq \mathcal{M}_{k+1}$, 则我们可引入集合

$$\mathcal{M}_\omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k,$$

它是闭不变集的交. 因此集 $\mathcal{M}_\omega$ 也是闭不变的. 事实上, 如果 $x_0 \in \mathcal{M}_\omega$, 则对任何 k 有 $x_0 \in \mathcal{M}_k$. 所有 $\mathcal{M}_k$ 都是不变的, 因此对所有 t 和任何 k 有 $x(t, x_0) \in \mathcal{M}_k$, 由此 $x(t, x_0) \in \mathcal{M}_\omega$.

我们可以重复上面的过程而得到闭集的**超限**序列

$$\mathcal{M}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{M}_k \supset \cdots \supset \mathcal{M}_\omega \supset \cdots \supset \mathcal{M}_\alpha \supset \cdots.$$

我们知道 (根据有限维集合的 Cantor 定理) 可求得一个可数数 α 使得 $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_{\alpha+1} = \cdots$, 即这个过程结束. 在这种情形下, $\mathcal{M}_\alpha$ 是**中心**, α 为**序数**. 如果 α 为有限数, 称它为**第一类超限序数**; 如果 $\alpha \geqslant \omega$, 则称它为**第二类超限序数**.

看起来不可思议的是, 具有第二类超限序数 α 的动力系统还确实存在. Mayer [93] 曾经证明, 对任何给定的第二类超限数 α, 存在一个系统, 它的中心运动的序数就超过此超限数.

对平面上的粗系统, Andronov-Pontryagin 定理给出 $\alpha = 1$. $\alpha = 2$ 的情形发生在鞍点 O 具有分界线回路 Γ 的系统中, 回路是附近轨道的极限轨线 (见图 7.2.1) 且是非游荡的. 这里 $\mathcal{M}_1 = \Gamma \bigcup O$. 按照上述过程的第二步我们得到 $\mathcal{M}_2 = O$, 即区域 G 的中心极小化为平衡态.

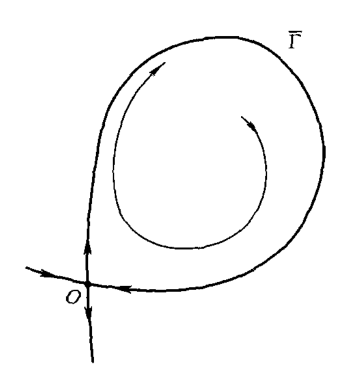


图 7.2.1 鞍点的同宿回路是其内部轨线的 ω- 极限.

为什么中心如此引人关注? 首先, 这是一个系统的所有轨线在大部分时间里在那里逗留的时间比在别处更长的集合. 其次, 这个中心已被 Birkhoff 定理所刻画.

定理 7.2 (Birkhoff) Poisson 稳定轨线在中心运动的集合中处处稠密.

这个定理看来已为 Poincaré 对保守系统的区域回归定理所知, 即保积流和保积微分同胚能使得相空间的体积为有限. 严格地讲, 这是 Birkhoff 期望创造中心运动的目的, 即他希望从耗散系统中指定出一个轨线集合, 在这个集合上系统具有保守性态. 例如, 周期轨线上运动方程在法坐标下可写为 $\dot{\theta} = 1$. 这个流保持弧的长度. 类似的情况也出现在被拟周期轨线稠密覆盖的稳定不变环面上. 例如由方程

$$\dot{\theta} = \omega_1, \quad \dot{\varphi} = \omega_2$$

刻画的运动, 其中 ω_1 与 ω_2 不可约.

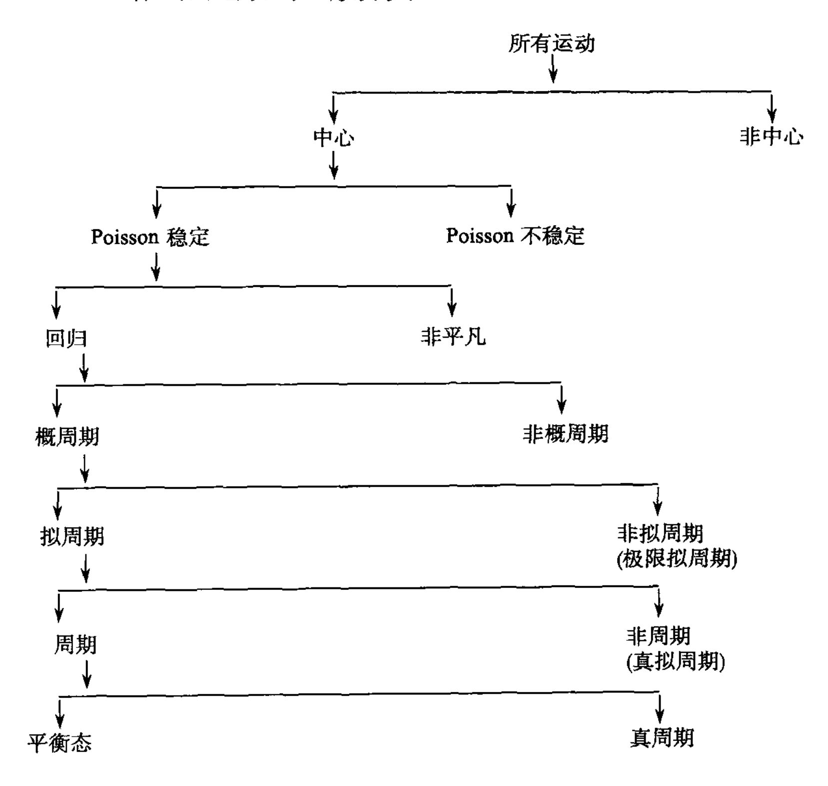
最后, 我们指出, 读者可在 Birkhoff 的书《动力系统》[31] 以及 Nemytskii 和 Stepanov 的书《微分方程定性理论》[98][1)] 中找到上述主题更深入的思想.

7.3 中心运动的一般分类

我们已经注意到, 平面上的二阶结构稳定系统理论本质上是建立在 Poincaré-

1) 此书有由王柔怀, 伍卓群译, 科学出版社出版的中译本—— 译者注.

Bendixson 理论和所有可能运动分类的基础上. 下面的图表是由 Andronov 建议的, 它描述了 Birkhoff 作出的运动的一般分类.



在上一节我们已经讨论了中心运动集. 从根本上说我们已经看到它是 Poisson 稳定轨线集的闭包. 但它并不排斥后者可为简单的周期轨道情形. 但如果存在单个 Poisson 稳定非闭轨线, 则由 1.2 节的 Birkhoff 定理, 存在 Poisson 稳定轨线的连续统. 至于中心运动中的其它轨线, 已经知道, 非 Poisson 稳定的点集是不超过可数多个闭的且在中心无处稠密的集的并. 这意味着中心运动集中的大多数轨线是由 Poisson 稳定轨线所组成.

Poisson 稳定轨线可按 P 轨线回到它的 ε 邻域的 Poincaré 回复时间序列 $\{\tau_k(\varepsilon)\}$ 是否有界而分为两类. Birkhoff 称第一类轨线为**回归轨线**. 这类轨线之所以引人关注是因为不管如何选择初始点, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 整个轨线位于对应于时间区间 $L(\varepsilon)$ 的轨线弧段的 ε 邻域中. 显然, 平衡态和周期轨道都是闭回归轨线.

下面我们回忆极小集的概念.

定义 7.6 集 $\mathcal{M}$ 称为是极小的, 如果它是非空、闭的不变集, 且不再包含其它具有相同性质的子集.

注意, 在上面关于系统和区域 G 的假设下, 极小集总是存在的. 奇怪的是 Birkhoff 证明它们的存在性时也用了这个超限数方法.

极小集与回归轨线之间的关系由下面的这些定理组成.

定理 7.3 (Birkhoff) 极小集的任何轨线是回归的.

定理 7.4 (Birkhoff) 回归轨线的闭包是极小集.

由这两个定理得知, 极小集的轨线 (异于平衡态和周期轨道) 组成 “孪生对” 全体.

对某 $\varepsilon > 0$, 回复时间为无界的非闭 Poisson 稳定轨线的闭包称为**拟极小集**. 拟极小集除了在其中的处处稠密的 Poisson 稳定轨线以外, 还有某些其它不变的闭子集. 这些可以是平衡态、周期轨道、非共振不变环面、其它极小集、同宿与异宿轨道等等. 其中的 P 轨线为**游荡**的. 这给我们提供了一个启示, 为什么非平凡非闭 P 轨线的回复时间是无界的? 进一步这也指出, 拟极小集的 Poisson 稳定轨线由于它们不可预知的即时性态, 因而是具有经验混沌特性的非瞬时振动过程的主要关注重点.

在回归轨线情形, 存在 Poincaré 回复时间的某些统计特征, 它们与刻画真正的 Poisson 稳定轨线相比就显得 “较弱”. 尽管如此, 在非线性动力学中存在有趣的回归轨线的特殊子类, 就是所谓**概周期运动**. 值得注意的是, 揭示这些轨线的由来是概周期运动的每个分量是概周期函数 (它的解析性质已被很好地研究过, 例如见 [49, 66, 84]).

概周期函数按 “平均” 由三角 Fourier 级数

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$$

唯一确定, 其中 λ_n 是实数. 如果所有的 λ_n 是频率基 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 的有限个有理无关元的 (整系数) 线性组合 (见第 4 章), 则我们有概周期函数的一类特殊情形, 即拟周期函数. 将拟周期函数恰当地写为形式

$$f(t) = \varphi(\omega_1 t, \cdots, \omega_m t),$$

其中 φ 对它的所有变量是有相同周期的周期函数. 如果 k 维微分方程系统

$$\dot{x} = X(x) \tag{7.3.1}$$

有拟周期解

$$x(t) \equiv \varphi(\omega_1 t, \cdots, \omega_m t),$$

则它也有解

$$x = \varphi(\omega_1 t + C_1, \cdots, \omega_m t + C_m),$$

其中 $C_1, \cdots, C_m$ 是任意常数. 这意味着相应的极小集 ($x(t)$ 的闭包) 是 m 维不变环面. Andronov 和 Vitt [15] 证明它的维数必须满足下面的条件

$$m \leqslant k - 1.$$

如果有限维系统有概周期解, 但不是拟周期解, 则系数 λ_n 是有限个频率基 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 与**有理因子**的线性组合. 这样的解称为**极限 – 拟周期解**. 对这种情形 Pontryagin [112] 证明极小集的维数 m 必须满足下面的不等式

$$m \leqslant k-2.$$

特别, 对三阶系统我们有 $m=1$, 即它的极限 – 拟周期解有形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{ir_n\omega t},$$

其中 r_n 是某有理数, 故 $f(t)$ 的 Fourier 级数的有限段

$$f(t)=\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{ir_n\omega t}$$

是某周期函数, 当 $N\to\infty$ 时它的周期趋于无穷.

极限 – 拟周期轨线的极小集的结构是分形. 换句话说, 它是由 m 维圆盘与零维 Cantor 集 $\mathbb{K}$ 的直积局部刻画的. 显然, 在极限 – 周期情形, 它有区间与 $\mathbb{K}$ 直积的形式.

为了使得在 $\mathbb{R}^3$ 中将极限 – 周期轨线的极小集的结构形象化, 构造一个称之为 Wietorius-van Danzig 螺线管的对象是有意义的.

这个几何构造的第一步如下. 考虑一个环体 $\Pi_1\in\mathbb{R}^3$, 其中 $\Pi_1=\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1$, $\mathbb{D}^2$ 为二维圆盘, $\mathbb{S}^1$ 为圆周. 我们在 Π_1 中嵌入一个类环体 Π_2, 使得它与 Π_1 中每一圆盘 $\{\varphi=\text{常数}\}$ 相交, 其中 $\varphi\in\mathbb{S}^1$ 为角变量, 在两个不相交的圆盘上使得 Π_2 沿着 $\mathbb{S}_1$ 作两次旋转而不自交, 如图 7.3.1 所示. 再假设 Π_2 是 Π_1 的大约两倍长四倍细. 在第二步, 我们用与上面相同的方法将环面 Π_3 嵌入 Π_2, 使得现在 Π_3 与每个圆盘 $\{\varphi=\text{常数}\}$ 有四个交, 每两个在前面的一对交之中.

重复这个过程, 我们得到的环体序列 Π_n 满足 $\Pi_{n+1}\subset\Pi_n$. 所求的螺线管定义为集合

$$\Sigma=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Pi_n.$$

这是一个闭集, 且 $\Sigma\bigcap\{\varphi=\text{常数}\}$ 是 Cantor 集. Wietorius 与 van Danzig 证明可以在 Σ 上定义流使得 Σ 变成概周期运动的极小集. 显然他们已经从定性观点使用了概周期概念.

定义 7.7 运动 $x(t)$ 称为是概周期的, 如果对任何 $\varepsilon>0$ 存在值 $L(\varepsilon)$ 和一个满足 $|\tau_{k+1}-\tau_k|<L(\varepsilon)$ 的可数数列 $\{\tau_{k(\varepsilon)}\}$, 使得

$$\operatorname{dist}(x(t),x(t+\tau_k))<\varepsilon,\quad -\infty<t<+\infty. \tag{7.3.2}$$

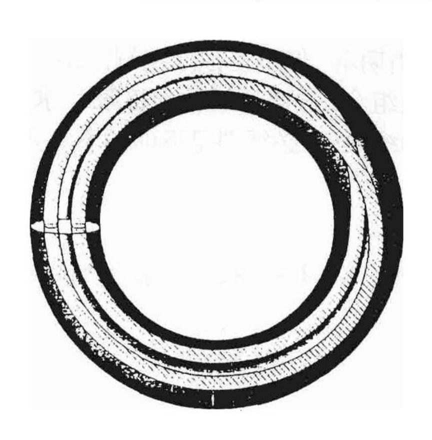


图 7.3.1 构造 Wietorius-van Danzig 螺线管的第二步

周期轨道是概周期运动最完美的特殊情形, 除了它的最小周期 τ 以外, τ 的任何倍数 $k\tau$ 也是它的周期, 其中 k 是整数. 集合 $\{\tau_k\}$ 对概周期轨线的作用几乎与周期对周期轨道的作用相同. 这就是我们要将数 $\tau_k(\varepsilon)$ 称为**概周期**的原因.

概周期轨线的闭包仅包含概周期轨线. 此外, 值 $L(\varepsilon)$ 和概周期仍保持一样.

上述观察给我们提出一个基本问题: 根据什么特征从回归轨线可区别出概周期轨线? 为了回答这个问题, 我们还必须引入下面的定义.

定义 7.8 称轨线具有 S – 性质, 如果对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任何 t_1 和 t_2 由

$$\mathrm{dist}(x(t_1, x_0), x(t_2, x_0)) < \delta,$$

得知

$$\mathrm{dist}(x(t + t_1, x_0), x(t + t_2, x_0)) < \varepsilon, \quad 对\ 0 \leqslant t < +\infty.$$

本质上, 上面的条件是 Lyapunov 意义下一致稳定性的一个隐含性质.

定理 7.5 (Franklin, Markov) 如果回归轨线具有 S – 性质, 则它是概周期的.

从这个定理得出一个结论, 那就是一条真实的回归轨线必须是不稳定的. 在某些紧流形上的动力系统的一些奇异例子, 被称为谐零流形, 那里所有的轨线都是回归的. 此外, 这些轨线都是不稳定的. 但是, 它们的不稳定性并非是指数式而是多项式型. 与概周期轨线的频率谱是离散的相反, 回归轨线的谱额外有一个连续分支. 详情见 [23].

7.4 关于高阶动力系统粗性的说明

许多振动机制必须由高阶动力系统模拟. 如同在低维情形, 这种系统的平衡态和周期轨道对应于驻定机制和周期振动, 特别是自激振动. 在第 4 章我们曾经接触过

用不变环面上的拟周期运动描述有关自调制和多频率机制的问题. 但在高阶动力系统中大量的各种各样的振动现象仅用上面的运动是不够的. 什么数学映象对应如此更加复杂的振动性态呢? 后者能否用动力系统的语言解释? 为了回答这些问题, 我们需要揭示非闭 Poisson 稳定轨线的作用. 同时还必须记住一点, 那就是一个可观察的过程的任何数学理想化必须对时间是稳定的且足够牢固, 足以抗衡动力系统的小光滑扰动.

在这方面, Andronov 和 Vitt 的下面问题值得关注: 什么样的 P 轨线在 Lyapunov 意义下稳定? 下面的定理回答了这个问题.

定理 7.6 (Markov) 如果 Poisson 稳定轨线在 Lyapunov 意义下是一致稳定, 则它是概周期的.

这个定理的证明在 [98] 有叙述. 本质上, 证明仅基于 S – 性质, 但还需要一致稳定性的额外性质.[2]

这个结果指出, 个别轨线不能充分反映混沌振动. 事实上, 前面我们也曾注意到, 在结构稳定系统中所有非闭 Poisson 稳定轨线都是不稳定的, 或者更确切地说, 是鞍点型.

如果 P 轨线在 Lyapunov 意义下不稳定, 那么它的拟极小集的每一条轨线也是不稳定的. 尽管如此, 总体上这个集合可以是吸引集, 这个情形可能是我们寻求的复杂振动过程的一个数学映象. 但是, 对非线性动力学中具有这种吸引子的必要性的清楚理解还是多年后直到 20 世纪 70 年代的事.

现在探讨我们考虑的几何对象在小光滑扰动下得到保持的性质. 平衡态和周期轨道仍很好理解. 但当结构稳定系统有非闭 P 轨线时会出现什么情况? 这样的系统有什么特征?

我们已经注意到 P 轨线 $\varphi(t, x_0)$ 是自极限轨线, 即它与它的初始点 x_0 任意接近. 直觉上显然可出现, 通过适当选择充分小的扰动, 扰动系统恰好有通过 x_0 的周期轨道. 如数学中经常发生的那样, 一个陈述简单的结论可能需要相当不平凡的证明[2)] 上述这个猜测被 Pugh 在 1968 年证明. 这个结果由下面的称之为**封闭性引理**的定理得知 [113].

定理 7.7 (Pugh 的封闭性引理) 设 x_0 是光滑流的非游荡点. 则在 $\mathbb{C}^1$ – 拓扑下存在任意接近的光滑流, 它有通过点 x_0 的周期轨道.[3][3)]

[2] 在 Lyapunov 意义下的一致稳定情形, 定义中包含的两个邻域的大小不依赖于初始点的选择, 即对轨线上的每一点它们是相同的, 见 Malkin [91].

[3] 这个定理的 $\mathbb{C}^r$ $(r \geqslant 2)$ 形式的正确性至今还不知道.

[2)] 例如, 平面上的 Jordan 闭曲线定理, 看似很明显, 但要用拓扑学知识严格证明它, 也得写上几页 —— 译者注.

[3)] 这也是 Smale 在 1998 年提的下一世纪 18 个数学问题的第 10 个问题. 就是上面定理的原来证明也花了很大功夫 — 译者注.

由于 P 轨线上的每一点都是非游荡点, 这个结果对在 Poisson 意义下的稳定点也成立. 由封闭性引理得知下面一个意义深远的推论: **具有 P 轨线的粗系统有无穷多个周期轨道**.

事实上, 由于原系统是粗的, 它拓扑等价于任何充分接近的系统. 由定理 7.7, 这意味着原系统有周期轨道通过充分接近于 x_0 的点 x_1 (应该注意, 越小的扰动得到的周期轨道的周期越长). 由相同的论述, 系统必须有另外的周期轨道通过更近的点 x_2 等等.

由此我们看到具有 Poisson 稳定的非闭轨线的原系统有无穷多个周期为 τ_k 的周期轨道 $\varphi(t, x_k)$, 其中 $\varphi(0, x_k) = x_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 使得 $k \to +\infty$ 时有 $x_k \to x_0$ 和 $\tau_k \to +\infty$.

注意, 在这个证明中我们实际上用了系统的粗性 (相应的结构稳定性), 即我们假设建立充分接近的系统的拓扑等价性的同胚接近于恒同映射. 但是, 没有这个假设结论仍成立, 只是证明变得更加复杂.

为了刻画具有 P 轨线的结构稳定系统, 下面的结果是很有用的.

定理 7.8 (Pugh) 对任何光滑流的任意逼近 (在 $\mathbb{C}^1$ - 意义下), 存在其周期轨道在非游荡集内处处稠密的流.[4]

因此, 如果结构稳定系统有吸引拟极小集 —— **奇怪吸引子**, 则周期轨道将在其中稠密.

对吸引极小集, 由 Pugh 定理得知它们是结构不稳定的. 虽然由回归轨道和极限拟周期轨道组成的极小集, 至今在非线性动力学中还未充当关键角色, 但我们对拟周期运动总是有很大兴趣, 因为它们可模拟许多具有离散谱的振动现象.

综合我们的考虑, 可以作出一个初步结论: 典型的动力系统可分成两个基本类型, 依赖于系统在它的相空间的有界子区域内有有限多个周期轨道, 还是有无穷多个周期轨道. 第一个情形的系统通常称为具有简单动力学的系统, 第二类由具有复杂动力学的系统组成. 粗性或结构稳定性概念容易应用到具有简单动力学的系统. 对具有复杂动力学的系统情况变得不确定得多.

这种不确定性在于, 具有复杂动力学的结构不稳定 (非粗) 系统可以在动力系统的空间内形成一个**开区域**. 此外, 必须强调, 结构稳定 (粗) 的奇怪吸引子, 不管是纯几何结构或代数结构, 迄今为止还从未在任何非线性动力学模型中观察到过. 因此, 看起来具有奇怪吸引子的典型系统正好落入结构不稳定性的区域内. 这些**结构不稳定的奇怪吸引子**在我们对混沌动力学的探究中显示着很大的成功. 对这种吸引子严格要求其粗性显得没有意义; 因为只有某些典型特性必须在小扰动下得到保持.

通常, 一个合理的高阶模型必须具有两类动力学 —— 简单的和复杂的. 当然, 分析这些模型的第一步是研究相空间被轨线划分的结构, 其中的参数区域对应于系

[4] 严格地讲, 在减去平衡态的非游荡集内.

统具有简单动力学. 在下一节我们将集中研究一类非常广泛的具有简单动力学的结构稳定系统, 称为 **Morse-Smale 系统**. 具有复杂动力学的系统需要特殊的关注, 那是其它进一步文献的内容.

7.5 Morse - Smale 系统

用公理法引入 Morse - Smale 系统. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的动力系统

$$\dot{x} = X(x), \tag{7.5.1}$$

其中 $X(x) \in \mathbb{C}^r$ $(r \geqslant 1)$.

设 G 是 (7.5.1) 的相空间中的某个有界闭区域. 以 Ω 记系统 (7.5.1) 在 G 中的非游荡轨线集. 我们将假设 $\partial G \bigcap \Omega = \varnothing$, 其中 ∂G 为 G 的边界.

定义 7.9 在区域 G 内的系统 (7.5.1) 称为 Morse-Smale 系统, 如果它满足下面两条公理:

公理 1 非游荡集 Ω 由有限个轨道组成.

公理 2 G 内所有周期轨道与平衡态为结构稳定, 且它们的稳定和不稳定不变流形横截相交.

事实上, 可以证明, 平衡态和周期轨道是 Morse-Smale 系统仅有的非游荡轨线. 鉴于 Birkhoff 定理 7.2, 公理 1 排除了非闭自极限 (P 稳定) 轨线的存在性. 由下面的定理 7.9 和定理 7.11 又阻止了同宿轨道的存在性. 接下来, 由定理 7.12 不难得知 Morse-Smale 系统的任何轨线的 ω - 极限 (α - 极限) 集是平衡态或周期轨道.

回忆平衡态 $O\,(x = x_0)$ 称为结构稳定的, 如果它的特征指数, 即特征方程

$$\det\left|\frac{\partial X(x_0)}{\partial x} - \lambda I\right| = 0 \tag{7.5.2}$$

的根没有一个位于虚轴上.

对每个平衡态我们赋予一个拓扑型 (m,p), 其中 m 是位于左半开平面的特征指数的个数, p 是位于右半开平面的特征指数的个数. 因此 $m + p = n$. 如果 $m = n$ $(m = 0)$, 平衡态是稳定的 (完全不稳定的). 当 $m \neq \{0, n\}$ 时平衡态是鞍点型.

相空间中所有使其轨线当 $t \to +\infty$ $(-\infty)$ 时都收敛于 x_0 的点集称为平衡态的稳定 (不稳定) 流形, 分别记为 W^s_O 和 W^u_O. 如果 O 是 (m,p) 型, 则 W^s_O 是 m 维 $\mathbb{C}^r$ - 光滑流形, W^u_O 是 p 维 $\mathbb{C}^r$ - 流形. 在 $m = n$ 的情形, O 的吸引盆是 W^s_O.

我们也知道 W^s_O 微分同胚于 $\mathbb{R}^m$, W^u_O 微分同胚于 $\mathbb{R}^p$. 在适当的坐标框架下鞍点平衡态附近的系统可写为

$$\dot{\xi} = A^- \xi + f(\xi, \eta),$$
$$\dot{\eta} = A^+ \eta + g(\xi, \eta),$$

其中 A^- 是 $m\times m$ 矩阵, 它的谱位于虚轴的左边, A^+ 是 $p\times p$ 矩阵, 它的谱位于虚轴的右边, 函数 f 和 g 以及它们的一阶导数在平衡态 O 为零. 在这个坐标系下 $W^s_{\text{loc}}(O)$ 的方程是

$$\eta=\varphi(\xi),$$

$W^u_{\text{loc}}(O)$ 的方程是

$$\xi=\psi(\eta),$$

其中 φ 和 ψ 是 $\mathbb{C}^r$ – 光滑函数, 且满足 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=0$ 和 $\psi(0)=0,\psi'(0)=0$.

接下来我们假设系统 (7.5.1) 有周期为 τ 的周期轨线 $L: x=\vartheta(t)$. 周期轨道 L 为结构稳定, 如果它的 $(n-1)$ 个乘子没有一个在单位圆上. 回忆 L 的乘子是 Poincaré 映射在其不动点的线性化 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵 A 的特征值, 不动点是 L 与截面的交点. 轨道 L 为稳定 (完全不稳定), 如果它所有的乘子位于单位圆内 (外). 这里周期轨道的稳定性既可以理解为在 Lyapunov 意义下稳定, 也可理解为指数型轨道稳定. 当一些乘子在单位圆内, 其它的乘子在单位圆外时, 周期轨道是鞍点型.

相空间中所有使其轨线当 $t\to+\infty\,(-\infty)$ 时都收敛于 L 的点集称为周期轨道的稳定 (不稳定) 流形. 它们分别记为 W^s_L 和 W^u_L. 当 $m=n$ 时 L 的吸引盆是 W^s_L. 在鞍点情形, W^s_L 是 $(m+1)$ 维的, 其中 m 是在单位圆内的乘子个数, W^u_L 是 $(p+1)$ 维的, 其中 p 是单位圆外的乘子个数, $p=n-m-1$. 在三维情形, 如果乘子为正, W^s_L 和 W^u_L 或者同胚于二维柱面, 如果乘子为负, 同胚于 Möbius 带, 如图 7.5.1 所示. 在一般情形, 它们或者是微分同胚于 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{S}^1$ 的高维柱面, 或者微分同胚于 Möbius 流形.

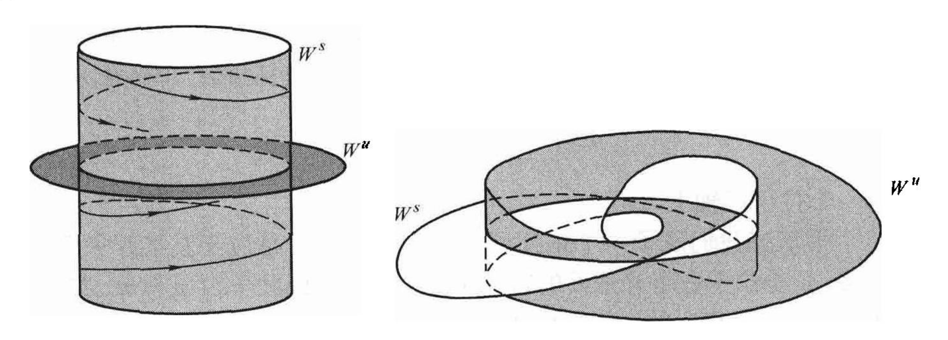


图 7.5.1 $\mathbb{R}^3$ 中的鞍点周期轨道由其稳定和不稳定不变流形的拓扑所区别, 它们可以同胚于柱面 (左) 或者 Möbius 带 (右).

平衡态和周期轨道的稳定不变流形可以与不稳定流形有公共点. 显然, 如果点 x_0 是这两个不变流形的公共点, 则轨线 $x=\varphi(t,x_0)$ 属于这两个流形. 在最简单的情形, $O=W^s_O\bigcap W^u_O$, 即平衡态的稳定和不稳定流形相交于单个轨线, 即平衡态自己.

类似地, 对周期轨道 L, 我们可有 $L=W^s_L\bigcap W^u_L$. 但是这是一个平凡的情形, 我们对它不感兴趣. 有意义的是 x_0 既不是平衡态也不在周期轨道上的情形. 下面我们

将平衡态和周期轨道看作为类似对象考虑, 并记为 Q.

设 Q_1 和 Q_2 使得 $W^s_{Q_1}$ 和 $W^u_{Q_2}$ 有公共点 x_0. 如果 Q_1 和 Q_2不同,[5] 这种点 x_0 的轨线称为**异宿轨线**, 如果 $Q_1 = Q_2$, 称它为**同宿轨线**.

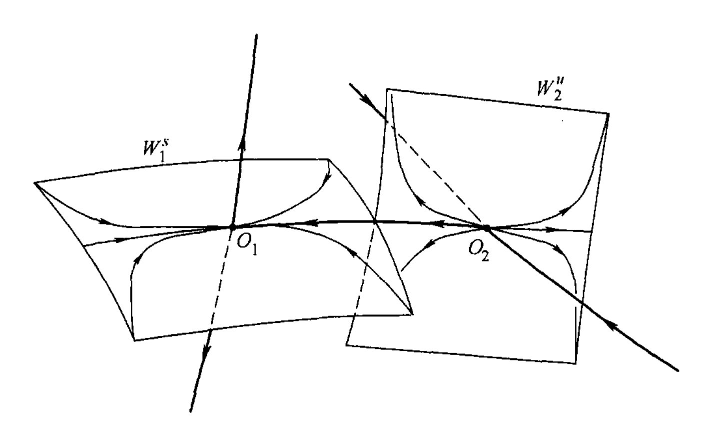


图 7.5.2 $\mathbb{R}^3$ 中两个鞍点之间的结构稳定的异宿连接.

我们分别以 $T_{x_0}W^s_{Q_1}$ 和 $T_{x_0}W^u_{Q_2}$ 记 $W^s_{Q_1}$ 与 $W^u_{Q_2}$ 在点 x_0 的切空间.

定义 7.10 我们说 $T_{x_0}W^s_{Q_1}$ 和 $T_{x_0}W^u_{Q_2}$ 横截相交,如果

$$\dim T_{x_0}W^s_{Q_1} + \dim T_{x_0}W^u_{Q_2} - n = \dim(T_{x_0}W^s_{Q_1} \bigcap T_{x_0}W^u_{Q_2}). \tag{7.5.3}$$

大家知道, 如果两个曲面在某点横截相交, 则任何两个与它们 $\mathbb{C}^1$ – 接近的曲面在附近的点也必须横截相交. 相反, 非横截相交的曲面可用小扰动使它们分离开 (或者使得它们横截相交).

由公理 2, 在系统 (7.5.1) 的平衡态和周期轨道的稳定和不稳定不变流形的所有交点上, 横截性条件 (7.5.3) 成立.

我们注意, 虽然横截性的定义是对点 x_0 叙述的, 但横截性条件 (7.5.3) 对 x_0 的选择并无要求, 因为对应于在点 x_0 以及通过 x_0 的轨线上任何其它点的切空间, 可以通过非退化的线性变换 (沿着 x_0 的轨线的时间 – 移位映射的线性化) 彼此映到对方.

由于交点 x_0 的轨道整个位于两个不变流形中，故 $T_{x_0}W^s_{Q_1}$ 和 $T_{x_0}W^u_{Q_2}$ 两者都

---

[5] 考虑例子

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\mu + x^2,\\ \dot{y} &= -y,\\ \dot{z} &= z,\end{aligned}$$

对 $\mu > 0$ 它有两个分别是 (2,1) 和 (1,2) 型的鞍点平衡态 $O_1(-\sqrt{\mu}, 0, 0)$ 和 $O_2(+\sqrt{\mu}, 0, 0)$. 不变流形 $W^s_{O_1}$ 和 $W^u_{O_2}$ 沿着异宿曲线 $(-\sqrt{\mu} < x < \sqrt{\mu}, y = 0, z = 0)$ 横截相交, 如图 7.5.2 所示.

包含在点 x_0 处的相速度向量，因此有

$$\dim(T_{x_0}W^s_{Q_1}\bigcap T_{x_0}W^u_{Q_2})\geqslant 1.$$

因此, 由横截性条件 (7.5.3) 得知, 在 Morse-Smale 流上仅当下面条件满足时不变流形才可能横截相交.

$$\dim W^s_{Q_1}+\dim W^u_{Q_2}\geqslant n+1. \tag{7.5.4}$$

特别地, 我们得到下面的简单结果:

定理 7.9　Morse-Smale 系统没有同宿于平衡态的同宿轨线.

证明　对平衡态, 我们有 $\dim W^s_O+\dim W^u_O=n$, 这与 (7.5.4) 矛盾.

Morse-Smale 微分同胚概念可用类似方法引入. 考虑微分同胚

$$\bar{x}=X(x), \tag{7.5.5}$$

其中在某有界闭子区域 $G\subset\mathbb{R}^n$ 内 $X(x)\in\mathbb{C}^r\,(r\geqslant 1)$. 假设它的非游荡集与边界 ∂G 没有交点.

定义 7.11　区域 G 中的微分同胚 (7.5.5) 称为 Morse-Smale 微分同胚, 如果

(1) 它的非游荡集为有限集 (仅由结构稳定的周期点组成), 以及

(2) 对每个周期点的稳定和不稳定流形的交, 横截性条件 (7.5.3) 满足.

回忆不动点 $O\,(x=x_0)$ 称为结构稳定, 如果它的特征乘子, 即特征方程 (7.5.2) 的根没有一个在单位圆上. 对它可赋予拓扑型 (m,p), 其中 m 是位于单位圆内根的个数, p 是在单位圆外根的个数. 如果 $m=n\,(m=0)$, 不动点稳定 (完全不稳定). 当 $m\neq\{0,n\}$ 时不动点是鞍点型. 在正 (负) 迭代下, 所有使其轨线收敛于点 x_0 的点集称为不动点x_0 的稳定 (不稳定) 流形, 并记为 $W^s_O\,(W^u_O)$. 在 $m=n$ 的情形, O 的吸引盆是 W^s_O. 如果不动点是鞍点, 则 W^s_O 和 W^u_O 分别是 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^p$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\mathbb{C}^r$ - 光滑嵌入.

在鞍点情形, 微分同胚可局部地表示为形式

$$\bar{\xi}=A^-\xi+f(\xi,\eta),$$
$$\bar{\eta}=A^+\eta+g(\xi,\eta),$$

其中 A^- 的特征值位于单位圆内，而 A^+ 的特征值位于单位圆外, 函数 f 和 g 以及它们的一阶导数在点 O 均为零. 于是 $W^s_{\rm loc}(O)$ 的方程为

$$\eta=\varphi(\xi),$$

而 $W^u_{\rm loc}(O)$ 的方程是

$$\xi=\psi(\eta),$$

其中 φ 和 ψ 是满足 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$ 和 $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=0$ 的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑函数.

设 x_0 是微分同胚 (7.5.5) 的周期为 q 的周期点. 这意味着它是这个微分同胚的 q 次幂的不动点:

$$x_0 = X^{[q]}(x_0) \equiv \underbrace{X(X\cdots(X}_{q次}(x_0))).$$

这看上去自然要将点 x_0 和它的环 $C=(x_0,x_1,\cdots,x_{q-1})$ 联系起来, 其中 $x_k = X(x_{k-1})$, $k=1,\cdots,q-1$, $x_0=X(x_{q-1})$. 点 x_0 是结构稳定的, 如果方程

$$\det\left|\frac{\partial X(x_{q-1})}{\partial x}\frac{\partial X(x_{q-2})}{\partial x}\cdots\frac{\partial X(x_0)}{\partial x}-\rho I\right|=0$$

的根 $\rho_1,\cdots,\rho_n$ 没有一个在单位圆上. 注意, 环 C 上任何点的特征根与点 x_0 的特征根相同. 点 x_k 的稳定 (不稳定) 不变流形 $W^s_{x_k}$ ($W^u_{x_k}$) 是在微分同胚 $X^{[q]}$ 的正迭代下趋于 x_k 的点集. 显然 $X(W^s_{x_k})=W^s_{x_{k+1}}$, $X(W^u_{x_k})=W^u_{x_{k+1}}$. 因此, 环 C 的稳定流形是 $\bigcup_{i=0}^{q-1}W^s_{x_i}$, 不稳定流形是 $\bigcup_{i=0}^{q-1}W^u_{x_i}$.

在紧光滑流形上的连续的和离散的 Morse-Smale 系统, 都在 Smale 的论文 "动力系统的 Morse 不等式" [142] 中被选用. 标题本身显示该文研究用流形的拓扑不变量来估计平衡态和周期轨道的个数. 稍后, Palis 和 Smale [106,102] 证明了下面的定理.

定理 7.10 (Palis 和 Smale) Morse-Smale 系统是结构稳定的.

这个定理的证明是对相空间是紧光滑流形的系统作出的. 它对我们的情形也成立, 只要假设边界 ∂G 在连续情形是 $(n-1)$ 维光滑无切球面, 通过它的轨线进入 G, 或者在离散情形满足 $X(G)\subset G\backslash\partial G$.

7.6 Morse-Smale 系统的一些性质

比较 Andronov-Pontryagin 定理与 Morse-Smale 系统的定义可以看出, 后者跟平面上的粗系统十分相似, 本质上可看成是平面情形在高维情形的推广. 如同 Andronov-Pontryagin 定理, Palis-Smale 定理 7.10 给出粗性的充分条件. 定义 7.9 中的公理 2 自然可看作为必要条件. 反之, 公理 1 与结构稳定性问题没有什么关系, 但它非常严格地限制了我们所考虑的一类系统, 并排斥了在维数高于 2 的系统中鞍点平衡态和周期轨道可显示的许多隐藏机会.

例如, 下面的定理证明 Morse-Smale 系统不可能有鞍点周期轨道的同宿轨线.

定理 7.11 设 L 是鞍点周期轨道, 设 Γ 是它的同宿轨线, 沿着它 W^s_L 和 W^u_L 横截相交. 则在 $L\bigcup\Gamma$ 的任何小邻域内包含有无穷多个鞍点周期轨线.

证明 取 L 的小截面 S, 并考虑局部 Poincaré 映射 $T_0: S\to S$. 点 $O=S\bigcap L$ 是 T_0 的鞍点不动点. 我们在 S 上 O 附近引入坐标 (x,y) 使得 O 的局部不稳定流形是

$x=0$, 局部稳定流形是 $y=0$ (因此, $x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^p$, 其中$\dim W^s=m, \dim W^u=p$). 设 $M^-(0,y^-)\in W^u_{\rm loc}$, $M^+(x^+,0)\in W^s_{\rm loc}$ 是同宿轨道 Γ 与 S 的两个交点. M^- 和 M^+ 之间的 Γ 段附近的流在 S 上定义了从 M^- 的小邻域 Π^- 到 M^+ 的小邻域 Π^+ 上的映射 T_1. 这个映射可写为

$$\begin{aligned}\bar{x}^0-x^+&=ax^1+b(y^1-y^-)+\cdots,\\ \bar{y}^0&=cx^1+d(y^1-y^-)+\cdots,\end{aligned}\tag{7.6.1}$$

其中省略号表示非线性项; (x^0,y^0) 位于 M^+ 的小邻域内, (x^1,y^1) 位于 M^- 的小邻域内. 注意, 像 $T_1W^u_{\rm loc}$ 在 M^+ 与由参数方程

$$x^0-x^+=bu,\quad y^0=du$$

定义的 p 维平面相切, 其中 $u\in\mathbb{R}^p$. 由假设此超平面必须与 $y=0$ 横截, 这意味着

$$|d|\neq 0.\tag{7.6.2}$$

在 3.7 节已经证明对任何充分大的 k, 在 Π^+ 中存在点使得它在局部映射 T_0 的 k 次迭代下位于 Π^- 中. 这种点集是 "水平长条" σ^0_k. 当 $k\to\infty$ 时, 水平长条凝聚在 $W^s_{\rm loc}\bigcap\Pi^+$. 映射 T_0^k 使长条在 x 方向压缩, 在 y 方向伸长, 故像 $T_0^k\sigma^0_k$ ("铅直长条" σ^1_k) 凝聚在 $W^u_{\rm loc}\bigcap\Pi^-$. 几何上显然 (见图 7.6.1), 由于 $T_1W^u_{\rm loc}$ 横截于 $W^s_{\rm loc}$, 对任何充分大的 k, 像 $T_1T_0^k\sigma^0_k$ "正常地" 与 σ^0_k 相交, 故 $T_1T_0^k|_{\sigma^0_k}$ 是在 3.15 节意义下的**鞍点映射**. 由定理 3.28, 鞍点映射有鞍点不动点. 由于两个映射 T_1 和 T_0 都是由流的轨道定义, $T_1T_0^k$ 的不动点对应于系统的周期轨道 (它与 S 恰好相交 k 次, 第一次在 Π^+ 上, 最后一次在 Π^- 上). 取不同的 k 得到不同的周期轨道. 因此, 为了证明定理我们必须通过计算确认, 对所有充分大的 k, 映射 $T_1T_0^k$ 是鞍点型.

由引理 3.3 和引理 3.4, 存在 $t\to\infty$ 时连同它们的导数都一致趋于零的函数 ξ_k,η_k, 使得点 $M^0(x^0,y^0)$ 被 T_0^k 映为点 $M^1(x^1,y^1)$, 当且仅当

$$\begin{aligned}x^1&=\xi_k(x^0,y^1),\\ y^0&=\eta_k(x^0,y^1).\end{aligned}\tag{7.6.3}$$

注意由于 (7.6.2), 对充分小的 x^1 和 $\bar{y}^0$ 由 (7.6.1) 中的第二个方程可解出 y^1:

$$y^1-y^-=d^{-1}\bar{y}^0-d^{-1}cx^1+\cdots,$$

其中省略号表示小的非线性项. 与 (7.6.3) 的第一个方程比较, 得知对充分大的 k, 有

$$y^1=y^-+F_k(\bar{y}^0,x^0),\tag{7.6.4}$$

其中 F_k 是光滑函数, 使得 $F_k(0,0)=0$, F_k 关于 x^0 的导数当 $k\to\infty$ 时一致趋于零 (我们用了 $k\to\infty$ 时 $\dfrac{\partial\xi_k}{\partial(x,y)}\to 0$).

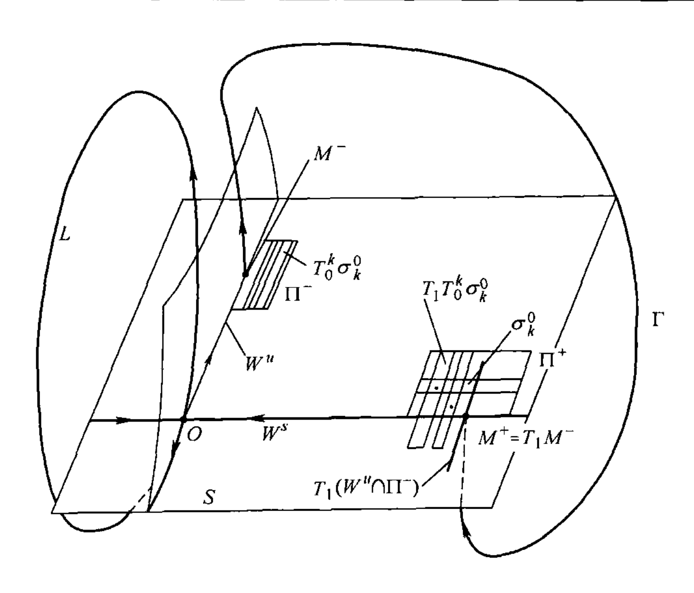


图 7.6.1 横截同宿轨道附近的 Poincaré 映射.

现在, 对所有充分大的 k, 映射 $T_1T_0^k$ 可写为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x^+ + G_k(\bar{y}, x),\\ y &= \eta_k(x, y^- + F_k(\bar{y}, x)),\end{aligned} \tag{7.6.5}$$

其中我们省略了上标 0. 这里 G 表示满足 $G_k(0,0)=0$ 的光滑函数, 且 G_k 关于 x 的导数当 $k\to\infty$ 时一致趋于零. 这是映射 $T_1T_0^k$ 在 3.15 节意义下的**交叉形式** (定义 3.6 中的空间 D_1 和 D_2 分别是 x – 空间中 x^+ 的小凸邻域和 y – 空间中零的小凸邻域). 由于 η_k 关于所有变量的导数以及 G_k 关于 x 的导数当 $k\to\infty$ 时一致趋于零, 容易看出对所有充分大的 k, 映射 $T_1T_0^k$ 符合鞍点映射的定义 3.7, [6]故关于不动点的定理 3.28 在这里可应用. 定理证明完毕.

上述证明可容易地翻译成具有横截同宿轨线的不动点的微分同胚的语言. 它也包括具有同宿轨线的周期点情形. 对后一情形应该考虑原来微分同胚的 q 次迭代, 其中 q 是周期.

上述证明本质上接近于 L.Shilnikov [131] 建议的证明重复. 但它却能使我们从没

[6] 需验证的条件是

$$\|P'_x\|_\circ < 1, \quad \|Q'_y\|_\circ < 1,$$
$$\|P'_y\|_\circ\|Q'_x\|_\circ < (1-\|P'_x\|_\circ)(1-\|Q'_y\|_\circ),$$

其中 (P,Q) 是交叉映射

$$\bar{x} = P(x,\bar{y}), \quad y = Q(x,\bar{y})$$

的右端. 本质上, 这意味着交叉映射在适当的范数下是压缩的, 故映射本身沿着 y – 方向强伸长, 沿着 x – 方向强压缩.

有同宿轨线的 Morse-Smale 系统的公理约束中解脱出来, 而这正是 Smale 原来所期望的.

注意, 横截同宿轨道显然在系统的小光滑扰动下得到保持. 因此, 由定理 7.11 得知当存在横截同宿轨线时, 任何邻近的系统都远离 Morse-Smale 类. 这给我们探究复杂动力学提供了一个强而简单的方法. 至今, 存在横截同宿轨线被视为通用的混沌准则.

如前, 我们将平衡态和周期轨道视为同一对象, 并统一将它们记为 Q.

引入下面的记号: 如果 $W^s_{Q_i} \bigcap W^u_{Q_j} \neq \varnothing$, 就记 $Q_i \leqslant Q_j$, 特别, $Q_i \leqslant Q_i$. 如果 $(W^s_{Q_i} \backslash Q_i) \bigcap (W^u_{Q_j} \backslash Q_j) \neq \varnothing$, 则记为 $Q_i < Q_j$. 我们说 $Q_{k_1}, \cdots, Q_{k_l}$ 组成一个**链**, 如果

$$Q_{k_1} < \cdots < Q_{k_l}. \tag{7.6.6}$$

如果链中的第一个和最后一个成员相等 $(Q_{k_1} = Q_{k_l})$, 则链 (7.6.6) 称为**环**.

可以证明关系 "$\leqslant$" 在 Morse-Smale 系统的非游荡轨道集上定义了一个偏序. 一个重要的结果是:

定理 7.12 Morse-Smale 系统中不存在环.

首先注意到, 不存在如 $Q_0 < Q_0$ 的环, 因为在 Morse-Smale 系统中不允许有同宿轨线. 其次, 由横截性条件 [见 (7.5.4)], 环不可能包含平衡态, 也不可能包含不同拓扑类型的周期轨道.

因此, 只余下一个假设, 就是环

$$L_0 < L_1 < \cdots < L_k < L_0$$

是由同一拓扑类型的周期轨道组成. 考虑链

$$L_{k-1} < L_k < L_0,$$

并设 $W^s_{L_{k-1}}$ 与 $W^u_{L_k}$ 相交于点 x_0. 由 λ - 引理 (见 3.7 节), 我们可以断言, 由于 $W^s_{L_k}$ 与 $W^u_{L_0}$ 横截相交, 在 x_0 的任何小邻域 U 内, 存在收敛于 $W^u_{L_k} \bigcap U$ 的 $W^u_{L_0}$ 的光滑片的可数集. 由于 $W^s_{L_{k-1}}$ 与 $W^u_{L_k}$ 横截相交, 得知 $W^s_{L_{k-1}}$ 与 $W^u_{L_0}$ 的这些片相交. 因此

$$L_{k-1} < L_0.$$

递归地, 我们得到

$$L_0 < L_1 < L_0,$$

因此有

$$L_0 < L_0,$$

即 L_0 有同宿轨线. 这与定理 7.11 矛盾.

由在 Morse-Smale 系统中存在有限个非游荡轨线的事实得知, 任何链具有有限长度, 且其长度不超过非游荡轨线的总个数. 此外, 极大链只能在稳定平衡态或周期轨道上终止.

由上面的讨论得知, 对每一个 Morse-Smale 系统我们可以引入一个定向图. 它的顶点是赋予拓扑类型的平衡态和周期轨道. 图的边按序 $<$ 以递减方式定向. 就是说, 顶点 Q_i 与 Q_j 用边相连, 当且仅当 $Q_i > Q_j$, 且没有 Q_k 满足 $Q_i > Q_k > Q_j$. 这样的分级图称为**相图**. 对 Morse-Smale 微分同胚可用类似方法引入相图. 顶点是赋予局部特征的不动点和环.

显然相图是 Morse-Smale 系统拓扑等价性的不变量.

但是, 一般来说, 这不是完全不变量. 例如, 它并不包含鞍点轨线的稳定和不稳定流形相交轨道个数的信息.

在所有异宿轨线中可以选出某些起主要作用的**特殊**轨线.

定义 7.12 异宿轨线 Γ 称为特殊的, 如果存在它的闭包 $\bar{\Gamma}$ 的邻域 U, 其中除了 Γ 以外不包含其它异宿轨线.

显然三维 Morse-Smale 流的所有异宿轨线都是特殊的. 这对二维微分同胚也成立.

Morse-Smale 系统从 Andronov-Pontryagin 系统区别出来的主要特征是, 前者可以有无穷多条特殊异宿轨线. 作为例子, 考虑二维微分同胚, 它有三个鞍点型不动点 O_1, O 和 O_2. 假设 $W^s_{O_1} \cap W^u_O \neq \varnothing$ 且 $W^s_O \cap W^u_{O_2} \neq \varnothing$, 对应的略图如图 7.6.2 所示. 其中 $M_1 \in W^s_{O_1} \cap W^u_O$ 且 $M_2 \in W^s_O \cap W^u_{O_2}$, 即它们是异宿点.

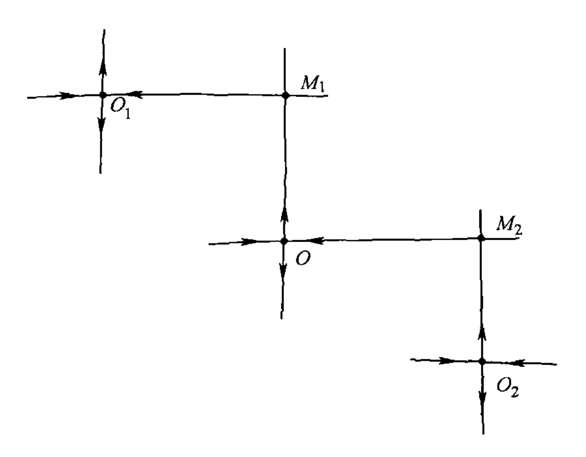


图 7.6.2 在异宿点 M_1 和 M_2, 不动点的流形分级相交.

现在我们利用 λ - 引理 (见 3.7 节). 选择点 M_1 的小邻域 U. 可知交 $U \cap W^u_{O_2}$ 是由可数多条光滑凝聚到 W^u_O 的曲线 l_k $(k = 1, \cdots, \infty)$ 所组成, 如图 7.6.3 所示. 由于 $W^s_{O_1}$ 和 W^u_O 彼此横截相交, 故 $W^s_{O_1}$ 与每一条 l_k 相交于从某个数 k_0 开始的点

M_k. 点 M_k 也是异宿点, 且对应于不同的异宿轨线, 它们分别以 O_1 和 O_2 为 $\alpha-$ 极限点和 $\omega-$ 极限点.

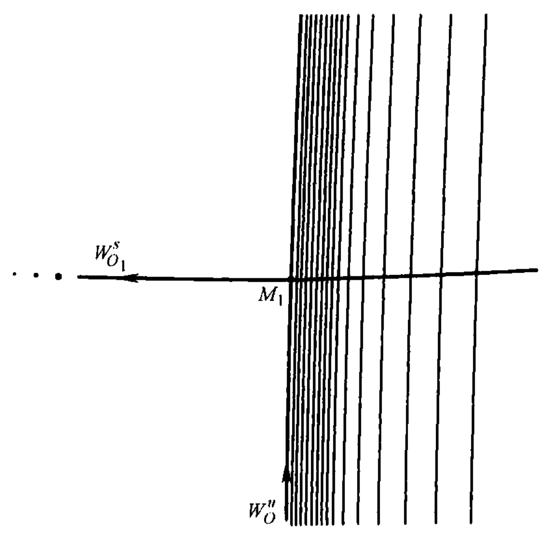


图 7.6.3 点 M_1 的邻域: $W^u_{O_2}$ 的逐次像凝聚在图 7.6.1 中的 W^u_O.

类似的图像出现在具有链 $Q_1 < Q < Q_2$ 的三维流的情形, 其中 Q 表示鞍点周期轨道, Q_1 和 Q_2 表示鞍点平衡态或周期轨道.

异宿轨线在高维情形不再都是特殊轨线. 异宿轨线 $\Gamma \subset W^s_{Q_1} \bigcap W^u_{Q_2}$ 是特殊的, 仅当这个交集的维数等于 1. 我们对 Γ 指定一个型数 $(\dim W^s_{Q_1}, \dim W^u_{Q_2})$. 显然, 如果 $\dim W^s_{Q_1} = m+1$, 则特殊轨线 Γ 是 $(m+1, n-m)$ 型, 其中 n 是相空间的维数.

考虑具有两个非游荡运动 Q_1 和 Q_2 的 Morse-Smale 流. 设 $\dim W^s_{Q_1} = m+1$ 和 $\dim W^u_{Q_2} = n-m$. 又假设 $W^s_{Q_1} \bigcap W^u_{Q_2} \neq \varnothing$, 即 $Q_1 \leqslant Q_2$.

定理 7.13 (Afraimovich 和 Shilnikov [2]) 交 $W^s_{Q_1} \bigcap W^u_{Q_2}$ 具有无穷多条异宿轨线, 当且仅当闭包 $\overline{W^s_{Q_1} \bigcap W^u_{Q_2}}$ 包含有异于 Q_1 和 Q_2 的型数为 $(m+1, n-m)$ 的周期轨道 L .

由这条定理的证明得知, W^u_L 必须与 $W^s_{Q_1}$ 横截相交, W^s_L 必须与 $W^u_{Q_2}$ 横截相交. 我们也注意到 $W^s_{Q_1} \bigcap W^u_{Q_2}$ 中的所有轨线都是特殊的.

类似的论述对 Morse-Smale 微分同胚也成立.

我们用 N_{m+1} 记型数为 $(m+1, n-m)$ 的所有特殊轨线和它们的极限非游荡运动构成的集合. 在一般情形, N_{m+1} 是由有限个连通分支 $N^{(1)}_{m+1}, \cdots, N^{(k)}_{m+1}$ 组成. 在 [2] 中也已证明, 所有轨线 $N^{(l)}_{m+1}$, $1 \leqslant l \leqslant k$ 的集合与某个具有有限个状态的某个符号动力系统的所有轨线集合一一对应. 一般来说, 历史上符号动力学与具复杂动力学的系统的描述建立了联系. 不管怎样, 我们已经可有效地将它应用到具有可数多个特殊异宿轨线的 Morse-Smale 系统中去.

第 8 章　动力系统的分支

动力系统的**分支**理解为轨线对相空间分划的定性改变, 即当系统的参数变化时相图的定性性质的改变. “分支” 概念是 Poincaré 在研究旋转流体的平衡态结构由椭球体形状向接近于梨形状变化时引入的. 那时 Poincaré 研究的是由 Lagrange 方程描述的一个自由度的保守系统的平衡态主要分支. 他注意到参数变化时会引起出现平衡态的重合, 然后分裂为两个平衡态: 中心和鞍点. 因此 “分支” 这个名词在这种情形下确切地意味着分枝.

动力系统分支的近代理论直接与系统的非粗性或结构不稳定性概念相联系. 主要启发是, 如果我们仅限于考虑系统的结构稳定性区域, 则系统的分析相当不完全. 事实上, 当改变参数在参数空间穿过对应非粗系统的某些边界时, 我们可从一个结构稳定系统到另一个定性完全不同的系统.

在二维情形, 粗系统在所有平面系统的空间内组成一个开稠密集. 非粗系统在这个空间内填满结构稳定的不同区域之间的边界. 这个漂亮的结构允许我们用二维系统的分支理论来数学描述不同振动机制的转换. 即使高维系统空间没有这么好的结构, 高维系统的分支理论仍对非线性动力学一些典型现象作出了有效的数学解释, 这些现象诸如驻定机制和自激振动之间的转换, 同步化和它的消失, 通往混沌动力学的各种途径, 等等.

在本书中, 我们集中深入地研究平衡点与周期运动, 因为它们是非线性动力学中的基本 “砖块”. 为了完全地涵盖二维系统, 建议读者参考由 Andronov 和其它人所写的两部书 [11,12]. 那里由 Andronov 和 Leontovich 创立的周期轨道的主要分支的分类, 是建立在他们的一阶非粗二维系统理论的基础上.

8.1 一阶非粗系统

我们已经确定了平面上任何一个结构稳定动力系统的下面几个关键元素, 它们完全确定了它的整个拓扑不变量 —— 概形. 其中包含下面的特殊轨线:

- 结构稳定平衡态,
- 结构稳定周期轨道, 以及
- 鞍点分界线.

当系统变成结构不稳定时系统相图的任何变化都可能出现. 由 Andronov-Pontryagin 定理, 这样的系统必须具有:

- 具有一个或一对特征指数在虚轴上的平衡态, 或
- 具有单位乘子的周期轨道, 或
- 连接两个鞍点的分界线, 或
- 鞍点的分界线回路.

我们注意, 平衡态或者周期轨道可能是任意退化的. 因此从逻辑上我们得从最简单的结构不稳定系统开始研究, 这种系统 Andronov 和 Leontovich 称为**一阶非粗系统**.

设 X 和 $\tilde{X}$ 是平面上有界区域 G 内的某 $\mathbb{C}^r$ $(r \geqslant 3)$ – 光滑系统. 在 X 和 $\tilde{X}$ 之间引入距离作为 $\mathbb{C}^r$ – 度量.

定义 8.1 系统 X 称为是一阶非粗系统, 如果它是结构不稳定, 且若对任何 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 使得 X 的 δ 邻域内的任何结构不稳定系统都 ε – 等价[1] 于它.

本质上, 一阶非粗系统在结构不稳定系统的集合内是结构稳定的.

由 Andronov 和 Leontovich 采取的分析, 他们提出一阶非粗系统必须有下面的非粗轨线之一.

(1) 平衡态 $O(0,0)$, 它有一个零特征指数, 以及称为 Lyapunov 量或 Lyapunov 系数的 Taylor 级数的非零系数 l_2. Lyapunov 量容易从相应的规范形方程

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x,y),\\ \dot{y} &= \lambda y + Q(x,y)\end{aligned} \tag{8.1.1}$$

计算得到, 其中 $\lambda \neq 0$, P 和 Q 连同它们的一阶导数在 $O(0,0)$ 等于零. 这时 l_2 是 $P(x,y)$ 的 Taylor 展开中 x^2 的系数. 所考虑的平衡态称为 **(简单) 鞍 – 结点**. 注意, 所有的简单鞍 – 结点都等价于系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l_2 x^2,\\ \dot{y} &= \lambda y\end{aligned} \tag{8.1.2}$$

[1] 即拓扑等价, 共轭的同胚 ε – 接近于恒同映射.

的鞍 - 结点, 其中 $l_2 > 0$. 在 $O(0,0)$ 附近的这个系统的轨线性态容易描述. 例如, 设 $\lambda < 0$. 则存在曲线 —— 强稳定流形 W^{ss}, 它将结点区域 W^s 从鞍点区域中分开, 如图 8.1.1 所示. 强稳定流形是由 O 和两条 $t \to +\infty$ 时进入 O 的轨线组成. W^s 中的轨线收敛于 O. 在鞍点区域, 存在当 $t \to -\infty$ 时进入鞍 - 结点的单个轨线. 这条轨线称为**分界线**. 其它轨线都离开 O.

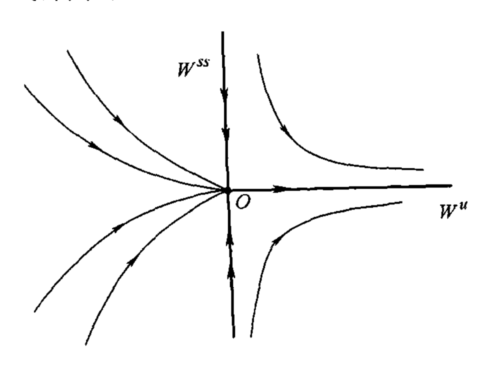


图 8.1.1 对应于情形 $\lambda < 0, l_2 > 0$ 的鞍 - 结点.

如果 $\lambda > 0$, 则存在强不稳定流形 W^{uu}, 它将 O 的邻域划分成结点区域 W^u (那里所有的轨线都从 O 发散) 以及鞍点区域 (那里有单条当 $t \to +\infty$ 时进入 O 的单稳定分界线, 其它轨线都离开 O).

(2) 平衡态, 它有一对纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ 以及 Lyapunov 量 (或焦点量) $L_1 \neq 0$. 在这个分支平衡态附近系统可表示为形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + (L_1 x - \Omega_1 y)(x^2 + y^2) + \cdots, \\ \dot{y} &= \omega x + (\Omega_1 x + L_1 y)(x^2 + y^2) + \cdots. \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

化为这种形式是可能的, 因为此时除了上面导出的项, 所有的二次和三次项都是非共振项; 在这里最简单的共振关系是两个三阶共振

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\lambda_1 + \lambda_2, \\ \lambda_2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{aligned}$$

(见 2.9 节和 9.3 节).

这样的平衡态称为弱焦点. 如果 $L_1 < 0$, 它是稳定的, 如果 $L_1 > 0$, 它不稳定的.

(3) 具有一个实乘子等于 +1 的周期轨道. 相应的 Poincaré 映射可以表示为

$$\bar{u} = u + l_2 u^2 + \cdots.$$

如果这里的 Lyapunov 量 $l_2 \neq 0$, 则相应的二重不动点对应于原系统的二重 (半稳定) 极限环.

(4) 连接两个鞍点的异宿轨线 Γ [见图 7.1.1(a)].

(5) 双向渐近于鞍点的轨线 Γ. 最简单的情形是当鞍点为非共振, 即它的特征指数满足条件

$$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0.$$

此外, 一阶非粗系统必须满足下面的条件:

(A) 不存在上述类型以外的其它轨线,

(B) 不存在进入或者离开鞍点的鞍 - 结点分界线, 如图 8.1.2 所示,

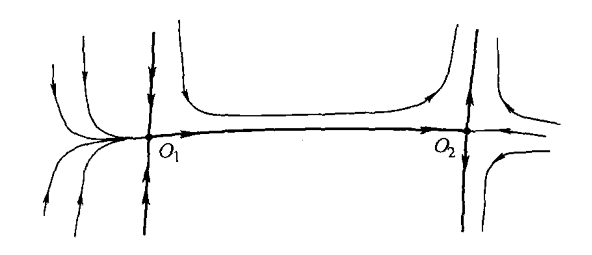


图 8.1.2 鞍 - 结点 O_1 和鞍点 O_2 之间的结构不稳定的异宿连接.

(C) 不存在属于它的强稳定流形的鞍 - 结点分界线, 如图 8.1.3 所示,

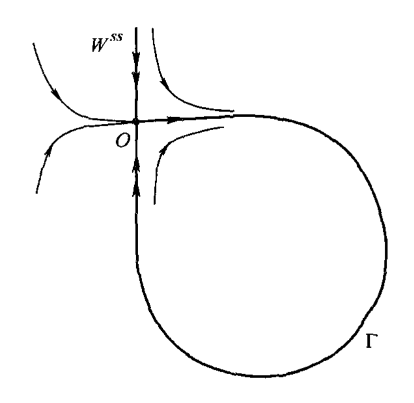


图 8.1.3 鞍 - 结点的非横截同宿回路 Γ. 分界线沿着平衡态的强稳定流形进入平衡态.

(D) 如果存在半稳定 (二重) 极限环, 系统不能同时有当 $t \to +\infty$ 时趋于环的鞍点不稳定分界线, 以及当 $t \to -\infty$ 时趋于环的鞍点稳定分界线, 如图 8.1.4 所示, 以及

(E) 不存在 (在向前时间或向后时间) 趋于鞍点同宿回路的分界线, 如图 8.1.5 所示.

上面的要求一起组成一阶非粗系统必须满足的一系列充分必要条件.

在平面动力系统的 Banach 空间 $\mathcal{B}_G$ 中, 结构稳定系统可以用仅包含不等式的条件确定 (见 Andronov-Pontryagin 定理). 但是, 一阶非粗系统不仅由包含不等式的

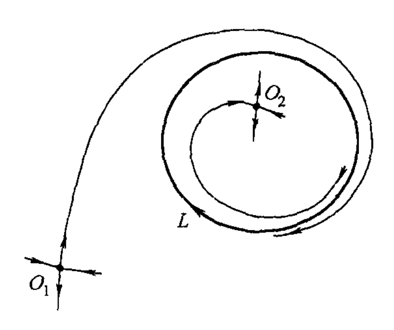


图 8.1.4 半稳定周期轨道 L 是外鞍点 O_1 分界线的 ω - 极限, 内鞍点 O_2 分界线的 α - 极限.

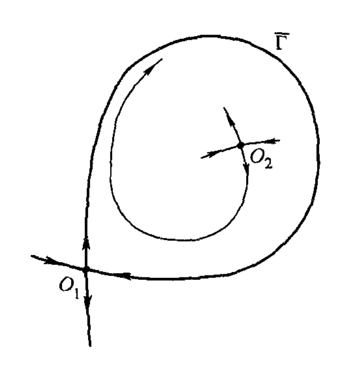


图 8.1.5 鞍点 O_1 的分界线回路是从 O_1 出发并终止 O_1 的回路, 它是其内部区域中另一个鞍点 O_2 的分界线的 ω - 极限.

条件确定, 而且由包含一个等式的额外条件约束. 特别地, 上面列举结构不稳定性的 5 个条件的假设概括为下面形式:

(1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, l_2 \neq 0$.

(2) Re $\lambda_{1,2} = 0, \omega \neq 0, L_1 \neq 0$.

(3) $\rho = 1, l_2 \neq 0$.

(4) $\Gamma_1 = \Gamma_2$, 其中 Γ_1 和 Γ_2 分别表示进入和离开连接两个鞍点的分界线. 以及

(5) $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, 其中 Γ_1 和 Γ_2 表示进入和离开一个鞍点的分界线.

上述等式条件可以解释为定义在结构不稳定系统邻域内某些泛函等于零的条件. 特别地, 不等式条件保证泛函的零位面在 Banach 空间中确定一个光滑的无限维曲面 $\mathcal{B}^1$, 它将考虑的系统的邻域划分为两个区域, 记为 D^+ 和 D^-. 为了避免说这个曲面的维数等于 $\infty - 1$, 我们简单地说它是余维 1 的. 一阶非粗系统的特殊特征是区域 D^+ 和 D^- 由粗系统组成. 任一个区域内的所有系统都有相同的概形, 因而由 Leontovich-Mayer 定理, 它们是拓扑等价的.

因此, 为了研究从 D^- 到 D^+ 的转移, 只需研究单参数系统族 X_μ 使得 $X_{\mu<0} \in D^-, X_{\mu=0} \in \mathcal{B}^1$ 和$X_{\mu>0} \in D^+$. 此外, 由于相图中所有的定性变更必须出现在某个非

粗特殊轨线的小邻域内, 因此我们可以限于就考虑这个给定的邻域.

在一阶非粗系统出现的所有分支中, 极限环分支特别有趣. Andronov 和 Leontovich 证明存在四类这样的分支, 它们是:

- 进 (出) 弱焦点的极限环分支.
- 二重 (或半稳定) 环分支.
- 鞍点分界线回路的极限环分支. 以及
- 进 (出) 鞍 – 结点的分界线回路的极限环分支.

在本书的最后几节我们将详细讨论这些分支, 许多研究工作者花了将近 20 年的时间对它们进行全面分析. 最初是由 Andronov 于上世纪 30 年代开始, 经过一系列详尽的出版物以后, 在 50 年代才完成.

为结束这一节我们进一步详细阐述限制 (D) 和 (E). 在情形 (D), 对应于二重环的曲面是余维 1 的, 因此, 它将非粗系统 X_0 的邻域划分为两个区域 D^- 和 D^+. 假设在 D^- 内二重极限环分解为两个极限环, 并且它在 D^+ 内消失. 在 D^- 内的情况较简单 —— 那里所有的系统都结构稳定, 而且是相同类型. 对 D^+ 情况就不大平凡: 如果 (D) 被破坏, 则显然在 D^+ 内除了结构稳定系统以外还存在结构不稳定系统, 它的非粗性是由于存在两个鞍点之间的异宿轨线, 如图 8.1.6 (a) 所示. 此外, 这个图像发生在 X_0 的任何邻域内. 换句话说, 在区域 D^+ 内, 存在可数多个凝聚到 $\mathcal{B}^1$ 的相应的余维 1 分支曲面. 这时曲面 $\mathcal{B}^1$ 称为从一侧**不可到达**.

当系统有非共振鞍点 (即它的鞍点量 $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$) 的分界线回路时, 它是另一个鞍点 O_1 分界线的 ω – 极限 (见条件 (E) 和图 8.1.5), 这时类似的情况也会出现. 这种情况分支曲面也是从一侧不可到达的, 那里接近的非粗系统可以有异宿连接, 如图 8.1.6 (b) 所示.

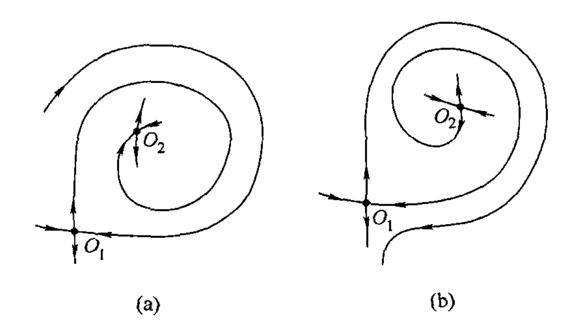


图 8.1.6 (a) 图 8.1.4 中鞍 – 结点环消失后结构不稳定的鞍点连接; (b) 图 8.1.5 中同宿回路分裂以后的相平面.

余维 1 分支曲面从任何一侧或者两侧都不可到达的情况是高维动力系统的典型情形. 这就是为何在高维系统主要分支的分类中不借助于非粗性的阶叙述, 而宁可集中在余维 1 分支集上讨论的原因.

8.2　关于高维系统分支的说明

高维系统分支的探究开始于上世纪 50 年代末 60 年代初, 早期企图将已知的平面分支结果推广到高维. 在那个时候 (不是最近) 高维结构稳定的充要条件的不存在性还起到了重要作用. 但是, 随着高维系统理论的进一步发展终于证明, 结构稳定系统并不在动力系统空间内稠密. 首先, 有人给出了一个结构不稳定系统的开集的例子, 其中结构不稳定性 "集中" 在异宿轨线上, 即在游荡点集 (Smale) 上, 并且后来还出现了结构不稳定非游荡轨道的类似例子. 所有提出 "不可移去的结构不稳定性" 的例子都是具有复杂动力学的系统. 但是, 本书我们关注**简单**动力学的系统, 特别是集中于 Morse-Smale 系统和出现在这种系统中的分支.

Morse-Smale 系统中结构稳定性的破坏起因于平衡态或周期轨道分支、出现同宿轨线和异宿环, 以及异宿连接的横截性条件被破坏. 但是, 我们注意, 这些情况中的某些可以导致我们离开 Morse-Smale 类. 此外, 它们当中的一些, 在相当简单的假设下, 不可避免地会引起复杂动力学, 从而表明系统已经离开了 Morse-Smale 系统集.

这种情况的最简单的例子是三维系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \rho x - \omega y + f(x,y),\\
\dot{y} &= \omega x + \rho y + g(x,y),\\
\dot{z} &= \lambda z + h(x,y)
\end{aligned}
$$

中的鞍 - 焦点同宿回路, 其中 $\rho<0, \omega\neq 0, \lambda>0$, f, g, h 是光滑函数, 它们连同它们的一阶导数在原点等于零. 这里原点是鞍 - 焦点, 它有一条同宿轨线 Γ, 如图 8.2.1

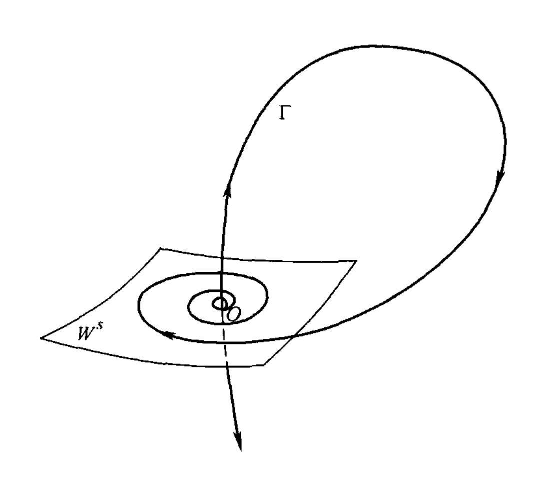


图 8.2.1　鞍 - 焦点 O 的同宿回路 Γ.

所示. Shilnikov [131,135] 证明, 如果鞍点量是正的, 即

$$\sigma = \rho + \lambda > 0,$$

则 $O \bigcup \Gamma$ 的任何邻域内都包含有无穷多条鞍点周期轨道和横截同宿轨线. 反之, 如果 $\rho + \lambda < 0$, 则整个位于 $O \bigcup \Gamma$ 邻域内的轨线结构是平凡的, 就是说, 除了 O 和 Γ 以外没有其它的不变集.

下面考虑在紧区域 G 内 Morse-Smale 类动力系统 X 的 Banach 空间 $\mathcal{B}$. 设 $\partial\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{B}$ 的边界. 任何系统 $X_0 \in \partial\mathcal{B}$ 是结构不稳定的. 如果在系统 $X_0 \in \partial\mathcal{B}$ 的任何邻域内存在具有无穷多个周期轨道的系统 (基本上这意味着具有横截同宿轨线), 则我们就说系统 $X_0 \in \partial\mathcal{B}$ 是 Morse-Smale 类的**边界**系统. $\partial\mathcal{B}$ 上的其它系统则对应于 Morse-Smale 类中的**内**分支.

边界系统 X_0 自己可以有有限多个粗平衡点和周期轨道, 或者有无穷多个粗平衡点和周期轨道. 倍周期级联给出后一情形的例子.

对边界系统的前一类情形, 我们来考虑一个同宿切触的例子. 设微分同胚的 $\mathbb{C}^2$ – 光滑族 $T(\mu)$ 在 $\mu = 0$ 有不动点 O, 它有乘子 $0 < \lambda < 1$ 和 $\gamma > 1$ 满足 $\lambda\gamma < 1$. 故对所有小的 $\mu \neq 0$, O 仍保持为鞍点. 用 $W_O^s(\mu)$ 和 $W_O^u(\mu)$ 分别记它的稳定和不稳定流形. 假设当 $\mu < 0$ 时 $W_O^s(\mu) \bigcap W_O^u(\mu) \backslash O = \varnothing$, 在 $\mu = 0$ 不变流形沿着同宿轨线 Γ 有切触. 此外, 假设这个切触是二次的, 并且它从下面切触的, 如图 8.2.2 所示. 最后, 假设对 $\mu > 0, W_O^u(\mu)$ 和 $W_O^s(\mu)$ 彼此横截相交. 因此, 在区域 $\mu > 0$ 微分同胚 $T(\mu)$ 具有横截同宿轨线, 从而附近所有轨线都具有复杂动力学 (见定理 7.11). 如果对 $\mu < 0$, $T(\mu)$ 是 Morse-Smale 微分同胚, 则 $T(0)$ 具有相同的非游荡轨线以及同宿切触的结构不稳定轨道. 最后的论断属于 Gavrilov 和 Shilnikov [54,55], 他们证明在 $\mu = 0$, $\Gamma \bigcup O$ 的任何小邻域内除了 Γ 和 O 以外没有其它整个位于其中的轨道.[2]

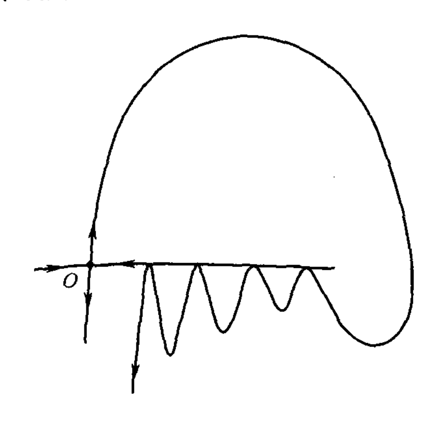


图 8.2.2　鞍点不动点的非横截同宿轨道.

[2] 注意从下面切触的条件 (如图 8.2.2 所示) 在这里是重要的: 当 W^u 从上面接触 W^s 时, 系统不可避免地在 $\mu = 0$ 有某些横截同宿 [54,55].

另外的例子是二维 $\mathbb{C}^2$ – 光滑微分同胚族, 它的非游荡点集直到达到 Morse-Smale 微分同胚的边界都不改变. 这种情况如图 8.2.3 所示. 两个不动点 O_1 和 O_2 有正乘子, $W^u_{O_2}$ 沿着异宿轨线与 $W^s_{O_1}$ 接触, 并且 $W^u_{O_1}$ 与 $W^s_{O_2}$ 也是. 这个例子不如上一个简单, 因为存在的两个异宿轨线都是游荡的.

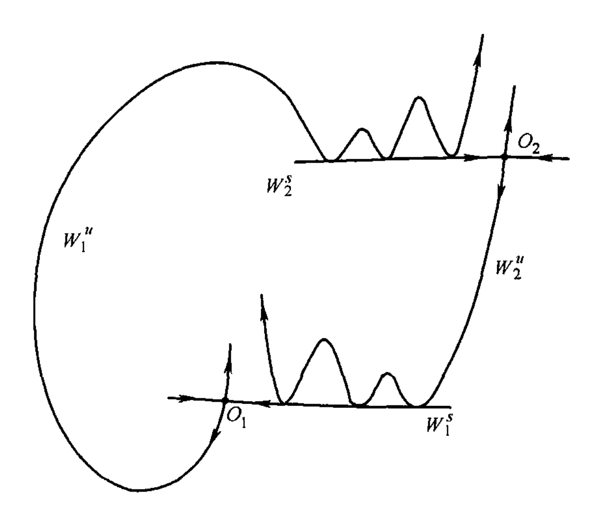


图 8.2.3 包含两个鞍点不动点的结构不稳定异宿环.

本书的主要范围是集中分析具有简单动力学的系统类中的内分支, 如 Morse-Smale 系统. 此外我们将大部分研究局限于余维 1 分支. 这个限制的理由是某些高余维分支在许多情况下是由边界分支产生, 例如在平衡态的规范形是 3 维时. 尽管如此, 我们也将研究有关平衡态和周期轨道失去稳定性时的某些余维 2 情形. 下一节我们开始讨论有关结构不稳定的异宿连接的一些问题.

8.3 结构不稳定的同宿和异宿轨道. 拓扑等价性的模数

我们现在知道, 在一阶非粗系统的小邻域内的所有非粗二维系统组成一个余维 1 曲面. 此外, 由 Leontovich 和 Mayer 的工作, 我们也知道, 在它们有相同的拓扑不变量 —— 概形的意义下它们都是等同的. 特别地, 所有具有鞍点同宿回路的接近系统都彼此等价; 对具有连接两个鞍点异宿轨线的接近系统也同样成立.

但是, 对二维微分同胚或三维流的类似分类就没有那么平凡. 让我们用一个例子来阐明这点. 考虑微分同胚 T, 它有两个鞍点不动点 O_1 和 O_2, 在 O_i $(i=1,2)$ 有特征根 $|\lambda_i|<1$ 和 $|\gamma_i|>1$. 假设 $W^u_{O_1}$ 和 $W^s_{O_2}$ 沿着异宿轨道有二次切触, 如图 8.3.1 所示. 由二次切触条件得知, 所有类似的微分同胚在所有具有 $\mathbb{C}^2$ – 范数的微分同胚空间内形成余维 1 曲面 $\mathcal{B}^1$.

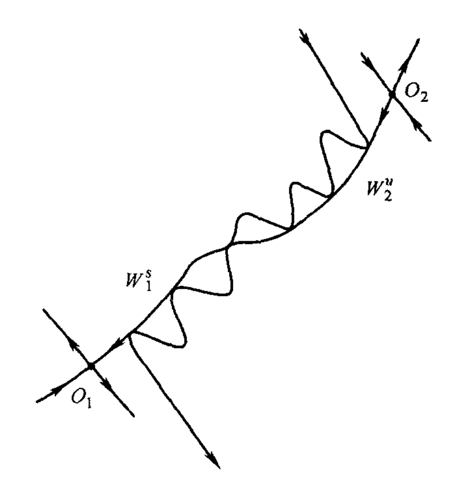


图 8.3.1　两个鞍点不动点之间的非横截异宿轨线.

对微分同胚 T 我们引入量

$$\theta = \frac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\gamma_2|}, \tag{8.3.1}$$

类似地, 对接近微分同胚 $\tilde{T} \in \mathcal{B}^1$, 定义

$$\tilde{\theta} = \frac{\ln|\tilde{\lambda}_1|}{\ln|\tilde{\gamma}_2|}, \tag{8.3.2}$$

其中 $\tilde{\lambda}_{1(2)}$ 和 $\tilde{\gamma}_{1(2)}$ 是 T 在鞍点 $O_{1(2)}$ 附近的鞍点 $\tilde{O}_{1(2)}$ 的特征根.

于是我们有下面的定理.

定理 8.1　如果微分同胚 T 和 $\tilde{T}$ 拓扑共轭, 则 $\theta = \tilde{\theta}$.

我们注意, $\theta = \tilde{\theta}$ 仅仅是必要条件. 由此定理得知, 在 T 附近 $\mathcal{B}^1$ 被分为拓扑不同类的微分同胚的连续统. 这个事实被 Palis [103] 发现, 它的证明见 [97].

不变量 θ 称为**拓扑等价的模数**, 或者简单地就称为**模数**. 由于模数概念的基本重要性, 让我们给出它的定义.

定义 8.2　系统 X (连续或离散) 称为有模数, 如果在动力系统空间的某个子空间 $\mathcal{B}^*$ 内, 其中 $X \in \mathcal{B}^*$, 定义一个连续、局部非常数的泛函 h, 使得如果 X 和 $\tilde{X}$ 拓扑等价, 则 $h(X) = h(\tilde{X})$.

这个泛函局部是非常数的条件意味着在其定义区域内不存在 X 邻域内的开集, 使得泛函在这些开集上可取常数值. 从这个观点, 环的典型微分同胚的 Poincaré 旋转数不是模数.

在三维流情形, 流有两个鞍点周期轨道, 使得一个周期轨道的不稳定流形与另一个轨道的稳定流形沿着异宿轨线有二次切触, 这时量 θ 也是拓扑等价性的模数.

在具有简单动力学的余维 1 结构不稳定的三维系统中还会出现一些其它模数. 例如, 考虑具有鞍 – 焦点 O 和鞍点周期轨道 L 的三维系统. 设 $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$ 和 λ_3 是在 O 的特征根, 满足 $\rho < 0, \omega > 0, \lambda_3 > 0$, 即假设鞍点有型 $(2,1)$; 令 $|\nu| < 1$ 和 $|\gamma| > 1$ 是轨道 L 的乘子. 设 O 的两条分界线之一 Γ 当 $t \to +\infty$ 时趋于 L, 即 $\Gamma \in W_L^s$, 如图 8.3.2 所示. 这个条件给出最简单的结构不稳定性. 所有具有类似轨线性态的附近系统形成一个余维 1 曲面 $\mathcal{B}^1$. Belogui [28] 发现量

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{\rho}{\omega}\frac{1}{\ln \gamma} \tag{8.3.3}$$

是这种系统的模数.

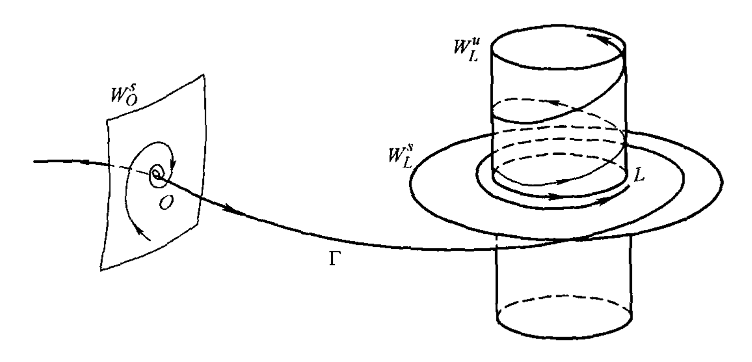


图 8.3.2 连接鞍 – 焦点和具有正乘子的鞍点周期轨道的结构不稳定的异宿轨线, 即鞍点环的两个流形同胚于柱面.

另一个例子是如图 8.2.1 所示的系统, 这时系统包含鞍 – 焦点的同宿回路 Γ. 如果鞍点指标

$$\nu = -\frac{\rho}{\lambda_3} < 1,$$

则回路的邻域内包含无穷多个鞍点周期轨道集. 但是, 如果 $\nu > 1$, 则 Γ 邻域内的动力学是平凡的. 此外, Shilnikov [130] 证明当 $\nu > 1$ 时, 从同宿回路可分支出的周期轨道不多于一个. 因此, 在 Morse-Smale 系统内 (至少对考虑回路 Γ 的小邻域) 可对内分支进行分类. 与此相联系的, Afraimovich 和 Ilyashenko [21] 指出在这种情形下 ν 是模数.

高维系统中结构不稳定的异宿连接除了已经知道的外, 可以要求有新的模数. 此外, 即使对具有简单动力学的结构不稳定的微分同胚的阐述也可以要求有无穷多个模数. [43] 中叙述了有有限个或者无穷多个模数的一些条件.

无可置疑, 同宿轨线和异宿轨线性态的某些细节方面对非线性动力学也许不重要, 因为它们仅仅反映转移过程的某些细微差别. 另一方面, 当我们处理非游荡轨线时, 例如 $\nu < 1$ 时鞍 – 焦点的同宿回路附近, 相应的 Ω – 模数 (在非游荡集上的拓扑不变量) 将是第一重要的, 因为它们可以用作控制分支的参数, 见 [62,63].

8.4 有限个参数系统族中的分支. Andronov 设置

非线性动力学的数学对象是模型, 它明确地定义了依赖于有限个参数的动力系统. 模型的主要性质必须是能适当地至少定性地刻画相应物理现象的特性. 研究模型的主要目的是给出严格的数学解释. 关于这一点, 让我们回忆 Lyapunov 作的说明: "··· 在我们开始去解决具体的力学或者物理问题时, 无论怎么样, 从数学的观点必须正确地提出问题, 不允许用不确定的论述. 一旦系统被定义了, 它就变成一个纯分析的问题, 必须得到同样的处理." [3]

至于对考虑的动力学模型进行分析的主要要求是由 Andronov 阐明的. 这就是为什么我们称它为 **Andronov 的设置问题**. 其主要思想是:

- 将相空间划分为结构稳定性区域, 并指定分支集.
- 将这个分支集划分为连通分支, 每个分支对应于拓扑等价的轨线结构.

自然地, 这样的设置问题是建立在对二维动力系统的定性理论和分支理论已经知道的事实和结果的基础上.

考虑某个有限参数的光滑系统族 X_ε, 其中 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)$, 假设它的值取于某区域 $V\subset\mathbb{R}^p$. 如果 X_{ε_0} 为非粗, 则 ε_0 称为**分支参数值**. 所有这些在 V 中的值的集合称为**分支集**. 显然, 一旦知道分支集, 我们就可在参数空间中确定所有结构稳定性的区域. 因此, 第一步是研究模型以确定它的分支集. 这强调了在非线性动力学的所有工具中分支理论的特殊作用.

研究分支意味着刻画非粗系统在转移到任意一个邻近系统时相图的变化 (在某 $\mathbb{C}^r$ - 度量下, r 的选择依赖于非粗性的特征, 因此必须对每个具体的情形指定).

原则上, 要解决分支问题需要考虑所有的接近于 X_{ε_0} 的系统. 这意味着我们必须考虑所有小扰动的 Banach 空间. [4] 另一方面,如果有可能将问题化为对某个适当的有限参数系统族的分析, 则研究将大大简化.

这个思想是 Andronov 和 Leontovich 在处理平面极限环的主要分支的第一个工作 [9] 中就提出来了.[5] 在 Morse-Smale 类内部, 分支理论的进一步发展也确认对大量问题利用有限参数族已足够了.

---

[3] Lyapunov 完全将这些话与 Poincaré 的研究联系起来, 后者应用某些非严格方法研究旋转流体平衡点的稳定性形态问题, 而导致他赞同梨的形态的错误结论. 更严格的分析是由 Lyapunov 引入的, 他揭示梨形的形是不稳定的. Lyapunov 的证明后来被 Cartan 所确认.

[4] 注意, 在许多特殊情形中我们将局限于研究更小的系统空间, 例如具有某些特殊对称性的系统, Hamilton 系统, 等等. 由于这个原因, 如在具有一个自由度的 Hamilton 系统中结构稳定性概念就变得十分有意义. 因此, 例如这种系统的中心和鞍点这样的平衡态变成结构稳定的. 此外, 如果不存在包含不同鞍点的异宿环, 我们自然可以在给定类型的所有系统集中区别出这样的系统为粗系统.

[5] 但是, 在他们后面的著作中 (也见书 [11,12]), 当研究类似的分支时他们用了所有小扰动的 Banach 空间. 注意, 当系统具有复杂动力学时, 由于同宿切触的保持, 用 Banach 空间研究分支的方法本质上就变得必要了 (见 [60,61,62]).

将有限参数法用于局部分支的明显数学叙述是由 Arnold [19] 给出的, 这个方法以**通有族**概念为基础. 粗略地说, 通有性是动力系统族空间内族的一类结构稳定性. 这种稳定性的不同形式在 [97] 中有详细的讨论.

这个方法的主要思想是: 对非粗系统 X_{ε_0} 某个余维数 k 可被指定. 在有限退化的情形, 余维数 k 与 k 个等式型条件和有限个不等式型条件等同. 因此, X_{ε_0} 考虑为动力系统空间中某个余维 k 的 Banach 子流形 $\mathcal{B}^k$ 中的一点. 换句话说, 我们有 k 个定义在 X_{ε_0} 的邻域内的光滑泛函, 它们的零位面在 $\mathcal{B}^k$ 相交. 一般地, 不等式型条件保障 $\mathcal{B}^k$ 的光滑性. 在余维 1 情形, Sotomayor [144,145] 证明了这些泛函的光滑性, 以及流形 $\mathcal{B}^1$ 在下面情形的光滑性:

(1) 平衡态变成结构不稳定.

(2) 周期轨道失去它的结构稳定性. 以及

(3) 存在鞍点平衡态和周期轨道的稳定和不稳定流形的非横截相交.

注意, $\mathcal{B}^k$ 中的所有系统都是非粗的. 此外, 在一般情形下, 它们不必要彼此拓扑等价. 但是, 假设它们拓扑等价. 下面我们将点 $X_{\varepsilon_0} \in \mathcal{B}^k$ 的小邻域 U 叶化为 k- 参数族 $\tilde{X}_\varepsilon$, 其中 $\tilde{X}_{\varepsilon_0} \in \mathcal{B}^k \bigcap U$ 以及 $\tilde{X}_\varepsilon$ 与 $\mathcal{B}^k$ 横截于 $\tilde{X}_{\varepsilon_0}$. 如果这些族的任何两个参数族之间存在同胚 (或者微分同胚则更好), 使得对应的系统拓扑等价, 则显然研究系统 X_{ε_0} 的分支化为对通过 X_{ε_0} 并与 $\mathcal{B}^k$ 横截的任何 k- 参数族 $\tilde{X}_\varepsilon$ 的研究.[6] 由于 U 是小邻域, ε 取自参数空间中 ε_0 的小邻域. 在这时 Andronov 问题容易被设置.

本质上, 这是二维系统的情形, 以及对于许多高维系统, 例如利用中心流形定理 (局部或者大范围, 见第 5 章、第 6 章) 它们可化为二维情形的那种.

当拓扑等价性的模数要求刻画在 $\mathcal{B}^k$ 中的系统时, 像在异宿切触的情形 (它对应于余维 1 分支集), 情况变得完全不同. 虽然 k- 参数族的叶状邻域 U 仍有可能, 但不同的族将不拓扑等价. 因此, 从形式数学的观点, 模数必须包含在控制参数之中, 以及必要的参数个数增加到问题的余维数加上模数的个数. 如果存在无穷多个独立的模数, 则形式上化为有限参数族是不正确的. 但是, 有限参数法对这些情况的可用性问题仍存在.

作为例子, 考虑有负鞍点量 (即 $\nu > 1$, 见上一节) 的鞍 – 焦点同宿回路的三维系统的余维 1 分支. 如在上一节解释的, 这个分支没有将这个系统带出具有平凡动力学的系统类之外. 另一方面, ν 在这一情形下是模数. 仅管这个事实意味着在相应的分支曲面上不同系统是不拓扑等价的, 所考虑的分支在单参数族中还是能很好处理 (见 13.4 节), 除非我们的兴趣在轨线的 ω – 极限集是同宿回路的那种轨线性态.

更复杂的例子是如图 8.4.1 所示的余维 2 问题, 它包含一个或两个鞍 – 焦点. 所有平衡态的鞍点量假设是负的. 控制分支的参数按下面方法引入: 设 $\mu_{1(2)}$ 是在两个鞍 – 焦点的情形 $\Gamma_{12}\,(\Gamma_{21})$ 从 $W^s_{O_1}\,(W^u_{O_2})$ 的偏离, 或者是 $\Gamma_1\,(\Gamma_2)$ 从 W^s_O 的偏离.

[6] 当然, 我们也可以在这里考虑依赖多于 k 个参数的族, 而仅要求族必须关于 $\mathcal{B}^k$ 是处于一般位置的, 更详细的情况见 11.1 节.

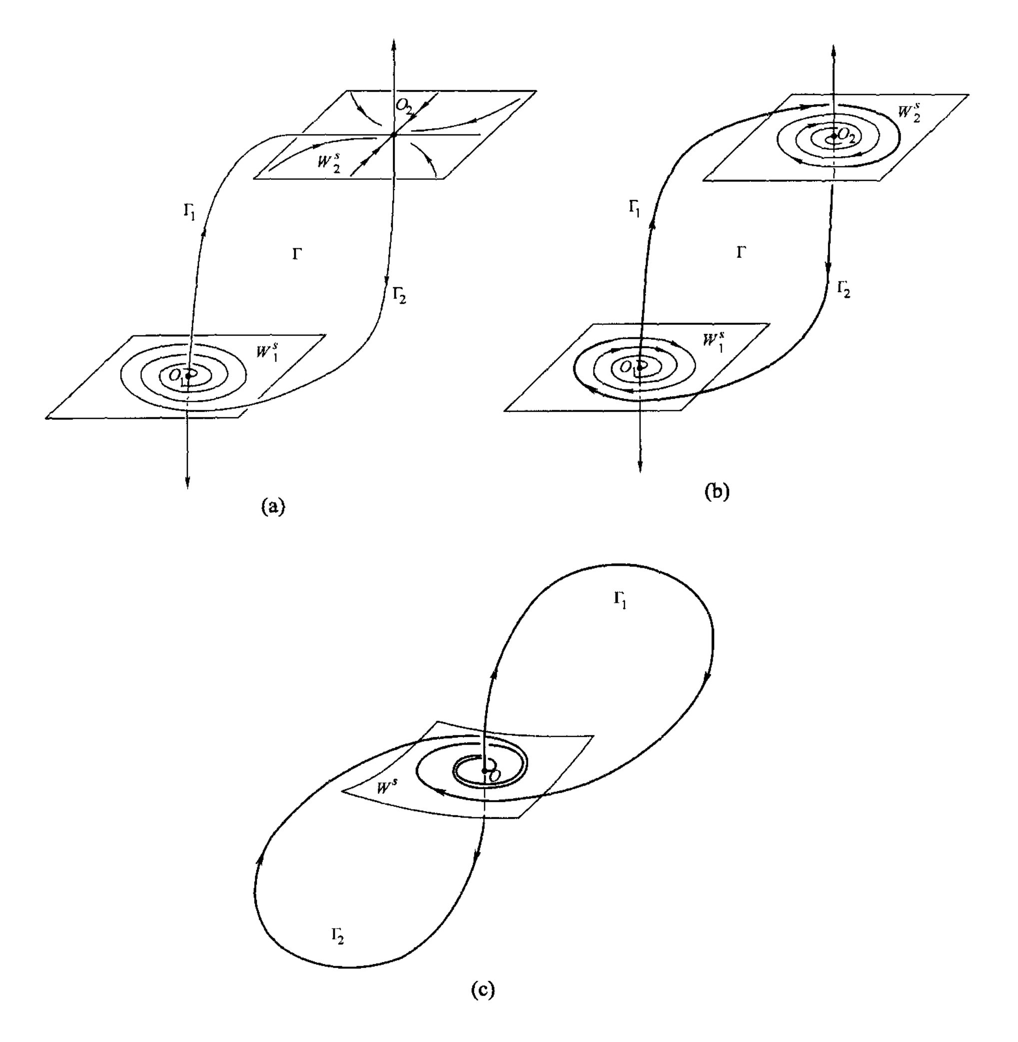


图 8.4.1 (a) 鞍点 O_2 和鞍 - 焦点 O_1 之间的异宿连接; (b)两个鞍 - 焦点 $O_{1,2}$ 之间的异宿连接; (c) 鞍 - 焦点的 8 字形同宿轨线.

如在 [151,125] 中建立的, 分别地, 在第一个分支产生不多于一个周期轨道而在第二个分支产生不多于两个周期轨道. 此外, 在第二个情形下, 非平凡吸引子 (稳定的拟极小集由鞍 - 焦点 O 和两条以 O 为它们的 α - 极限集的 P^+ 轨线以及其它非闭 Poisson - 稳定轨线的连续统组成) 可能出现. 即使非游荡集的结构在这里完全清楚, 在 (μ_1, μ_2) - 参数平面上的分支图看上去还是相当不平凡 (如图 8.4.2 所示), 特别是对于对应第二级的异宿轨线和同宿轨线的分支值集合. 我们猜测, 当改变数 ν 在 $(\mu_1 = 0, \mu_2 = 0)$ 的值时在小的 (μ_1, μ_2) 处可改变分支曲线互相交的结构. 另一方面, 如果我们不考虑得太细致, 双参数法对这些分支的完全理解已经足够了.

类似的情况也出现在关于从周期轨道产生不变环面的经典问题中: 分支集结构

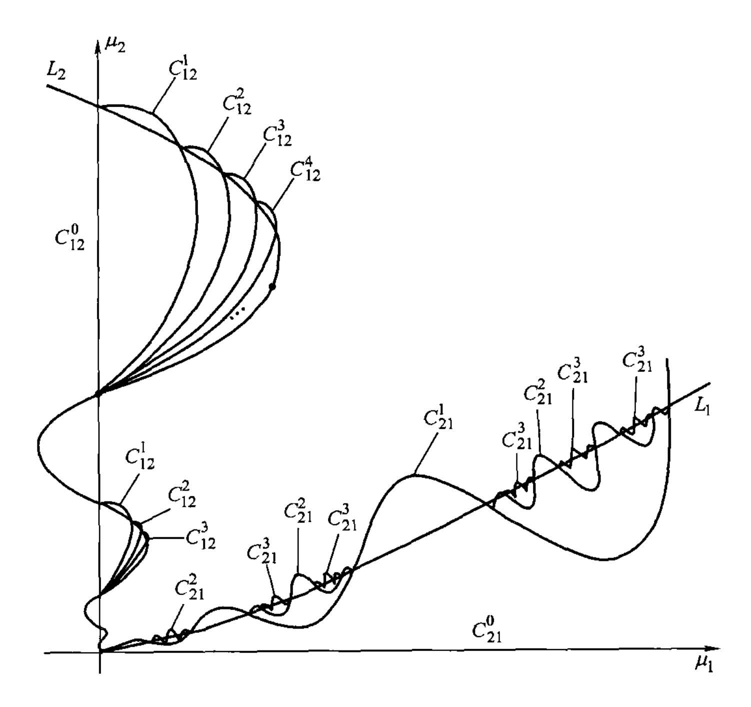


图 8.4.2 对应于图 8.4.1(a) 所示情形的分支图. 详情见 13.7节.

的次要细节可能变得对族的小扰动非常敏感.

我们看到, 在许多基本情形中, 如果我们对 Andronov 问题追求得太完美太苛刻的话, 这个问题就不可能得到解决, 因此在这些情形下我们必须合理而有限度的对分支集进行分析.

本书我们从一开始就采用有限参数方法去研究分支, 其形式概形将在 11.1 节中阐述.

一般地, 当处理 p- 参数系统族时, 我们假设有下面的自然限制:

(1) 结构稳定系统在参数空间中充满整个区域.

(2) 族中的主要分支的余维不超过 p. 以及

(3) 满足 $k \leqslant p$ 的余维 k 分支必须允许有合理的 k - 参数开折的构造.

第 9 章　平衡态的稳定性边界上的动力系统性态

这一章我们研究在稳定性边界上的**非粗或结构不稳定平衡态**, 即它至少有一个特征指数在复平面的虚轴上. 其余的特征指数将假设位于开的左半平面.

具有结构不稳定平衡态的系统的稳定性理论的基础是由 Lyapunov 发展的. 在关于**临界**情形的稳定性以及伴随平衡态稳定性的消失的分支现象的诸多方面, 他的工作和许多以后的研究成为上世纪 20 年代和 30 年代产生的非线性振动理论主要概念的基础.

临界平衡态已经成为大量研究的课题. 这里我们仅考虑两个最通常的简单情形, 其中特征方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

(1) 有一个零根在虚轴上. 或者

(2) 有一对共轭复根在虚轴上.

第一个情形由条件

$$a_n = 0, \quad \Delta_k > 0, \quad k = 1, \cdots, n-1$$

确定, 其中 Δ_k 是 Routh-Hurwitz 行列式 (见 2.1 节).

第二个临界情形对应于

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad a_n > 0, \quad \Delta_k > 0, \quad k = 1, \cdots, n-2.$$

回忆 $a_n = (-1)^n \det A$, 其中 A 是在平衡态的线性化系统的矩阵. 因此, 在第一个情形穿过稳定性边界的条件是

$$\det A = 0.$$

考虑到这个条件, 与第一临界情形相应的平衡态称为**退化**的. 由于在这里隐函数定理不可再应用, 对邻近系统保持这样的平衡态就得不到必要的保证. 因此在第一临界情形通过稳定性边界可能会导致平衡态的消失.

反之, 在第二临界情形, 对所有附近的系统平衡态都得到保持, 且只可能失去它的稳定性.

研究临界情形的基本工具包括化到中心流形上的方法和规范形方法. 后者允许我们计算 **Lyapunov** 量以确定临界平衡态的稳定性.

9.1 约化定理. Lyapunov 函数

在临界平衡态附近微分方程系统可写为形式

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y), \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y), \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_m)$, $y = (y_1, \cdots, y_n), m \neq 0$. 函数 $f, g \in \mathbb{C}^r \, (r \geqslant 1)$ 以及它们的一阶导数在原点为零. 特征方程 $\det(B - \lambda I) = 0$ 有 m 个根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 满足 $\operatorname{Re} \lambda_i = 0 \ (i = 1, \cdots, m)$, 特征方程 $\det(A - \gamma I) = 0$ 有 n 个根 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 满足 $\operatorname{Re} \gamma_j < 0 \ (j = 1, \cdots, n)$.

如在第 5 章指出的, 上面的临界平衡态位于由方程 $y = \Phi(x)$ 定义的 $\mathbb{C}^r$ - 光滑不变**中心流形**W^C 上, 其中 $\Phi(x)$ 和它的一阶导数在原点为零.

另一个通过点 $O(0,0)$ 横截于中心流形的不变流形, 称为**强稳定**不变流形, 如通常那样记它为 W^{ss}. 它的方程是 $x = \Psi(y)$, 其中 $\Psi(y)$ 和它的一阶导数在原点为零. 如果原系统是解析的, 则流形 W^{ss} 也是解析的. 一般地, 类似的结果对中心流形并不成立: 即使系统是解析的, 中心流形 W^C 可以既不是解析甚至也不是 $\mathbb{C}^\infty$ 的.

强稳定流形 W^{ss} 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑叶层的叶片之一, 它横截于中心流形. 如我们在第 5 章证明的, 下面的约化定理成立:

在点 O 的邻域内存在直化不变叶层与中心流形的 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑变量变换, 使得系统在新变量下取下面的标准形

$$\dot{x} = Bx + G(x), \tag{9.1.2}$$

$$\dot{y} = [A + F(x, y)]y, \tag{9.1.3}$$

其中 $G(x) \equiv g(x, \Phi(x)) \in \mathbb{C}^r, F(x, y) \in \mathbb{C}^{r-1}$ **且** $F(0,0) = 0$.

在新变量下中心流形 W^C 的方程变成 $y=0$, 强稳定流形 W^{ss} 的方程变成 $x=0$. 强稳定叶层的叶片是曲面 $x=$ 常数.

这个定理的主要特征是将问题的维数作了有重要意义的减少, 就是说代替原来 $(n+m)$ 维系统 (9.1.1) 的研究, 我们仅需探究 m 维系统 (9.1.2) 的性质, 它的维数不依赖于 n, 但等于临界特征指数的个数. 在临界 (中心) x - 变量上的动力学由系统 (9.1.2) 局部确定, 而绝不依赖于 y 坐标.

在 y - 变量上的动力学相当简单: 如果 $\|x\|$ 很小, (9.1.3) 中的函数 F 在原点附近也很小. 因此, 在 y - 空间内适当选择基下, 下面的估计成立:

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\| \leqslant -\gamma\|y(t)\|,$$

其中 $0<\gamma<\max|\mathrm{Re}\,\gamma_i|$ $(i=1,\cdots,n)$ (见定理 2.4). 因此

$$\|y(t)\| < Ce^{-\gamma t}, \tag{9.1.4}$$

即任何轨线指数式地趋于中心流形 W^C.

在强稳定流形 W^{ss} 上系统 (9.1.1) 的限制方程

$$\dot{y} = Ay + f(\Psi(y), y) \tag{9.1.5}$$

的所有特征指数位于虚轴的左边. 因此, 系统在 W^{ss} 上的轨线性态与具有线性化矩阵 A 的粗稳定平衡态附近的相同 (见第 2 章).

由估计 (9.1.4) 得知, 原系统 (9.1.1) 平衡态的稳定性等价于简化到中心流形上相应系统的平衡态的稳定性.

首先, 我们回忆某些定义. 平衡态 O 称为 **Lyapunov 稳定**, 如果对任何 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$, 使得从 O 的 δ 邻域内出发的任何轨线永不离开它的 ε 邻域. 否则, 平衡态称为不稳定.

平衡态 O 称为**渐近稳定**, 如果任何从充分接近于 O 的地方出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时都趋于 O.

现在, 设简化系统 (9.1.2) 的平衡态 $x=0$ 在 Lyapunov 意义下稳定. 由定义, 这意味着对标准形系统 (9.1.2) 和 (9.1.3), 对任何从充分接近于 O 处出发的轨线, 只要 y 保持小, x 坐标按范数对所有正时间保持小. 同时, 小的 x 导致对 y 坐标有不等式 (9.1.4), 即 $y(t)$ 指数式地收敛于零. 因此我们有下面的定理.

定理 9.1 如果在中心流形 W^C 上平衡态 Lyapunov 稳定, 则原系统 (9.1.1) 的平衡态也 Lyapunov 稳定. 此外, 如果平衡态在中心流形上渐近稳定, 则原系统的平衡态也渐近稳定.

如果在中心流形 W^C 上平衡态不稳定, 则原系统的平衡态也不稳定. [1]

[1] 关于不稳定的最后一个陈述是显然的, 就不证明了.

我们对临界平衡态稳定性的研究是利用 Lyapunov 函数.

定义 9.1 定义在 O 的邻域 D 内连续在 $D\backslash O$ 上光滑的连续函数 $V(x)$, 称为系统 (9.1.2) 的 Lyapunov 函数, 如果它满足下面的条件:

$$(1)\ V(0)=0, \tag{9.1.6}$$

$$(2)\ 若\ x\neq 0, V(x)>0, \tag{9.1.7}$$

$$(3)\ 在\ x\neq 0\ 处, \frac{dV(x)}{dt}=\langle V'(x), Bx+G(x)\rangle \leqslant 0, \tag{9.1.8}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示数量积.

用 Lyapunov 函数证明稳定性是基于下面的结果.

定理 9.2 如果存在满足条件 (9.1.6)—(9.1.8) 的函数 $V(x)$, 则平衡态 O 是 Lyapunov 稳定的. 进一步, 如果不等式 (9.1.8) 对所有 $x\neq 0$ 是严格的, 则 D 内所有轨线当 $t\to+\infty$ 时都趋于 O, 即平衡态 O 渐近稳定.

为了证明 O 是 Lyapunov 稳定的, 取半径为 ε 围绕点 O 的球 S_ε^{m-1}. 设 $V_\varepsilon>0$ 是函数 $V(x)$ 在这球面上的极小值 (它严格为正, 因为球面上所有的点都与原点有有限距离). 由于 V 连续且 $V(0)=0$, 得知对任何充分接近于 O 的点 x, 函数 $V(x)$ 的值严格小于 V_ε.

注意, 由 (9.1.8) 得知 Lyapunov 函数不可能沿着系统 (9.1.2) 的轨线增加. 因此, 对从足够接近于点 O 的地方出发的任何轨线 $x(t)$, 不等式 $V(x(t))<V_\varepsilon$ 成立. 这意味着这样的轨线不能与球面 S_ε^{m-1} 相交, 因此, 它必须对所有 $t\geqslant 0$ 都停留在平衡态 O 的 ε 邻域内, 因此平衡态 O 是 Lyapunov 稳定的.

为了证明渐近稳定, 选择平衡态的 ε 邻域 U_ε, 并证明从 D 内出发的任何轨线经过充分长的时间以后必须进入 U_ε, 且必须永远停留在那里. 事实上, 如果不等式 (9.1.8) 对所有 $x\neq 0$ 是严格的, 则极小值

$$\min_{x\in D\backslash U_\varepsilon}\langle V'(x), Bx+G(x)\rangle=-C_\varepsilon$$

是严格小于零. 如果我们假设在时间 t 轨线 $x(t)$ 上的代表点在 U_ε 外, 则由 (9.1.8) 我们有

$$\frac{d}{dt}V(x(t))\leqslant -C_\varepsilon$$

(在 U_ε 内我们至少有 $\frac{d}{dt}V(x(t))\leqslant 0$). 因此, 对任何 t

$$V(x(t))\leqslant V(x(0))-C_\varepsilon T(t), \tag{9.1.9}$$

其中 T 表示轨线离开 U_ε 的时间. 由 (9.1.7) 和 (9.1.9) 得知这个时间对任何 t 是有限的:

$$T(t) \leqslant \frac{V(x_0)}{C_\varepsilon} \equiv T_\varepsilon(x_0).$$

因此, 对所有 $t > T_\varepsilon$ 轨线停留在点 O 的 ε 邻域内. 由于 ε 可选得任意小, 故当 $t \to +\infty$ 时轨线必将零.

注　Lyapunov 函数是稳定性理论的通用工具. 典型地, 证明所考虑的稳定性是由构造一个 Lyapunov 函数或者证明它的存在性所组成. 此外, 它的应用不限于临界平衡态; 例如在我们对结构稳定平衡态的分析研究时 (定理 2.4), 我们已经含蓄地证明了在 Jordan 基下向量的范数就是一个 Lyapunov 函数.

Lyapunov 函数有其简单的几何意义, 特别是在渐近稳定的情形. 这里等位面 $V(x) =$ 常数是系统 (9.1.1) 的**无切曲面**, 即在这些曲面上的向量场的方向指向原点, 如图 9.1.1 所示 (为验证这点, 注意到在点 x 函数 $V(x)$ 的梯度向量 $V'(x)$ 与曲面 $V =$ 常数正交, 而严格不等式 (9.1.8) 意味着速度向量 $\dot{x}$ 与函数 $V(x)$ 的梯度之间的交角是锐角). 因此, 所有的轨线必须进入任何曲面 $V =$ 常数并收敛于平衡态 O.

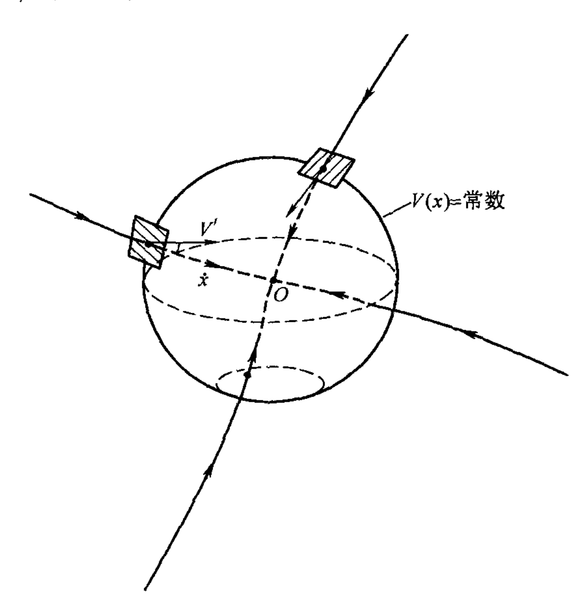


图 9.1.1　Lyapunov 函数的几何解释. 曲面 $V(x) =$ 常数与向量场无切, 即曲面上任何点的切线与向量场横截相交, 故每一条轨线走向球面内部.

从实用的观点, Lyapunov 意义下的稳定性没有渐近稳定性来得重要. 特别地, 由简单的连续性论断, 如果临界平衡态渐近稳定, 那么任何附近系统的轨线也将收敛到原点的小邻域并将永远停留在那里. 轨线在这个小邻域内的性态可以相当不平凡. 但是在附近的系统的任何偏离零的轨线都必须保持很小, 因为平衡态在临界参数值

是渐近稳定的.

上面的论述对平衡态仅仅是 Lyapunov 意义下的稳定并不成立. 例如对线性系统

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - \omega x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \omega x_1 + \mu x_2,$$

在 $\mu = 0$ 平衡态 $O(0,0)$ 是中心. 它是 Lyapunov 稳定但不是渐近稳定 (这里任何轨线都是围绕原点的同心圆). 对任何任意小的 $\mu > 0$, 平衡态变成不稳定焦点, 当 $t \to +\infty$ 时所有轨线都离开原点到无穷远处.

由在临界参数值平衡态的不稳定性也可得知关于所有邻近系统轨线性态的实用上重要的一般结论. 就是说, 如果我们固定这样的平衡态的任意小 ε_0 邻域, 那么对充分接近具有不稳定平衡态的原系统的任何系统, 存在离开零不远于 ε_0 的初始条件, 使得对应的轨线从原点离开一个有限距离. 因此, 如果原系统的临界平衡态 O 不稳定, 则任何邻近系统对应的平衡态的吸引盆 (只要它存在) 必须非常小.

为了证明平衡态不稳定, 我们可以利用 Lyapunov 函数的某些类似. 例如, 如果存在函数 $V(x)$ 满足条件 (9.1.6) 和 (9.1.7), 但

$$\langle V'(x), Bx + G(x)\rangle > 0, \text{ 在 } x \neq 0, \tag{9.1.10}$$

则对应的平衡态不稳定. 其中, 函数 $V(x)$ 是由 (9.1.2) 改变时间方向得到的系统的 Lyapunov 函数. 因此, 由定理 9.1, 所有轨线当 $t \to -\infty$ 时都趋于 O, 即这样的平衡态是**排斥**的, 或**完全不稳定**.

但是, 也有可能存在不稳定平衡态 O, 使得有些轨线当 $t \to +\infty$ 时收敛于 O. 最简单的例子是粗鞍点. 为了证明在临界情形鞍点的不稳定性, 我们可利用 Chetaev 函数, 其中条件 (9.1.6), (9.1.7) 和 (9.1.10) 仅在与点 O 相连接的某些扇形区域内成立. 详情建议读者参考 Khazin 和 Shnol 的书 [75].

9.2 第一临界情形

在 (9.1.1) 中只有一个特征指数位于虚轴上, 即 $m = 1$ 和 $\lambda_1 = 0$ 的情形, 系统具有标准形

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x), \\ \dot{y} &= [A + F(x,y)]y, \end{aligned} \tag{9.2.1}$$

其中 x 是数量, 函数 $g(x)$ 及其一阶导数在原点等于零. 在此情形下, 中心流形 W^C 是一维的, 且由方程 $y = 0$ 定义. 在 W^C 上的系统是

$$\dot{x} = g(x). \tag{9.2.2}$$

我们来研究这个方程在平衡态附近轨线的性态. 由于 $g(0) = g'(0) = 0$,

$$g(x) = l_2 x^2 + l_3 x^3 + \cdots , \tag{9.2.3}$$

其中函数 $g(x)$ 在 O 的 Taylor 展开的系数 $l_2, \cdots, l_k$ 称为 **Lyapunov 量**.

假设 k 是第一个非零 Lyapunov 量 l_k 的数; 即 $l_2 = \cdots = l_{k-1} = 0$ 而 $l_k \neq 0$. 则方程 (9.2.2) 可写为

$$\dot{x} = l_k x^k (1 + o(1)). \tag{9.2.4}$$

注意到如果 k 是偶数, 则平衡态不稳定. 轨线在点 O 邻域内的性态对正的 l_k 和负的 l_k 分别如图 9.2.1(a) 和 (b) 所示. 第二个情形由变换 $x \to -x$ 化为另一个情形. 这里只存在三条轨线: 一条是点 O, 第二条是从 O 出发走向 $l_k x > 0$ 这边的轨线, 第三条是从 $l_k x < 0$ 这边进入 O 的轨线.

如果 k 是奇数 $(k = 2p + 1)$, 方程取下面形式

$$\dot{x} = l_{2p+1} x^{2p+1} (1 + o(1)). \tag{9.2.5}$$

其中, 如果 $l_{2p+1} < 0$, 则对 $x \neq 0$ 有 $\dfrac{d}{dt}|x| = l_{2p+1}|x|^{2p+1}(1+o(1)) < 0$. 因此, 平衡态 O 在这种情形下稳定, 如图 9.2.1(c) 所示. 反之, 如果 $l_{2p+1} > 0$, 平衡态不稳定, 如图 9.2.1(d) 所示.

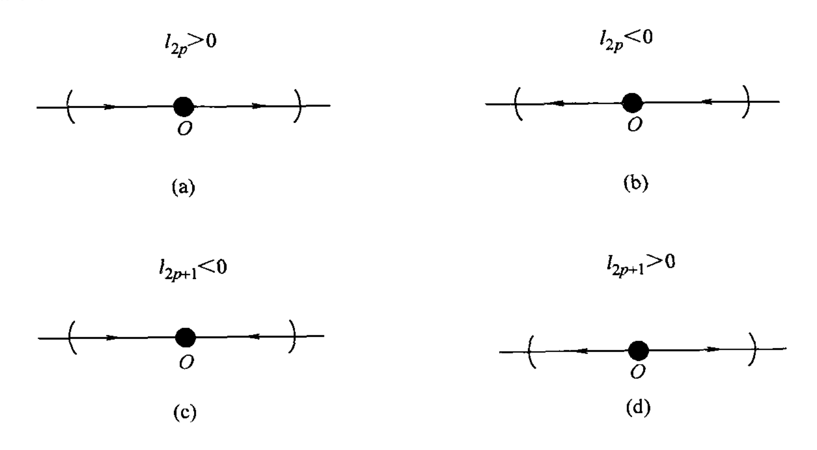


图 9.2.1 具有不同 Lyapunov 量的鞍 – 结点. 内容见正文.

让我们回到原来的系统 (9.2.1) 并给出点 O 附近轨线的完全描述. y – 变量上的动力学十分简单: 它被指数式地收敛于零所控制 [见不等式 (9.1.4)]. x – 坐标上的动力学描述如上. 因此我们有:

(1) 如果第一个非零 Lyapunov 量的指标数是偶数, 这样的平衡态称为**鞍 – 结点**, 此外, 如果 $l_2 \neq 0$, 则称它为**简单鞍 – 结点**. 这里强稳定流形 W^{ss} 将点 O 的邻域划分为两个子域: 结点子域和鞍点子域. 在结点子域内的所有轨线都沿着主方向

$y=0$ 趋于 O. 在鞍点子域内的所有轨线除了一条当 $t\to-\infty$ 时趋于 O 以外都在 O 附近通过 (图 9.2.2).

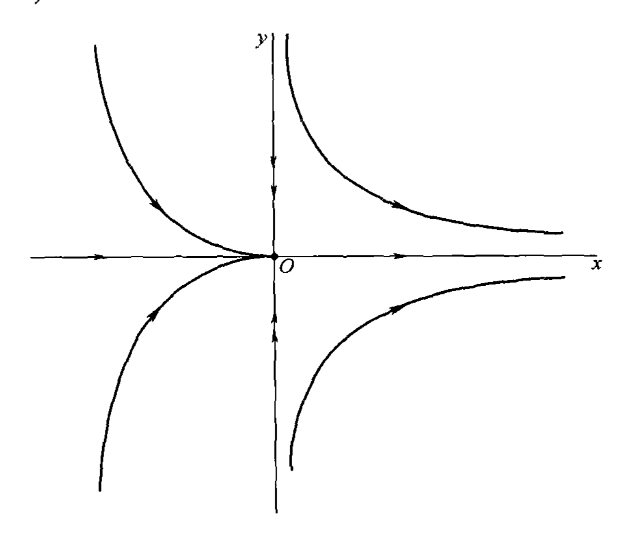


图 9.2.2 平面中的鞍 - 结点.

在三维情形, W^{ss} 中的所有轨道当 $t\to+\infty$ 时都指数式地趋于 O: 如果矩阵 A 的最大 (最靠近虚轴) 特征值 γ_1 是实数, 则点 O 是 W^{ss} 中的稳定结点 [见图 9.2.3(a)]; 反之, 如果 γ_1 是复数, 则 O 是 W^{ss} 中的稳定焦点 [见图 9.2.3(b)].

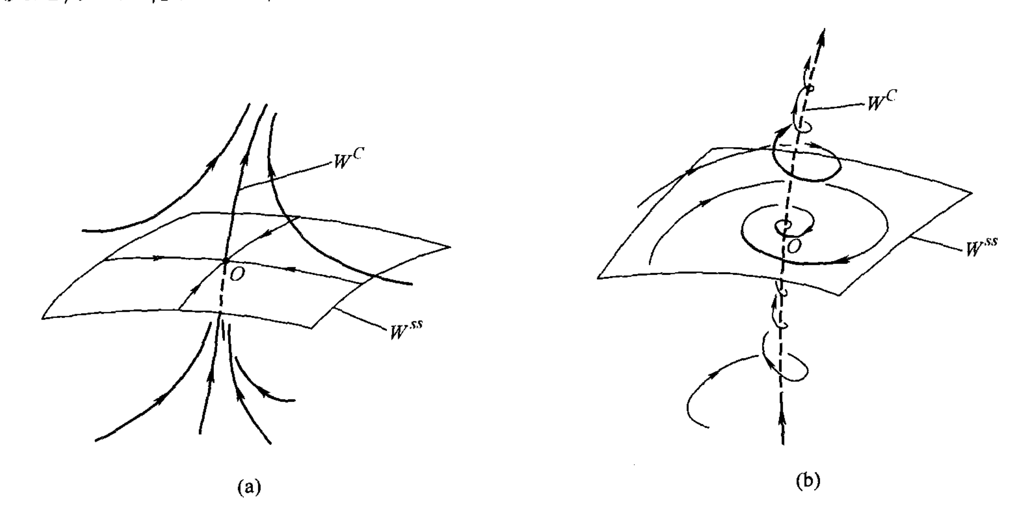


图 9.2.3 $\mathbb{R}^3$ 中两个 $l_{2p}\neq 0$ 的拓扑相同的鞍 - 结点例子. 限制在 W^{ss} 上, 点 O 是稳定结点 (a), 或是稳定焦点 (b).

(2) 如果第一个非零 Lyapunov 量是负的且有奇数指标, 即 $l_k<0, k=2p+1$, 则平衡态稳定. 所有轨线当 $t\to+\infty$ 时都趋于 O. 此外, 位于强稳定流形 W^{ss} 上的轨

线沿着 W^C 收敛于 O, 如图 9.2.4(a) 所示. 与结构稳定结点不同的是, 这里的收敛性不是指数式.[2]

(3) 如果第一个非零 Lyapunov 量是正数, 且它的指标数是奇数, 即 $l_k > 0, k = 2p+1$, 则平衡态 O 有鞍点 $(n-1,1)$ 的拓扑型 (见 2.5 节). 这里分支点的不稳定流形与 W^C 重合, 如图 9.2.4(b) 所示.

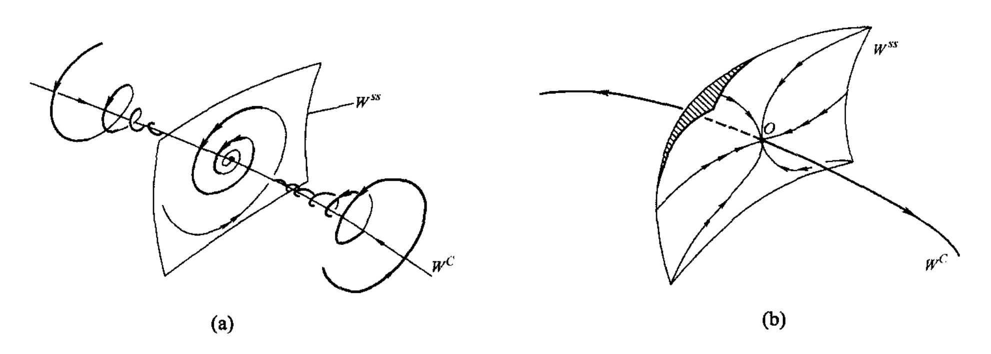


图 9.2.4 $l_{2p+1} \neq 0$ 时的退化平衡态. 中心流形在这里沿着两个方向延伸. 这样的分支称为**叉分支**, 对于由于对称性在退化平衡态的第一个非零 Lyapunov 量总是奇次的系统, 这样的分支是典型的.

注意, 为了计算第一个非零 Lyapunov 量, 我们不需要将系统化到中心流形上. 如果原系统有形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x,y), \\ \dot{y} &= Ay + f(x,y), \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

且满足 $f'(0,0)=0$ 和 $g'(0,0)=0$, 其标准的方法如下: 首先考虑系统方程

$$Ay + f(x,y) = 0. \tag{9.2.7}$$

由于 $\det A \neq 0$ 且 $f(0,0)=0, f'_y(0,0)=0$, 这个系统对 y 可求解:

$$y = \varphi(x). \tag{9.2.8}$$

函数 $\varphi(x)$ 的 Taylor 级数可以用待定系数法求得. 接下来我们可以计算 $g(x,\varphi(x))$. 展开式

$$g(x,\varphi(x)) = l_k x^k + \cdots \tag{9.2.9}$$

中第一个非零系数就是所求的第一个非零 Lyapunov 量.

对二阶系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots = g(x,y), \\ \dot{y} &= -\lambda y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \cdots = -\lambda y + f(x,y), \end{aligned}$$

[2] 积分 (9.2.5) 式, 我们有 $x \sim C||t||^{-1/2p}$.

其中 $\lambda > 0$, 第一个 Lyapunov 量简单地等于 a_{20}.

如果一般形式 $(ab \neq 0)$

$$\dot{x} = ax + by + g(x, y),$$
$$\dot{y} = cx + dy + f(x, y),$$

的线性部分中 $ad - bc = 0, a + d < 0$, 函数 f 和 g 从二次项开始 (如对前一个系统), 则计算 l_2 的公式比较复杂:

$$l_2 = a_{20} \cdot bd - a_{11}ad + a_{02}ac - b_{20}b^2 + b_{11}ab - b_{02}a^2.$$

我们证明公式 (9.2.9) 给出我们的 Lyapunov 量. 事实上由定义, 表达式

$$g(x, \Phi(x)) = l_k x^k + \cdots \tag{9.2.10}$$

中第一个非零系数就是 Lyapunov 量, 其中 $y = \Phi(x)$ 是中心流形的方程. W^C 关于系统 (9.2.6) 的不变性条件为

$$A\Phi(x) + f(x, \Phi(x)) = \Phi'(x)g(x, \Phi(x)). \tag{9.2.11}$$

比较 (9.2.7), (9.2.8) 和 (9.2.11) 我们得到

$$\varphi(x) - \Phi(x) \sim \Phi'(x)g(x, \Phi(x)),$$

即 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 之差 [因此 $g(x, \Phi(x))$ 和 $g(x, \varphi(x))$ 之差] 关于 $g(x, \Phi(x))$ 是高阶小量. 因此, 函数 $g(x, \Phi(x))$ 和 $g(x, \varphi(x))$ 的 Taylor 展开 (9.2.10) 和 (9.2.9) 的第一个非零项事实上重合.

由公式 (9.2.9) 得知, 如果系统 (9.2.6) 的右端解析, 且如果所有的 Lyapunov 量等于零, 则 $g(x, \varphi(x)) \equiv 0$. 所以, 由于 $y = \varphi(x)$ 是系统 (9.2.7) 的解, 故曲线 $y = \varphi(x)$ 被系统 (9.2.6) 的平衡态所充满. 因此, 它是这个系统的不变流形. 由于它在 O 与 $y = 0$ 相切, 由定义它是中心流形. 由此得知对所考虑的情形, 系统有由平衡态组成的解析中心流形 $W^C : y = \varphi(x)$, 如图 9.2.5 所示.

当系统仅仅光滑而不是解析时就不再成立. 例如具有平坦右端的 $\mathbb{C}^\infty$ – 光滑系统

$$\dot{x} = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
$$\dot{y} = -y$$

有唯一 (不稳定) 平衡态, 它所有的 Lyapunov 量都为零. 而另一个平坦系统

$$\dot{x} = \begin{cases} \sin(1/x)e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
$$\dot{y} = -y$$

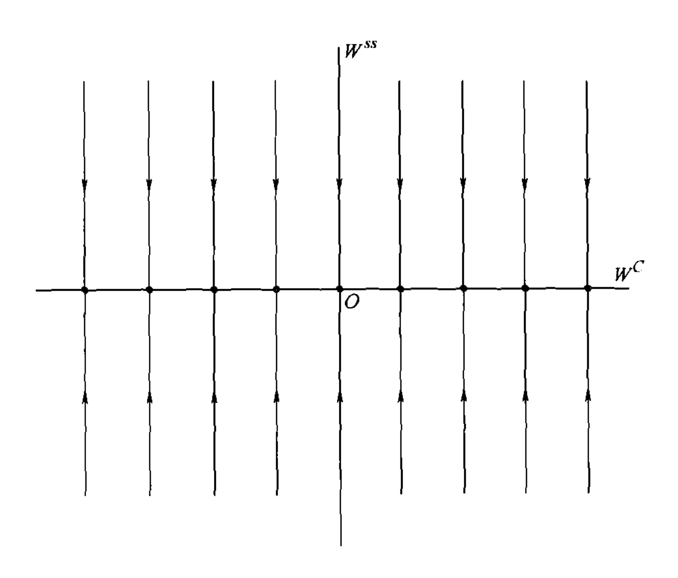


图 9.2.5 退化中心流形由平衡态组成.

有可数多个凝聚到原点的孤立平衡态.

平衡态的相图不能由 Taylor 展开的系数 (这意味着对 $\mathbb{C}^r$ - 光滑系统 $l_2 = \cdots = l_r = 0$, 或者对 $\mathbb{C}^\infty$ - 光滑系统所有 l_i 等于零) 确定时, 这样的平衡态称为**完全退化**的, 或者在 $\mathbb{C}^\infty$ 情形称为**无穷退化**的.

9.3 第二临界情形

设在原点的平衡态有一对纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. 这时系统在中心流形 W^C 上的限制写为下面形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\omega x_2 + g_1(x_1, x_2),\\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + g_2(x_1, x_2),\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

其中函数 $g_{1,2}$ 及其一阶导数在原点为零.

我们从计算系统 (9.3.1) 的规范形开始. 显然, 存在无穷多个如下类型的共振关系

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (q+1)\lambda_1 + q\lambda_2,\\ \lambda_2 &= q\lambda_1 + (q+1)\lambda_2,\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

其中 $q = 1, 2, \cdots$. 这意味着光滑的变量变换一般不能去掉单项式 $A_q x_1(x_1^2 + x_2^2)^q$ 和 $B_q x_2(x_1^2 + x_2^2)^q$ (见 2.9 节). 下面我们证明如何去掉直到任何有限次的其余项.

引理 9.1 对任何整数 $Q \geqslant 1$, 存在多项式变量变换将系统 (9.3.1) 化为

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\omega v + \sum_{q=1}^{Q}(L_q u - \Omega_q v)(u^2+v^2)^q + o(r^{2Q+1}),\\ \dot{v} &= \omega u + \sum_{q=1}^{Q}(L_q v + \Omega_q u)(u^2+v^2)^q + o(r^{2Q+1})\end{aligned} \tag{9.3.3}$$

(其中 $r=\sqrt{u^2+v^2}$), 或者在极坐标下为

$$\begin{aligned}\dot{r} &= L_1 r^3 + \cdots + L_Q r^{2Q+1} + o(r^{2Q+1}),\\ \dot{\theta} &= \omega + \Omega_1 r^2 + \cdots + \Omega_Q r^{2Q} + o(r^{2Q}).\end{aligned} \tag{9.3.4}$$

证明 作下面的变量变换

$$z = x_1 + ix_2, \quad z^* = x_1 - ix_2$$

将系统写为复数形式

$$\begin{aligned}\dot{z} &= i\omega z + \sum_{2\leqslant p+q\leqslant 2Q+1} C_{pq} z^p z^{*q} + o(|z|^{2Q+1}),\\ \dot{z}^* &= -i\omega z^* + \sum_{2\leqslant p+q\leqslant 2Q+1} C^*_{pq} z^{*p} z^q + o(|z|^{2Q+1}),\end{aligned} \tag{9.3.5}$$

其中 $*$ 表示复共轭. 这个形式更方便, 因为线性部分的矩阵是对角型的. 此外, 我们可以忽略第二个方程, 因为它可从第一个方程得到.

接下来我们作变量变换

$$z = w + \sum_{p,q} \alpha_{pq} w^p w^{*q}, \quad 2 \leqslant p+q \leqslant 2Q+1, \tag{9.3.6}$$

其中 α_{pq} 是待定系数. 在新变量下这个方程为

$$\dot{w} = i\omega w + \sum_{2\leqslant p+q\leqslant 2Q+1} C'_{pq} w^p w^{*q} + o(|w|^{2Q+1}). \tag{9.3.7}$$

我们尝试消去尽可能多的系数 C'_{pq}. 将 (9.3.6) 代入 (9.3.5) 并按照 (9.3.7) 的表达式替换 $\dot{w}$ 和 $\dot{w}^*$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\left\{1 + \sum_{p,q}\alpha_{pq} p w^{p-1} w^{*q}\right\} \cdot \left[i\omega w + \sum_{p,q} C'_{pq} w^p w^{*q}\right]\\ &+ \sum_{p,q}\alpha_{pq} q w^p w^{*q-1}\left[-i\omega w^* + \sum_{p,q} C'^*_{pq} w^{*p} w^q\right]\\ =\ & i\omega\left[w + \sum_{p,q}\alpha_{pq} w^p w^{*q}\right] + \sum_{p,q} C_{pq}(w+\cdots)^p (w^*+\cdots)^q + o(|w|^{2Q+1}).\end{aligned}$$

令 $w^p w^{*q}$ 的系数相等, 对 $p+q=2$, 我们得到

$$i\omega\alpha_{pq}w^p w^{*q} + C'_{pq}w^p w^{*q} - i\omega\alpha_{pq}qw^p w^{*q} = i\omega\alpha_{pq}w^p w^{*q} + C_{pq}w^p w^{*q},$$

因此,

$$C'_{pq} = C_{pq} - i\omega\alpha_{pq}[p-q-1]. \tag{9.3.8}$$

显然如果

$$p \neq q+1, \tag{9.3.9}$$

然后令

$$\alpha_{pq} = \frac{C_{pq}}{i\omega(p-1-q)}, \tag{9.3.10}$$

则有 $C'_{pq}=0$. 对 $p+q=2$, 条件 (9.3.9) 总满足. 因此如果 (9.3.6) 中的系数 α_{pq} 由 (9.3.10) 给出, 则在新变量下系统 (9.3.7) 中就没有二次项.

令 $w^p w^{*q}$ 的系数相等, 对 $p+q=3$, 我们得到

$$C'_{pq} = C_{pq} - i\omega\alpha_{pq}[p-q-1] + \cdots, \tag{9.3.11}$$

其中省略号表示仅依赖于 α_{pq} 的项, 对于它们 $p+q=2$ (我们已经通过 (9.3.10) 求得). 在这种情形下, 对满足条件 (9.3.9) 的 p 和 q 我们也可以求得 α_{pq}, 使得在新变量下系数 C'_{pq} 变成零:

$$\alpha_{pq} = \frac{C_{pq}+\cdots}{i\omega(p-1-q)},$$

其中省略号与上面的意义相同.

只有一个 “永恒的” 单项式是第一个共振项 $(C_{21}+\cdots)w^2w^*$ $(p=2, q=1)$. 由于 C'_{21} 与 α_{21} 无关, 我们可以在 (9.3.6) 中令 $\alpha_{21}=0$.

对 $(p+q)$ 的更大值, 表达式 (9.3.11) 仍成立, 此时省略号表示仅依赖于 $\alpha_{p'q'}$ 的项, 对于它们, $p'+q'<p+q$. 因此, 继续上面相同的方法, 我们可以明确地求得适当的变量变换以消去所有 $(p+q)$ 为偶数的单项式, 以及所有 $(p+q)$ 为奇数的非共振单项式. 最后, 只有形如 $(C_{q+1,q}+\cdots)w^{q+1}w^{*q}$ 的共振单项式还保留. 显然, 这个过程可以扩展到 $(p+q)$ 的任何值.

最后, 方程 (9.3.7) 取形式

$$\dot{w} = i\omega w + C'_{21}w^2w^* + \cdots + C'_{Q+1,Q}w^{Q+1}w^{*Q} + o(w^{2Q+1}). \tag{9.3.12}$$

代入 $w=u+iv$ 得出所需要的系统 (9.3.3), 其中 $L_q = \operatorname{Re} C'_{q+1,q}$, $\Omega_q = \operatorname{Im} C'_{q+1,q}$.

系统 (9.3.5) 或 (9.3.4) 是第二临界情形的**规范形**. 系数 L_q 称为 **Lyapunov 量**. 由上面的过程看到为了计算 L_q, 需要知道方程 (9.3.1) 直到 $p+q=2Q+1$ 阶的 Taylor 展开.

设 $L_1 = \cdots = L_{k-1} = 0, L_k \neq 0$. 这时规范形是

$$\dot{r} = L_k r^{2k+1}(1+\varphi(r,\theta)),$$
$$\dot{\theta} = \omega(1+\psi(r,\theta)),$$

其中当 $r \to 0$ 时 φ 和 ψ 趋于零. 通过时间变换

$$dt \to (1+\varphi(r,\theta))^{-1}dt,$$

我们得到新系统

$$\begin{aligned}\dot{r} &= L_k r^{2k+1},\\ \dot{\theta} &= \omega(1+\cdots),\end{aligned} \tag{9.3.13}$$

称它为**轨道规范形**.

如果 $L_k < 0$, 则当 $t \to +\infty$ 时轨线盘旋趋于 O, 如图 9.3.1 所示. 这时的平衡态称为**稳定复杂焦点**或**稳定弱焦点**. 我们注意到与稳定粗焦点相反, 这里轨线收敛于 O 不是指数式. 事实上, 从研究系统 (9.3.13) 得知

$$r \sim t^{-1/2k}, \tag{9.3.14}$$

$$\theta \sim \omega t. \tag{9.3.15}$$

其中任何轨线是 $r \sim \theta^{-1/2k}$ 形. 它不是对数螺线, 特别地当 $r \to 0$ 时它的长度趋于无穷.

如果 $L_k > 0$, 原点是不稳定平衡态, 因为从靠近它处出发的轨线当时间增加时盘旋离开. 对二维系统 (9.3.1) 点 O 称为**不稳定复杂 (弱) 焦点**.

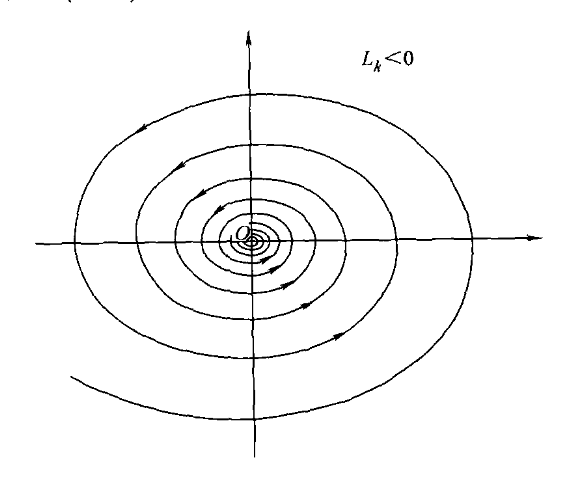


图 9.3.1 $\mathbb{R}^2$ 中的稳定 ($L_k < 0$) 弱焦点. 当 $L_k > 0$ 时, 轨线按逆时针方向盘旋离开原点的邻域.

回到原来的高阶系统 [见 (9.1.1)—(9.1.3)], 我们注意到如果第一个非零 Lyapunov 量是负数, 则轨线的性态与稳定粗焦点附近的性态定性地相同, 如图 9.3.2(a) 所示.

如果第一个非零 Lyapunov 量是正的, 且所有非临界特征指数 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ 位于复平面虚轴的左边, 则平衡态是**复杂鞍 – 焦点**, 如图 9.3.2(b) 所示. 它的稳定流形是 W^{ss}, 不稳定流形与中心流形 W^C 重合. 既不在 W^{ss} 上也不在 W^C 上的轨线通过平衡态附近.

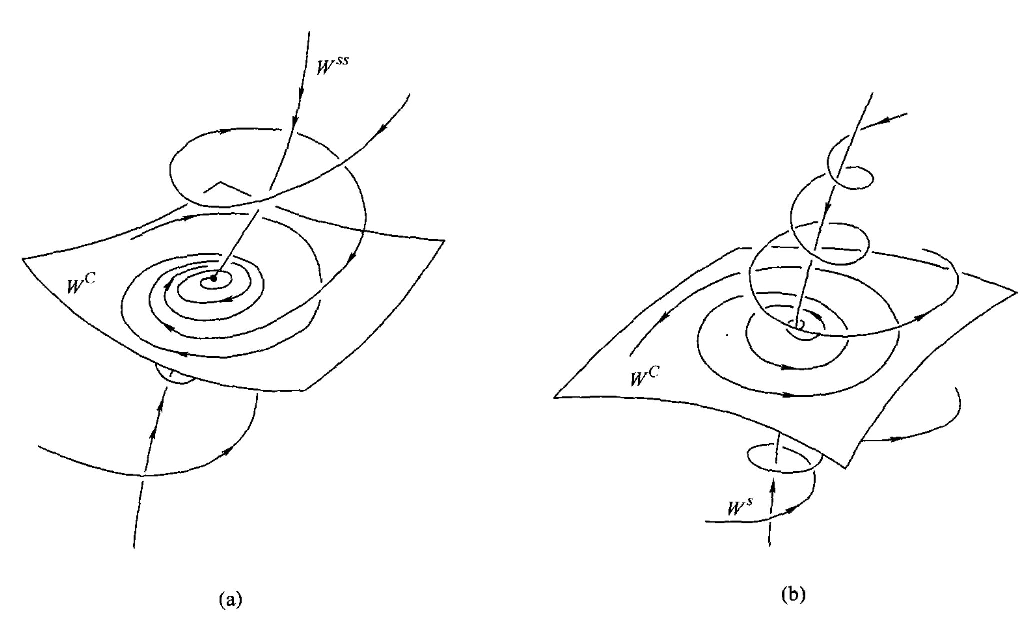


图 9.3.2　$\mathbb{R}^3$ 中两个相反情形的描述. (a) 当 $L_k<0$ 时平衡态在稳定性边界上保持它的稳定性; (b) 当 $L_k>0$ 时稳定平衡态变成 W^C 上的不稳定焦点, 从大范围看, 鞍 – 焦点稳定流形 W^s 是 W^{ss}.

Bautin [24] 第一个借助系统 (9.3.1) 的系数推导了表达第一个 Lyapunov 量的公式. 如果我们把系统写为

$$\dot{x}=ax+by+P_2(x,y)+P_3(x,y)+\cdots,$$

$$\dot{y}=cx+dy+Q_2(x,y)+Q_3(x,y)+\cdots,$$

其中 $ad-bc>0, a+d=0$, 以及

$$P_2(x,y)=a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,$$

$$Q_2(x,y)=b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2,$$

$$P_3(x,y)=a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3,$$

$$Q_3(x,y)=b_{30}x^3+b_{21}x^2y+b_{12}xy^2+b_{03}y^3,$$

则有公式

$$L_1 = -\frac{\pi}{4b\omega^3}\{[ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20})]$$
$$+c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02})$$
$$-b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})$$
$$-(a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - b_{21}b)]\},$$

其中 $\omega^2 = ad - bc$.

为了在高维情形计算 L_1, 我们必须首先推导在中心流形上具有直到三次项精度的系统, 然后利用上面的公式计算 L_1. 在 L_1 为零的情形, 计算第二个 Lyapunov 量 L_2, 要求再构造直到下一个奇次项, 即 五次项, 等等精度的中心流形.

我们指出, 利用 (9.3.13) 中 r – 变量的尺度化, 可以使得 L_k 的绝对值等于 1. 同时, 显然第一个非零 Lyapunov 量的符号 (以及指标数) 不被变量与时间的非奇异变换所改变. 这个符号决定所给平衡态是否稳定, 而指标数则决定轨线收敛于零的速度 [见 (9.3.14)].

所有 Lyapunov 量为零时轨线的性态仅在解析情形才可描述.

定理 9.3 如果所有的 Lyapunov 量都等于零, 则相应的解析系统有解析不变(中心) 流形, 它被围绕原点的闭轨线所充满, 如图 9.3.3 所示. 在中心流形上系统有下面形式的全纯积分

$$U = \frac{x_1^2}{2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{2} + V(x_1, x_2),$$

其中函数 V 从三次项开始.

回忆平衡态邻域内的所有轨线是闭时, 这种平衡态称为**中心**. 中心在 Lyapunov 意义下稳定但不渐近稳定. 来自相当广泛的一类具有中心的系统是

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + f(x_1), \end{aligned} \tag{9.3.16}$$

其中 $f(0) = f'(0) = 0$. 容易看出, 系统 (9.3.16) 具有第一积分 (能量积分)

$$U = \frac{x_1^2}{2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} f(\xi)d\xi.$$

在 $\mathbb{C}^\infty$ 情形, 如果所有的 Lyapunov 量为零, 那么原点不一定是中心. 例如, 系统

$$\dot{r} = \begin{cases} e^{-1/r^2}, & r \neq 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$$
$$\dot{\theta} = \omega$$

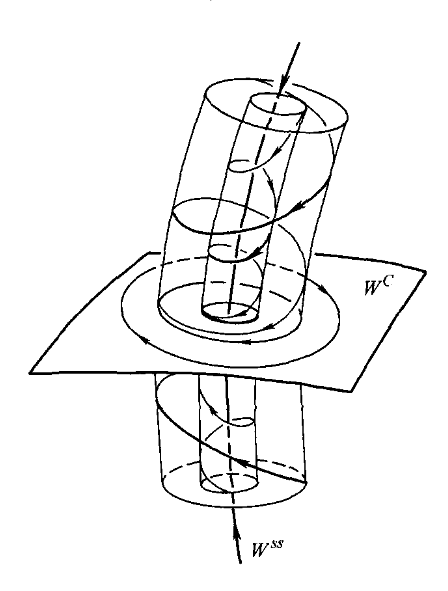


图 9.3.3　当解析系统中所有的 Lyapunov 量都为零时, 在 W^C 上的平衡态是中心. 在 $\mathbb{R}^3$ 中它的扩展邻域被不变柱面所叶化.

的平衡态渐近稳定. 相反, 对系统

$$\dot{r} = \begin{cases} e^{-1/r^2}\sin\left(\dfrac{1}{r}\right), & r \neq 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$$
$$\dot{\theta} = \omega,$$

原点的小邻域内包含无穷多个极限环.

第 10 章 周期轨线的稳定性边界上的动力系统性态

10.1 Poincaré 映射的简化. Lyapunov 函数

不像平衡态情形, 周期轨线的稳定性边界可有两种不同类型:

(1) 周期轨线在稳定性边界上存在. 它的乘子中至少有一个在单位圆上.

(2) 周期轨线在稳定性边界上消失.

这一章我们将集中讨论第一类稳定性边界.[1] 由于在这种情形下周期轨线在临界时刻得到保持, 我们可以构造一个小截面, 将我们的问题化为对 Poincaré映射的研究. 在截面上的某些适当的坐标下 Poincaré 映射可写为形式

$$\begin{aligned} \bar{x} &= Bx + G(x,y), \\ \bar{y} &= Ay + f(x,y), \end{aligned} \tag{10.1.1}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_m), m\neq 0, y=(y_1,\cdots,y_n)$, f 和 g 属于 $\mathbb{C}^r$ 类, $r\geqslant 1$, 且它们与它们的一阶导数在原点为零. 矩阵 B 的特征方程

$$\det(B-\rho I)=0$$

有 m 个根 $\rho_1,\cdots,\rho_m$, 它们的绝对值都等于 1. 矩阵 A 的特征方程

$$\det(A-\rho I)=0$$

[1] 第二类边界对应于周期轨道与平衡态 (11.5 节), 或同宿回路, 或蓝天突变 (12 和 13 章) 的结合.

的根 $\rho_{m+1},\cdots,\rho_{n+m}$ 严格位于单位圆内.

在这一章, 我们只限于考虑下面的三个主要情形:

(1) 只有一个乘子在单位圆上且等于 1 $(m=1,\rho_1=1)$.

(2) 只有一个乘子在单位圆上且等于 -1 $(m=1,\rho_1=-1)$.

(3) 有一对 (复共轭) 乘子在单位圆上 $(m=2,\rho_{1,2}=e^{\pm i\omega},0<\omega<\pi)$.

如果矩阵 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 相应的特征方程

$$\Delta(\rho)=\rho^{m+n}+b_1\rho^{m+n-1}+\cdots+b_{m+n}=0$$

给定, 则第一和第二临界情形分别由条件 $\Delta(1)=0$ 和 $\Delta(-1)=0$ 或者

$$1+b_1+\cdots+b_{m+n}=0$$

和

$$(-1)^{m+n}+b_1(-1)^{m+n-1}+\cdots+b_{m+n}=0$$

确定. 另外我们必须确保特征方程的其它根位于单位圆内.

为了推导对应于第三个情形的条件, 我们作变量变换 $\rho=(1+\lambda)/(1-\lambda)$. 位于单位圆内的 ρ 值对应于在开的左半平面中的 λ 值. 在单位圆上的 ρ 对应于在虚轴上的 λ. 因此当多项式

$$\Delta\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)(1-\lambda)^{m+n}\equiv a_0\lambda^{m+n}+a_1\lambda^{m+n-1}+\cdots+a_{m+n} \tag{10.1.2}$$

恰有两个纯虚根, 并且其余的位于虚轴的左边, 这时我们有第三临界情形. 对系数 a_i 相应的条件在第 9 章 (当 $a_0=1$) 已经给出. 一般地, 这个条件是

$$\Delta_{n-1}=0,\quad a_0a_n>0,\quad a_0^k\Delta_k>0,\quad k=1,\cdots,n-2,$$

其中 Δ_k 是多项式 (10.1.2) 的 Routh-Hurwitz 行列式.

对三维系统 (即二维 Poincaré 映射), 特征方程是

$$\rho^2+b_1\rho+b_2=0,$$

稳定性边界的确定如下:

- 第一临界情形 $(\rho=1)$

$$b_1+b_2=-1,\quad |b_2|<1. \tag{10.1.3}$$

- 第二临界情形 $(\rho=-1)$

$$b_1=b_2+1,\quad |b_2|<1. \tag{10.1.4}$$

- 第三临界情形 ($\rho = e^{\pm i\omega}$)

$$b_2 = 1, \quad |b_1| < 2. \tag{10.1.5}$$

为了推导最后一个条件, 我们将 $\rho = e^{i\omega}$ 代入特征方程得到

$$e^{2i\omega} + b_1 e^{i\omega} + b_2 = 0,$$

或者

$$\begin{cases} \cos 2\omega + b_1 \cos\omega + b_2 = 0 \\ \sin 2\omega + b_1 \sin\omega = 0. \end{cases}$$

我们求得 $b_1 = -2\cos\omega, b_2 = -\cos 2\omega + 2\cos^2\omega$, 由此得到 (10.1.5).

如果系统是由 $\mathbb{R}^3$ 中的微分方程表示, 那么周期轨线的乘子之积必须是正的, 即 $b_2 > 0$. 在 (b_1, b_2) – 平面上由 (10.1.3) — (10.1.5) 得到三维系统周期轨线的稳定性区域是由梯形组成, 与之相对照的是, 任意二维映射不动点的稳定区域是三角形, 如图 10.1.1 所示. 二重乘子 $\rho_1 = \rho_2 = 1$ 和 $\rho_1 = \rho_2 = -1$ 的情形分别对应于三角形的两个顶点 A 和 B, $\rho_1 = 1, \rho_2 = -1$ 的情形对应于顶点 C.

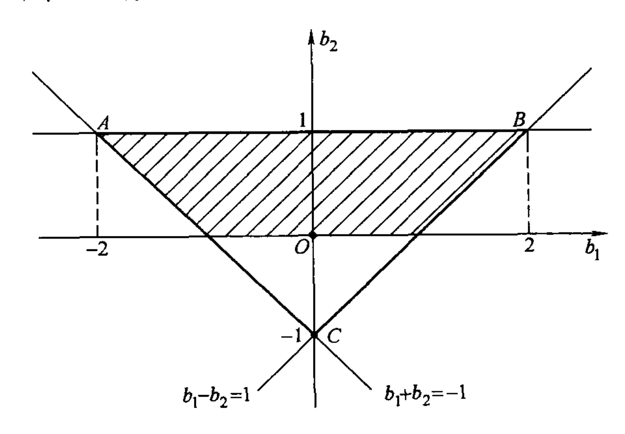


图 10.1.1 二维微分同胚的稳定性区域.

如在第 5 章证明的, 临界不动点 $O(0,0)$ 位于由方程 $y = \Phi(x)$ 定义的不变 $\mathbb{C}^r$ – 光滑中心流形 W^C 上, 其中 Φ 以及它的一阶导数在原点为零. 此外下面的约化定理成立:

在不动点 O 的邻域内, 存在 $\mathbb{C}^{r-1}$ 类的变量变换使得在新变量下 Poincaré 映射取标准形式

$$\bar{x} = Bx + g(x), \tag{10.1.6}$$

$$\bar{y} = [A + F(x, y)]y, \tag{10.1.7}$$

其中$g(x) \equiv G(x, \Phi(x)) \in \mathbb{C}^r, F(x,y) \in \mathbb{C}^{r-1}, F(0,0) = 0.$

在这新变量下中心流形 W^C 由 $y=0$ 定义, 强稳定流形 W^{ss} 由 $x=0$ 定义.

约化定理允许我们在不动点附近研究与 y- 变量无关的临界变量 x 的动力学. 由于对 y- 子空间, 动力学相对简单: 因为 x- 变量按范数很小, (10.1.3) 中的函数 F 也很小, 因此下面的估计

$$\|\bar{y}\| \leqslant \rho\|y\|$$

成立, 其中 $1>\rho>\max|\rho_j|$ $(j=m+1,\cdots,m+n)$. 这意味着每条轨线都以指数式收敛于中心流形.

因此, 原映射 (10.1.1) 的不动点的稳定性等价于在中心流形上映射 (10.1.6) 的不动点的稳定性, 对此我们形式地叙述如下:

定理 10.1 如果不动点 O 在中心流形 W^C 上 Lyapunov 稳定, 则对原映射 (10.1.1) 它也是稳定的. 如果不动点在中心流形上渐近稳定, 则原系统的不动点也渐近稳定. 如果不动点在中心流形 W^C 上不稳定, 则对原映射它也不稳定.

研究临界不动点的稳定性的基本工具是 Lyapunov 函数.

定义 10.1 定义在 O 的某邻域 D 内的连续函数 $V(x)$ 称为系统 (10.1.6) 的 Lyapunov 函数, 如果下面的条件满足:

(1) $V(0)=0.$ (10.1.8)

(2) $V(x)>0$, 如果 $x\neq 0.$ (10.1.9)

(3) $V(\bar{x})\leqslant V(x)$, 对$x\neq 0.$ (10.1.10)

定理 10.2 如果存在满足条件 (10.1.8) — (10.1.10) 的函数 $V(x)$, 那么不动点 Lyapunov 稳定. 进一步, 如果不等式 (10.1.10) 对所有 $x\neq 0$ 严格成立, 则 D 内所有正半轨线都趋于 O, 即点 O 渐近稳定.

我们略去它的证明, 因为它与平衡态稳定性的定理 9.2 的证明相同.

10.2 第一临界情形

只有一个乘子 (+1) 在单位圆上的情形, Poincaré 映射有形式

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x+g(x)\\ \bar{y} &= [A+F(x,y)]y,\end{aligned} \tag{10.2.1}$$

其中 x 是数量, 以及

$$g(0)=g'(0)=0, \quad F(0,0)=0.$$

中心流形 W^C 是一维, 故在 W^C 上这个映射可写为形式

$$\bar{x}=x+g(x)=x+l_2x^2+l_3x^3+\cdots. \tag{10.2.2}$$

函数 $g(x)$ 在 O 的 Taylor 展开中的系数 $l_2, \cdots, l_k$ 称为 **Lyapunov 量**.

我们研究这个映射的轨线性态. 设 k 是第一个非零 Lyapunov 量的指标, 即 $l_2 = \cdots = l_{k-1} = 0$, $l_k \neq 0$. 于是映射 (10.2.2) 取形式

$$\bar{x} = x + l_k x^k (1 + o(1)). \tag{10.2.3}$$

如果 k 是偶数, $k = 2p$, 则不动点 O 不稳定. 轨线在点 O 附近的性态由图 10.2.1(a) 中的 Lamerey 图刻画. 若 $l_k > 0$, 则对 O 左边的点 x_0 的正半轨线 $\{x_j\}_{j=0}^{j=\infty}$ 当 $j \to +\infty$ 时趋于 O. 对 O 右边的任何点 x_0 存在 $J > 0$ 使得 x_J 跑出 O 的邻域. 若 $l_k < 0$ (用映射 $x \to -x$ 将这种情形化为上一情形), 则从正 x 出发的轨线当 $j \to +\infty$ 时趋于 O, 但从负 x 这边点 O 是不稳定的, 见图 10.2.1(b).

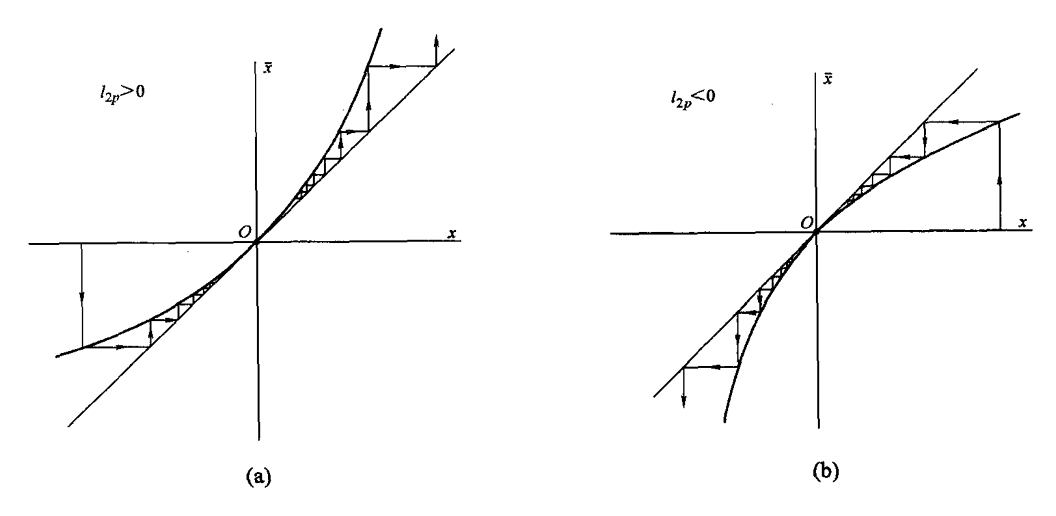


图 10.2.1 (a) 情形 $l_{2p} > 0$ 和 (b) 情形 $l_{2p} < 0$ 的 Lamerey 图.

如果 k 是奇数, $k = 2p + 1$, 则映射有形式

$$\bar{x} = x + l_{2p+1} x^{2p+1} (1 + o(1)). \tag{10.2.4}$$

若 $l_{2p+1} < 0$, 则在 $x \neq 0$ 有 $|\bar{x}| = |x|(1 - |l_{2p+1}| x^{2p}(1 + o(1))) < |x|$. 这意味着 $|x|$ 是 Lyapunov 函数, 故不动点 O 渐近稳定, 如图 10.2.2(a) 所示. 反之, 若 $l_{2p+1} > 0$, 则 $|\bar{x}| > |x|$, O 不稳定, 如图 10.2.2(b) 所示.

原映射 (10.2.1) 的轨线性态如下:

情形 1 $l_2 = \cdots = l_{2p-1} = 0, l_{2p} \neq 0$.

强稳定流形 $W^{ss}: x = 0$ 将 O 的邻域划分为结点区域和鞍点区域. 在结点区域, 所有轨线沿着主方向 $y = 0$ 趋于 O [因为 y - 坐标以指数式递减而由 (10.2.3) x - 坐标递减慢于几何级数: $|\bar{x}| > (1 - \varepsilon)|x|$]. 在鞍点区域, 所有轨线除了在射线

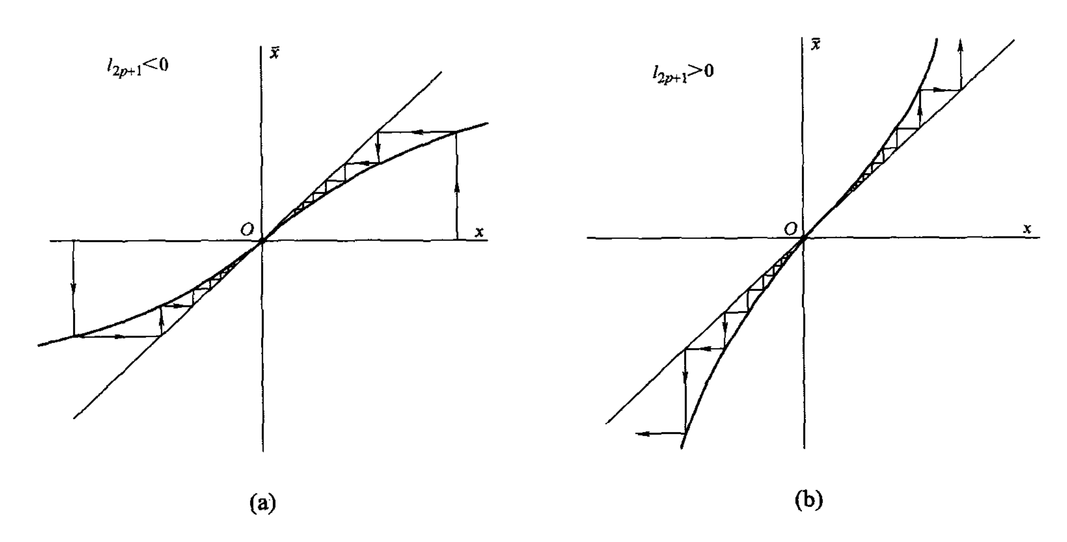


图 10.2.2　在原点的不动点 (a) 当 $l_{2p+1} < 0$ 时稳定, (b) 当 $l_{2p+1} > 0$ 时排斥.

W_+^C:$\{y=0, x \geqslant 0\}$ 上的那些都经有限次迭代后离开 O 的邻域 (见图 10.2.3). 在 W_+^C 中的轨线当 $j \to -\infty$ 时趋于 O. 因此, W_+^C 是 O 的**局部不稳定流形**. [2] 如同微分方程情形对应的临界平衡态, 所考虑的不动点 O 称为**鞍 – 结点**: $p=1$(即 $l_2 \neq 0$) 时为**简单鞍 –结点**, $l_2=0$ 时为**复杂** (或**退化**)**鞍 – 结点**.

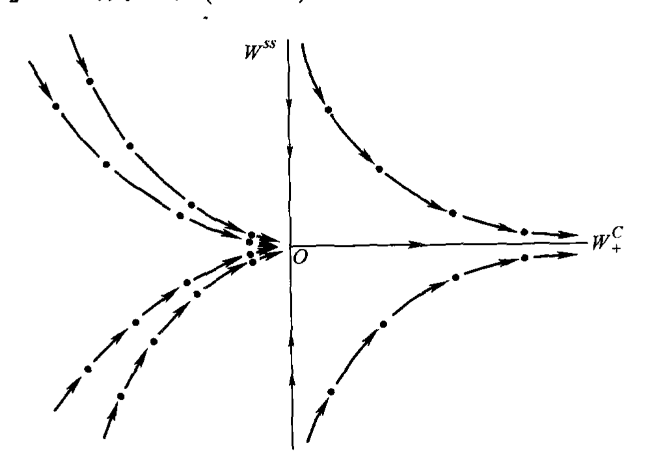


图 10.2.3　二维映射的鞍 – 结点迭代.

现在我们可以描述对应 Poincaré 映射不动点 O 的周期轨线 L 的小邻域内轨线的性态. 在二维情形, 轨线性态如图 10.2.4 所示, 在高维情形如图 10.2.5 所示. 强稳定不变流形 W_L^{ss} (在截面上从 W_O^{ss} 的点出发的轨线的并) 将 L 的邻域划分为结点区域和鞍点区域. 在结点区域, 所有轨线当 $t \to +\infty$ 时盘旋趋于 L, 故 L 在这个区

[2] 注意这是一个带边 (它是 O) 流形.

域是轨道稳定. 在鞍点区域, 每一条轨线经过有限时间都离开 L 的邻域, 除了在局部不稳定流形 $W^u_{\text{loc}}(L)$ 上当 $t \to -\infty$ 时趋于 L 的轨线. 这样的周期轨线也称为**鞍 – 结点周期轨线**. 对平面情形, 术语**半稳定极限环**或者 p- **重**(当 $l_2 = 0$ 时为**二重**)**极限环**更加典型.

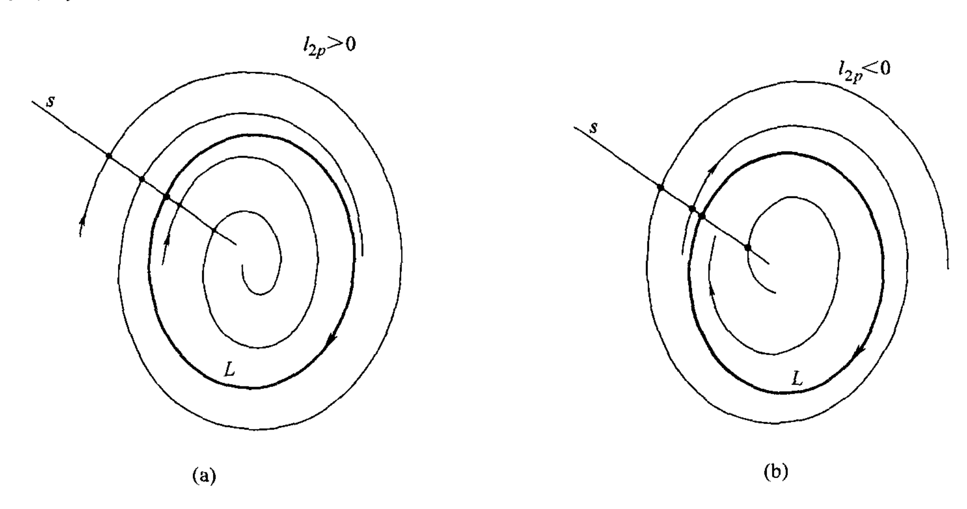


图 10.2.4 $\mathbb{R}^2$ 中的鞍 – 结点周期轨道: (a) 当 $l_{2p} > 0$ 时, 环 L 在区域内不稳定, 在区域外稳定. (b) 当 $l_{2p} < 0$ 时, 环对内部点吸引, 对外部轨线排斥.

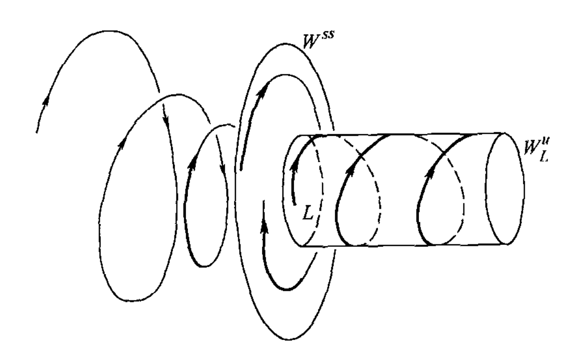


图 10.2.5 $\mathbb{R}^3$ 中的鞍 – 结点周期轨道. 它的强稳定不变流形将周期轨道邻域分成两个区域: 结点区域和鞍点区域. 在结点区域周期轨道稳定. 轨道的不稳定流形 W^u_L 同胚于半柱面. 我们将多次需要这个图像.

情形 2 $l_2 = \cdots = l_{2p} = 0,\ l_{2p+1} < 0.$

这时不动点渐近稳定. 所有不属于非主流形 $W^{ss}: x = 0$ 的轨线沿着主方向 $y = 0$ 进入 O, 如图 10.2.6(a) 所示. 对应于临界不动点的极限环邻域内轨线的性态如图 10.2.7(a) 所示. 高维图像看上去像粗稳定周期轨线, 但在临界情形没有指数式收敛于 L 的轨线.

情形 3 $l_2 = \cdots = l_{2p} = 0, l_{2p+1} > 0$.

这样的临界不动点称为**复杂 (退化) 鞍点**. 它的稳定流形是 W^C: $y = 0$, 不稳定流形 W^u 的方程是 $x = 0$, 如图 10.2.6(b) 所示. 这里, 在临界情形, 轨线定性地与粗不稳定环附近的相同, 如图 10.2.7(b) 所示.

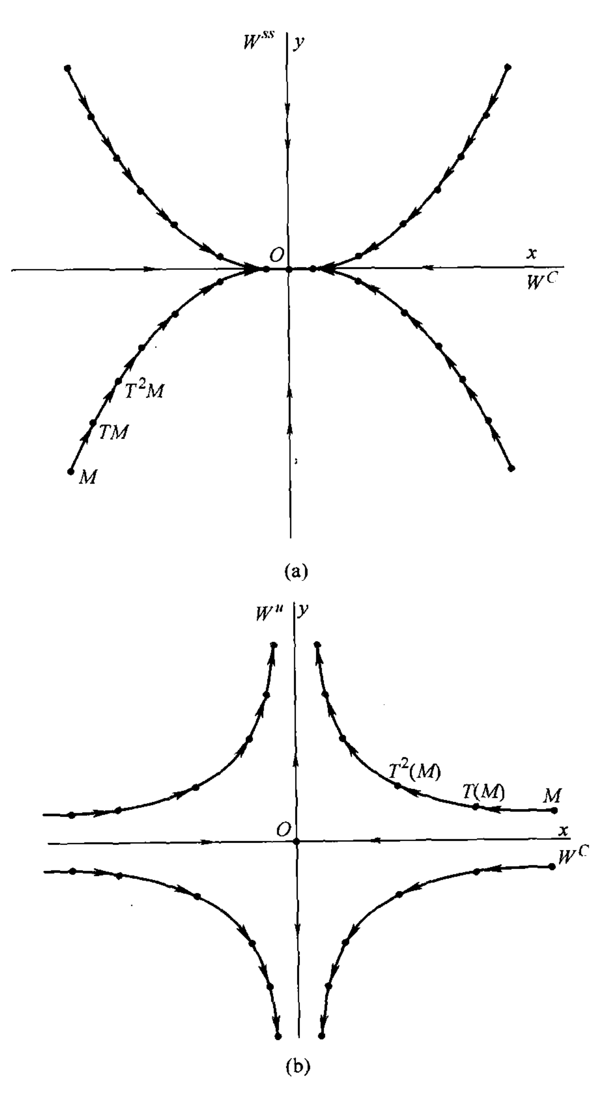


图 10.2.6 几何上临界结点 $l_{2p+1} < 0$ (a) 和粗稳定结点之间没有什么区别. 但是关于在原点附近轨线的收敛率可作出定量比较. 类似的观察也可以应用到粗鞍点不动点和 $l_{2p+1} > 0$ 时的临界鞍点 (b).

如果所有的 Lyapunov 量都等于零且映射是解析的, 则中心流形也解析, 并由不

中

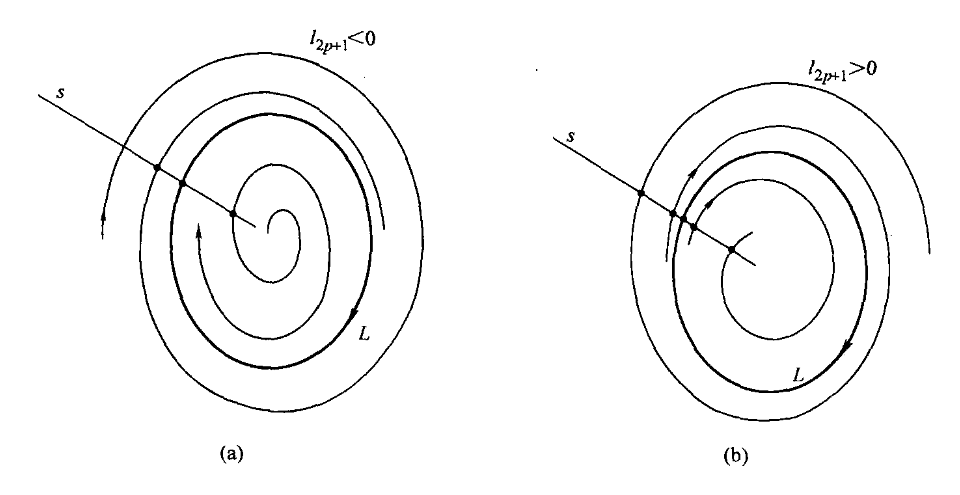


图 10.2.7 (a) 如果 $l_{2p+1}<0$, 分支极限环稳定. (b) 如果 $l_{2p+1}>0$, 分支极限排斥.

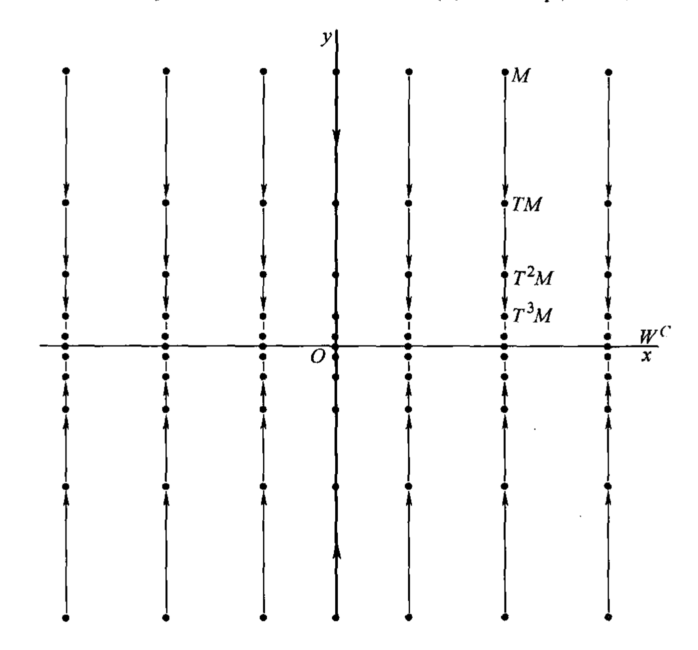


图 10.2.8 中心流形 W^C 被不动点所充满.

动点组成 (图 10.2.8). 注意到如果映射有形式

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + g(x,y), \\ \bar{y} &= Ay + f(x,y), \end{aligned} \tag{10.2.5}$$

则第一个非零 Lyapunov 量是 $g(x,\phi(x))$ 的 Taylor 展开式中的第一个非零系数, 其中 $y=\phi(x)$ 是方程

$$Ay + f(x,y) = 0 \tag{10.2.6}$$

的解. 因此如果所有的 Lyapunov 量都等于零, 则由 f 的解析性得知

$$f(x,\phi(x))\equiv 0. \tag{10.2.7}$$

从 (10.2.5) — (10.2.7) 我们可以得知解析曲线 $y=\phi(x)$ 整个地由不动点组成, 因此它是不变 (中心) 流形.

稳定不变叶层的叶片通过每个不动点 $M\in W^C$ (见第 5 章). 显然每个叶片是点 M 的稳定流形 W_M^{ss}, 在叶片上的轨线当 $j\to+\infty$ 时指数式收敛于 M.

在非解析情形, 当所有 Lyapunov 量为零时, 对映射的动力学很难作出任何一般的阐述 (这时的不动点称为**完全退化**,或者**无穷退化**).[3] 例如, 对映射

$$\begin{aligned}\bar{x}&=x+\begin{cases}xe^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\\ \bar{y}&=\frac{y}{2},\end{aligned}$$

原点是鞍点, 但是对映射

$$\begin{aligned}\bar{x}&=x+\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\\ \bar{y}&=\frac{y}{2},\end{aligned}$$

它是稳定的但不渐近稳定.

最后, 我们强调无穷退化的不动点是非常普通的. 事实上, (见 Gonchenko 等人的综合性文章 [62]) 在维数为 3 或更高的光滑动力系统空间中存在称为 Newhouse 区域的区域, 其中具有无穷退化周期轨线的系统处处稠密. 注意, 这些区域在具有单个非退化 (二次) 同宿切触的任何系统附近都存在, 这是在几乎所知道的任何一个具有复杂 (混沌) 性态模型中特有的现象. 概括地说, 我们可得出结论, 具有复杂性态的动力学模型在参数空间内都具有这样的区域, 其中系统任意小的扰动可以产生无穷退化的周期轨道 (可能有非常长的周期).

10.3 第二临界情形

在这种情形下 Poincaré映射的标准形式是

$$\begin{aligned}\bar{x}&=-x+g(x),\\ \bar{y}&=[A+f(x,y)]y,\end{aligned} \tag{10.3.1}$$

[3] 更确切地说, 如果 $l_2=\cdots=l_r=0$, $\mathbb{C}^r$ – 光滑映射的不动点称为是**完全退化**. 如果 l_i 的整个集合为零, $\mathbb{C}^\infty$ – 映射的不动点称为**无穷退化**.

其中 x 是数量变量, A 的所有特征值严格位于单位圆内, 函数 f 和 g 满足

$$g(0) = g'(0) = 0, f(0,0) = 0.$$

考虑中心流形 W^C 上的映射 T^C:

$$\bar{x} = -x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots . \tag{10.3.2}$$

乘子 ρ 等于 -1. 因此共振关系是

$$\rho = \rho^{2p+1}.$$

由于 x 的偶次幂不是共振项, 因此对应的直到任何有限次的项可用有限个光滑的变量变换消去 (见 3.13 节). 最后, 映射化为规范形

$$\bar{\xi} = -\xi(1 + l_1\xi^2 + \cdots + l_p\xi^{2p} + \cdots), \tag{10.3.3}$$

其中系数 l_j 是 Lyapunov 量. 第一个系数由公式

$$l_1 = a_2^2 + a_3$$

给出.

映射 T^C 的轨线的动力学依赖于第一个非零 Lyapunov 量. 如果 $l_k \neq 0$ 且对所有前面的 $j < k$ 有 $l_j = 0$, 则映射取形式

$$\bar{\xi} = -\xi(1 + l_k\xi^{2k} + \cdots). \tag{10.3.4}$$

由此得知, 若 $l_k < 0$, 则在原点的不动点 O 渐近稳定 (因为对 $\xi \neq 0$ 有 $|\bar{\xi}| < |\xi|$, 即 $|\xi|$ 是 Lyapunov 函数). 若 $l_k > 0$, 则点 O 不稳定. 图 10.3.1 (a) 和 (b) 分别显示负的和正的 l_k 相应的 Lamerey 图.

观察映射 (10.3.4) 的第二次迭代

$$\bar{\bar{\xi}} = \xi + 2l_k\xi^{2k+1} + \cdots \quad , \tag{10.3.5}$$

它与上一节考虑的映射有相同的形式 (情形 2 和 3).

对原映射 (10.3.1), 当 $l_k < 0$ 时, 不动点 O 是渐近稳定的, 当 $l_k > 0$ 时, 不动点 O 是鞍点. 在后一情形 O 的稳定和不稳定流形分别是 W^{ss} 和 W^C. 借助于微分方程系统的 Poincaré 映射, 对应的周期轨线 L 当 $l_k < 0$ 时稳定, $l_k > 0$ 时是鞍点的. 注意在鞍点情形, 周期轨线邻域内的二维不稳定流形 $W^C(L)$是 Möbius 带.

如果所有的 Lyapunov 量都等于零且系统是解析的, 则中心流形也解析, 其上的所有点除了 O 以外都是周期为 2 的周期点. 这意味着对微分方程系统存在不可定向的中心流形, 它是中线为环 L 的 Möbius 带, 且被周期接近于 L 周期的 2 倍的周期轨道所充满 (见图 10.3.2).

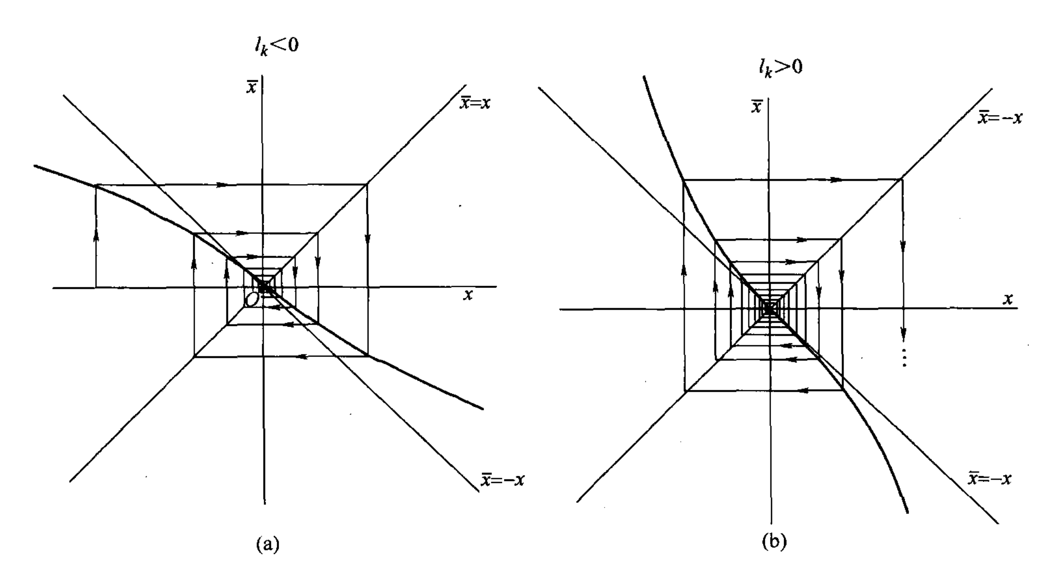


图 10.3.1 Lamerey 螺线: (a) $l_k<0$ 时原点稳定. (b) $l_k>0$ 时原点不稳定.

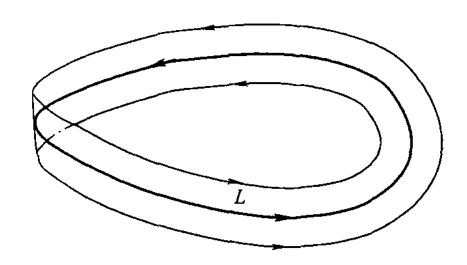


图 10.3.2 若所有的 Lyapunov 量都等于零, 则解析系统的原始周期轨道 L 的中心流形是 Möbius 带, 它被二重周期的周期轨道稠密地充满.

如果映射是 $\mathbb{C}^{2r+1}$ 类, 其中 $1\leqslant r\leqslant\infty$, 且如果所有 Lyapunov 量 $l_1,\cdots,l_r$ 都等于零, 则不动点 O 是**完全退化的**, 或当 $r=\infty$ 时为**无穷退化的**.

我们现在来叙述对没有被化为标准形式的映射的第一个非零 Lyapunov 量的算法. 首先将映射写为形式

$$\begin{aligned}\bar{x}&=-x+g(x,y),\\ \bar{y}&=Ay+f(x,y),\end{aligned}\tag{10.3.6}$$

其中

$$f(0,0)=0,\quad f'(0,0)=0,\quad g(0,0)=0,\quad g'(0,0)=0,$$

然后考虑它的第二次迭代

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}}&=x+\tilde{g}(x,y),\\ \bar{\bar{y}}&=A^2y+\tilde{f}(x,y),\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{g}(x,y) \equiv -g(x,y) + g(-x+g(x,y), Ay+f(x,y)),$$
$$\tilde{f}(x,y) \equiv Af(x,y) + f(-x+g(x,y), Ay+f(x,y)).$$

由隐函数方程

$$A^2y + \tilde{f}(x,y) = 0$$

将 y 表示为 $y=\tilde{\psi}(x)$. 于是所求的 Lyapunov 量等于函数 $\tilde{g}(x,\tilde{\psi}(x))$ 的 Taylor 展开

$$\tilde{g}(x,\tilde{\psi}(x)) = 2l_p x^{2p+1} + \cdots$$

中第一个系数的一半.

10.4 第三临界情形. 弱共振

假设周期轨道的两个乘子是共轭复数且在单位圆上. 在这种情形下 Poincaré 映射取形式

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1\cos\omega - x_2\sin\omega + g_1(x_1,x_2),\\ \bar{x}_2 &= x_1\sin\omega + x_2\cos\omega + g_2(x_1,x_2),\\ \bar{y} &= (A+f(x_1,x_2,y))y,\end{aligned} \tag{10.4.1}$$

其中 $0<\omega<\pi$, 且 A 的所有特征值位于单位圆内. 这里的中心流形是二维的, 在它上面映射由 (10.4.1) 前面两个方程

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1\cos\omega - x_2\sin\omega + g_1(x_1,x_2),\\ \bar{x}_2 &= x_1\sin\omega + x_2\cos\omega + g_2(x_1,x_2)\end{aligned} \tag{10.4.2}$$

定义, 其中 $g_{1,2}$ 以及它们的一阶导数在原点为零.

在原点的不动点的乘子是 $(\rho_1=e^{i\omega}, \rho_2=e^{-i\omega})$. 如同在平衡态具有一对纯虚特征指数的情形 (见 9.3 节), 存在共振类:

$$\rho_1 = \rho_1^{p+1}\rho_2^{p} \quad (\rho_2\equiv\rho_1^* = \rho_2^{p+1}\rho_1^{p}). \tag{10.4.3}$$

因此, 可以期望下面的项将出现在规范形的右端:

$$\begin{aligned}&(L_px_1 - \Omega_px_2)\,(x_1^2+x_2^2)^p,\\ &(L_px_2 + \Omega_px_1)\,(x_1^2+x_2^2)^p.\end{aligned} \tag{10.4.4}$$

我们称共振关系式 (10.4.4) 是**平凡的**. 此外, 如果 ω 是与 2π 可通约的, 即

$$\omega = \frac{2\pi M}{N},$$

其中 M 和 N 是没有公约数的正整数, 于是存在另外非平凡的共振关系式. 为找它们, 我们把共振关系写为具有未知数 p 和 q 的关系式:

$$\rho_1 = \rho_1^p \rho_2^q,$$

或者

$$e^{i\omega(p-q-1)} = 1. \tag{10.4.5}$$

对 (10.4.5) 两边取对数, 得

$$i\omega(p-q-1) = 2\pi i l,$$

其中 l 是整数. 将 $\omega = 2\pi M/N$ 代入, 我们得到

$$M(p-q-1) = Nl. \tag{10.4.6}$$

对每个整数 l, 当且仅当

$$p = q + Ns + 1 \tag{10.4.7}$$

时, 等式 (10.4.6) 满足, 其中 $s \in \mathbb{Z}$. 在 (10.4.7) 中我们将假定 $s \geqslant 0$. 否则, 对负的 s 将 (10.4.7) 写为形式

$$q = p + Ns - 1, \tag{10.4.8}$$

现在这里的 s 是正的. 注意, 在 (10.4.7) 中令 $s = 0$ 给出 $p = q + 1$, 它对应于平凡共振.

因此, 在 ω 与 2π 是可通约的情形, 带有项 (10.4.4) 的规范形具有由 $s > 0$ 的关系 (10.4.7) 和 (10.4.8) 确定的其它项.

为了构造规范形, 我们按照 9.3 节给出的相同方法并引入复变量使得线性部分变成对角形. 设

$$z = x_1 + i x_2,$$

将 (10.4.2) 写为

$$\bar{z} = e^{i\omega} z + \sum_{p,q} C_{pq} z^p z^{*q}. \tag{10.4.9}$$

下面我们应用变换

$$z = w + \sum_{s,t} \alpha_{st} w^s w^{*t} \tag{10.4.10}$$

使得在新变量下映射

$$\bar{w} = e^{i\omega} \left(w + \sum_{p,q} C'_{pq} w^p w^{*q} \right) \tag{10.4.11}$$

有尽可能多的零系数 C'_{pq}.

将 (10.4.10) 代入 (10.4.9) 并合并同类项 $w^p w^{*q}$ 的系数, 我们得到下面联系 C_{pq} 和 C'_{pq} 的关系式: 对 $p+q=2$ 为

$$C'_{pq} + \alpha_{pq}[e^{i\omega(p-q-1)} - 1] = e^{-i\omega} C_{pq}, \tag{10.4.12}$$

对 $p+q>2$ 为

$$C'_{pq} + \alpha_{pq}[e^{i\omega(p-q-1)} - 1] = e^{-i\omega} C_{pq} + S_{pq}(\alpha_{st}), \tag{10.4.13}$$

其中 $S_{pq}(\alpha_{st})$ 是仅依赖于 α_{st} 的某多项式, 指标 s 和 t 满足 $s+t<p+q$. 因此我们可以从 $p+q=2$ 开始计算系数 α_{pq}. 此外, 若

$$e^{i\omega(p-q-1)} \neq 1,$$

则若令

$$a_{pq} = \frac{e^{-i\omega} C_{pq} + S_{pq}}{e^{i\omega(p-q-1)} - 1},$$

对应的系数 C'_{pq} 可去除. 当 $p=q+1$, 或者如果关系式 (10.4.7)—(10.4.8) 之一成立, 则

$$e^{i\omega(p-q-1)} = 1,$$

因此, 一般 C'_{pq} 不能被去除. 在这种情形下, 我们令 $\alpha_{pq}=0$, 于是共振系数 C'_{pq} 通过

$$C'_{pq} = e^{-i\omega} C_{pq} + S_{pq}(\alpha_{st})$$

与 C_{pq} 相联系, 这里 S_{pq} 是 (10.4.13) 中的多项式.

关于 ω 与 2π 是否可通约对某些进一步的计算是方便的. 在**非共振情形**, 其中 $\omega/2\pi$ 为无理数, 这很简单, 因为在那里只出现平凡共振. 因此, 对任意给定的整数 p (不超过 $(r-1)/2$, 其中 r 是映射的光滑性次数), 多项式变换将映射化为形式

$$\bar{w} = e^{i\omega} w(1 + C'_{21}|w|^2 + \cdots + C'_{p+1,p}|w|^{2p}) + o(|w|^{2p+1}). \tag{10.4.14}$$

在极坐标 $w = Re^{i\varphi}$ 下, 映射 (10.4.14) 取形式

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R + L_1 R^3 + \cdots + L_p R^{2p+1} + o(R^{2p+1}), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega + \Omega_1 R + \cdots + \Omega_p R^{2p} + o(R^{2p}), \end{aligned} \tag{10.4.15}$$

其中 L_k 和 Ω_k 的值由 $C'_{j,j+1}$ 表示, $j \leqslant k$. 例如

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha_1, & \Omega_1 &= \beta_1, \\ L_2 &= \alpha_2 + \frac{\beta_1^2}{2}, & \Omega_2 &= \beta_2 - \frac{\beta_1\alpha_1}{2}, \end{aligned} \tag{10.4.16}$$

这里 $C'_{k+1,k} \equiv \alpha_k + i\beta_k$.

值 L_k 称为 **Lyapunov 量**.

定理 10.3 设 L_k 是第一个非零 Lyapunov 量 (对 $i<k$ 有 $L_k\neq 0, L_i=0$). 则当 $L_k<0$ 时不动点 O 渐近稳定, 当 $L_k>0$ 时它不稳定.

证明 由 (10.4.15) 我们有

$$\bar{R}=R(1+L_kR^{2k}+o(R^{2k})). \tag{10.4.17}$$

由此得知, 如果 $L_k<0$, 则 $\bar{R}<R$, 即 $V(R,\varphi)\equiv R$ 是 Lyapunov 函数, 因此不动点渐近稳定. 在情形 $L_k>0$ 我们有

$$R=\bar{R}(1-L_k\bar{R}^{2k}+o(\bar{R}^{2k})).$$

因此 $\bar{R}>R$. 故 R 是逆映射的 Lyapunov 函数, 从而得知不动点不稳定. 证明完毕.

注 由公式 (10.4.16) 得知, 在一般情形不动点的稳定性由量 $\mathrm{Re}\ C'_{21}\equiv L_1$ 确定. 若 $\mathrm{Re}\ C'_{21}<0$ 则不动点稳定. 反之, 当 $\mathrm{Re}\ C'_{21}>0$ 时不动点不稳定.

我们可以用下面的公式计算 C'_{21}:

$$C'_{21}=C_{20}C_{11}\frac{2e^{i\omega}-1}{1-e^{i\omega}}e^{-2i\omega}-2\frac{|C_{02}|^2}{1-e^{3i\omega}}-\frac{|C_{11}|^2}{1-e^{i\omega}}+C_{21}e^{-i\omega},$$

其中 C_{pq} 是 (10.4.9) 中的系数. 因此, 第一个 Lyapunov 量是

$$\begin{aligned}L_1=&\mathrm{Re}(C_{20}C_{11})\frac{\cos 3w-3\cos 2w+2\cos w}{2(1-\cos w)}\\&+\mathrm{Im}(C_{20}C_{11})\frac{\sin 3w-3\sin 2w+2\sin w}{2(1-\cos w)}\\&-|C_{02}|^2-\frac{1}{2}|C_{11}|^2+\mathrm{Re}\,C_{21}\cdot\cos w+\mathrm{Im}\,C_{21}\cdot\sin w.\end{aligned}$$

根据 Lyapunov 量的符号, 所考虑的不动点 O 称为**稳定复杂 (弱) 焦点**或者**不稳定复杂 (弱) 焦点**.

若 $L_k<0$, 则对原来的高维映射 (10.4.1), 不动点也是稳定焦点. 此外, 它的主流形与中心流形 W^C 重合. 这意味着所有的正半轨线, 除了在非主流形 W^{ss} 上的轨线, 都沿着在 O 切于 W^C 的螺线趋于 O. 对应于不动点 O 的周期轨道也渐近稳定. 附近轨线都围绕周期轨线卷绕地趋于它, 如图 10.4.1 所示.

在 Lyapunov 量 L_k 是正的情形, 原映射的不动点是**弱鞍 – 焦点**. 它的稳定和不稳定流形分别是 W^{ss} 和 W^C, 如图 10.4.2 所示.

在共振情形, 这时 $\omega=\dfrac{2\pi M}{N}$, 存在两类非平凡共振关系 (10.4.7) 和 (10.4.8) 以及平凡共振. 对相应的值 p 和 q, 公式 (10.4.12) 和 (10.4.13) 中的系数 α_{pq} 为零, 单

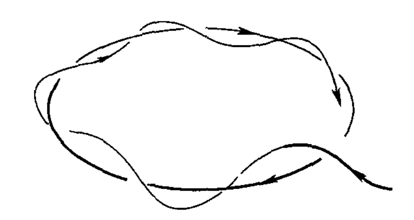


图 10.4.1 轨线卷绕着周期轨道趋于它.

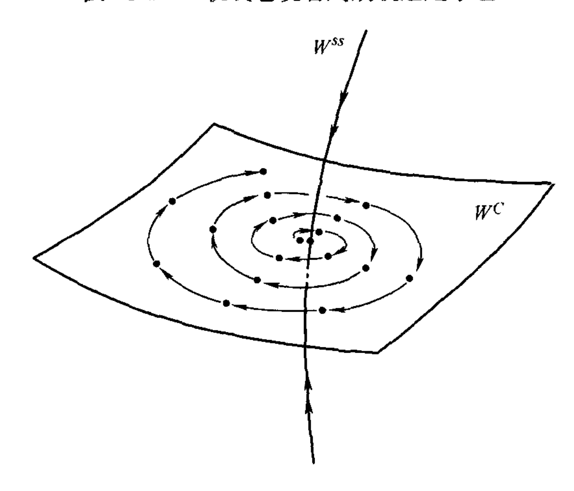


图 10.4.2 一个迭代的鞍 - 焦点.

项式 $w^p w^{*q}$ 在标准变换 (10.4.10) 下仍存在. 因此, 映射 (10.4.2) 变成下面的规范形

$$\begin{aligned}\bar{w} &= e^{2\pi iM/N}\Bigg(w + \sum_{p\geqslant 1} C'_{p+1,p} w^{p+1} w^{*p} + \sum_{p\geqslant 0, s\geqslant 1} C'_{p,p+Ns-1} w^p w^{*p+Ns-1} \\ &\quad + \sum_{q\geqslant 0, s\geqslant 1} C'_{q+Ns+1,q} w^{q+Ns+1} w^{*q}\Bigg) + o(|w|^{2P+1}) \\ &= e^{2\pi iM/N}\Bigg(w\Bigg(1 + \sum_{p\geqslant 1} C'_{p+1,p}|w|^{2p}\Bigg) + \sum_{s\geqslant 1} w^{*Ns-1} \sum_{p\geqslant 1} C'_{p,p+Ns-1}|w|^{2p} \\ &\quad + \sum_{s\geqslant 1} w^{Ns+1} \sum_{q\geqslant 1} C'_{q+Ns+1,q}|w|^{2q}\Bigg) + o(|w|^{2P+1}),\end{aligned} \tag{10.4.18}$$

其中和式取遍所有指标, 因此对某正整数 P, 单项式次数不超过 $(2P+1)$, P 可选择任意大, 但不得超过 $\dfrac{r-1}{2}$, r 是系统的光滑次数.

由依赖值 N 的公式 (10.4.18) 得知, 下面三种情形之一会发生:

(1) $N=3: \bar{w} = e^{2\pi i/3}(w + C'_{02} w^{*2}) + o(|w|^2)$.

(2) $N=4: \bar{w} = e^{\pi i/2}(w + C'_{21}|w|^2 w + C'_{03} w^{*3}) + o(|w|^3)$.

(3) $N \geqslant 5: \bar{w} = e^{2\pi iM/N}(w + C'_{21}|w|^2 w) + o(|w|^3)$.

我们看到在**强共振值** $\omega = \frac{2\pi}{3}$ 和 $\omega = \frac{\pi}{2}$ 的情形, 规范形的**主要阶**与其它 ω 的规范形是不同的. 在下一节我们将考虑强共振, 但现在我们先讨论**弱共振**的情形: $\omega = \frac{2\pi M}{N}$, , $N \geqslant 5$.

在给定的情形, 映射 (10.4.18) 可写为

$$\bar{w} = e^{2\pi iM/N}\left(w\left(1 + \sum_{p\geqslant 1} C'_{p+1,p}|w|^{2p}\right) + C'_{0,N-1}w^{*N-1}\right) + o(|w|^{N-1}), \tag{10.4.19}$$

其中的和式取遍所有满足 $2p+1 < N-1$ 的 p. 在极坐标下有

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R + L_1R^3 + \cdots + L_PR^{2P+1} + o(R^{N-2}),\\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega + \Omega_1R^2 + \cdots + \Omega_pR^{2P} + o(R^{N-3}),\end{aligned} \tag{10.4.20}$$

这里 P 是小于 $(N/2-1)$ 的最大整数.

公式 (10.4.20) 类似于非共振情形的公式 (10.4.14), 差别仅仅是在弱共振情形只有有限个 Lyapunov 量 $L_1, \cdots, L_P$ 有定义 (例如, 当 $N=5$ 仅L_1 有定义). 若这些 Lyapunov 量中至少有一个非零, 则定理 10.3 成立, 即依赖于第一个非零 Lyapunov 量的符号, 不动点或者是稳定复杂焦点, 或者是不稳定复杂焦点 (高维情形中的复杂鞍 – 焦点).

10.5 强共振

回忆强共振对应于频率值 $\omega = \frac{2\pi}{3}$ 和 $\omega = \frac{\pi}{2}$. 对前一情形, 映射的规范形是

$$\bar{w} = e^{2\pi i/3}(w + C'_{02}w^{*2}) + o(|w|^2). \tag{10.5.1}$$

我们将仅考虑 $C'_{02} \neq 0$ 的情形. 设 $C = |C'_{02}|$, $e^{i\alpha} = \frac{C'_{02}}{C}$. 则变换 $w \to we^{i\alpha/3}C^{-1}$ 将这映射化为

$$\bar{w} = e^{2\pi i/3}(w + w^{*2}) + o(|w|^2). \tag{10.5.2}$$

定义 10.2 m – 扇形是同胚于从一点 (扇形的顶点) 出发的 m 条射线的并的集合.

定义 10.3 如果平面中不动点的稳定流形 W^s 和不稳定流形 W^u 是顶点在不动点的 m – 扇形, 使得在 W^s 的任何两个相邻射线之间存在 W^u 的一条射线, 且反之亦然, 则称这种不动点为具有 $2m$ 条分界线的鞍点.

定理 10.4 映射 (10.5.2) 的不动点是不稳定的, 且它是具有 6 条分界线的鞍点, 如图 10.5.1 所示.

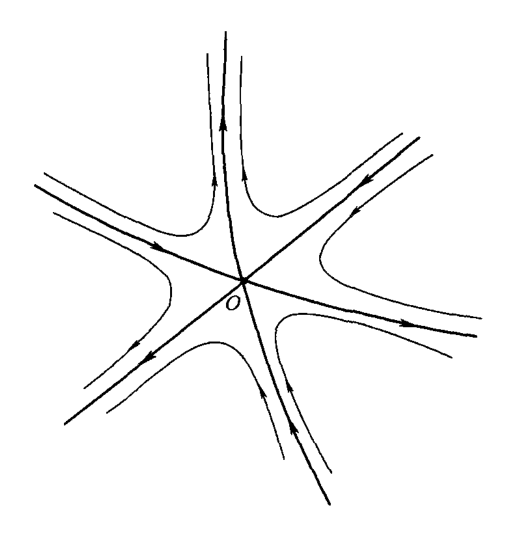


图 10.5.1 具有 6 条分界线的鞍点.

证明 较方便的不是考虑映射 (10.5.2) 本身, 而是考虑它的三次迭代. 我们有

$$\begin{aligned}\bar{\bar{w}} &= e^{2\pi i/3}(\bar{w} + \bar{w}^{*2} + \cdots) = e^{4\pi i/3}(w + 2w^{*2} + \cdots), \\ \bar{\bar{\bar{w}}} &= w + 3|w^*|^2 + \cdots,\end{aligned} \tag{10.5.3}$$

其中省略号表示三阶和更高阶项.

考虑微分方程

$$\dot{w} = w^{*2}, \tag{10.5.4}$$

沿着此方程的轨线在时间 $t = 3$ 的移位映射具有 (10.5.3) 的形式. 为证明这一点, 将 (10.5.4) 写为

$$w_t = w_0 + \int_0^t w_s^{*2} ds. \tag{10.5.5}$$

应用这个公式允许我们将 (10.5.4) 的解作为逐次逼近 $w_t^{(n)}$:

$$w_t^{(n+1)} = w_0 + \int_0^t (w_s^{(n)*})^2 ds \tag{10.5.6}$$

的极限. 对第一次近似, 我们有

$$w_t^{(1)} = w_0 + t w_0^{*2}.$$

对第二次近似, 我们有

$$w_t^{(2)} = w_0 + t w_0^{*2} + t^2 w_0^* w_0^2 + \frac{t^3 w_0^4}{3}.$$

不难看到所有的近似直到包括二阶项都相同, 因此我们有

$$w_t^{(n)} = w_0 + tw_0^{*2} + o(|w|^2).$$

从而, 方程 (10.5.4) 的解有相同形式.[4] 由此得知, 沿着系统 (10.5.4) 的轨线在时间 $t=3$ 的移位映射具有 (10.5.3) 的形式.

系统 (10.5.3) 可以积分. 为此我们引入极坐标 $w = Re^{i\varphi}$. 于是得到

$$\frac{d}{dt}Re^{i\varphi} = R^2 e^{-2i\varphi},$$
$$\dot{R} + iR\dot{\varphi} = R^2 e^{-3i\varphi},$$

或者

$$\dot{R} = R^2 \cos 3\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = -R \sin 3\varphi.$$

时间变换 $Rdt \to dt$ 后, 系统化为形式

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R\cos 3\varphi,\\ \dot{\varphi} &= -\sin 3\varphi.\end{aligned} \tag{10.5.7}$$

注意到函数

$$H = R^3 \sin 3\varphi$$

是 (10.5.7) 的首次积分. 我们平凡地得到, 函数 H 的等位线是系统 (10.5.7) 的积分曲线. 由方程 $\sin 3\varphi = 0$ 给出的等位线 $H = 0$ 包含平衡态, 且是由射线

$$\varphi = \frac{\pi n}{3}, \quad (n = 0, \cdots, 5)$$

定义的 6 – 扇形. 在具有偶数 n 的射线上的运动方程是

$$\dot{R} = R,$$

因此当 $t \to +\infty$ 时 R 沿着这些射线无限地增加. 在具有奇数 n 的射线上运动方程是

$$\dot{R} = -R,$$

即 $t \to -\infty$ 时 R 趋于零. 因此射线

$$\varphi = \frac{2\pi n}{3}$$

是平衡态的不稳定分界线, 而射线

$$\varphi = \frac{\pi(2n+1)}{3}$$

[4] 一般来讲, 我们必须证明逐次逼近收敛, 这很容易验证: 如果时间 t 的区间有限, 又 $|w_0|$ 充分小, 我们可以应用 Banach 压缩映射原理.

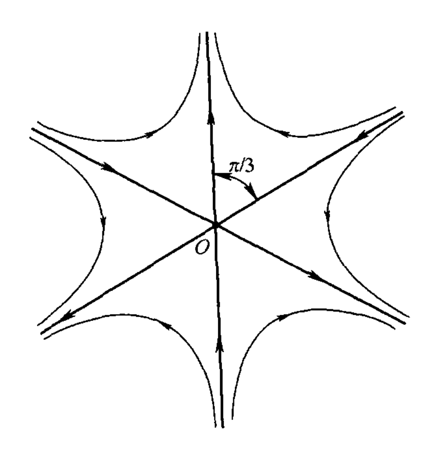


图 10.5.2 具有 6 条分界线的共振不动点. 每对分界线之间的交角是 $\pi/3$.

则是稳定分界线 $(n = 0, 1, 2)$. 其余轨线有双曲线形状, 当 $t \to +\infty$ 和 $t \to -\infty$ 时它们的渐近线分别是不稳定和稳定的分界线, 如图 10.5.2 所示.

显然, 对沿着系统 (10.5.4) 轨线的移位映射, 其不动点也有相同的 6 条分界线, 就是说定理 10.4 对这个特殊情形成立. 为了考虑一般情形, 回忆在 3.14 节, 对不动点附近的任意映射, 映射的某些迭代可以用沿着某自治微分方程系统轨线的移位映射近似到任意高阶项.[5] 对映射 (10.5.3) 这样的系统具有形式

$$\dot{w} = w^{*2} + g(w, w^*), \tag{10.5.8}$$

其中 $g = o(|w|^2)$. 为了求函数 g, 我们可以将 (10.5.8) 的右端写为具有待定系数的 Taylor 展开, 然后借助于 g 的 Taylor 系数用逐次逼近法求时间移位映射的 Taylor 展开. 比较上面移位映射和原映射 (10.5.3) 中的相似项, 我们得到一个方程组, 从它可找到 g 中所要求的 Taylor 系数. 这个方程组的可解性由定理 3.23 保证.

映射 (10.5.3) 的确切表示由非自治系统

$$\dot{w} = w^{*2} + g(w, w^*) + \tilde{g}(w, w^*, t) \tag{10.5.9}$$

的移位映射给出, 其中 $\tilde{g}$ 是 t 的周期函数, 周期 $T = 3$, 此外依赖于 t 的项可以使其任意小 (到 $o(|w|^r)$ 阶, r 是系统的光滑次数).

在极坐标上面系统可以写为

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^2 \cos 3\varphi + g_1(R, \varphi) + \tilde{g}_1(R, \varphi, t), \\ \dot{\varphi} &= -R \sin 3\varphi + g_2(R, \varphi) + \tilde{g}_2(R, \varphi, t), \end{aligned} \tag{10.5.10}$$

[5] 我们可以取任意的非自治的时间周期系统, 使得考虑的映射是这个系统的 Poincaré 映射. 此后, 3.14 节描述的规范化程序就可应用.

其中 $g_1 = O(R^3)$, $g_2 = O(R^2)$ 且

$$\tilde{g}_1 = o(R^r), \quad \tilde{g}_2 = o(R^{r-1}). \tag{10.5.11}$$

去掉非自治项, 我们得到

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^2 \cos 3\varphi + g_1(R, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -R \sin 3\varphi + g_2(R, \varphi). \end{aligned} \tag{10.5.12}$$

引入新时间变量

$$d\tau = Rdt, \tag{10.5.13}$$

这个系统取下面的形式, 它的主要项与 (10.5.7) 的相同:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R \cos 3\varphi + O(R^2), \\ \dot{\varphi} &= -\sin 3\varphi + O(R). \end{aligned} \tag{10.5.14}$$

当 φ 的值不同时, 我们暂时不等同对应于 $R = 0$ 的点. 因此, 系统 (10.5.14) 的相空间变成半柱面. 在不变圆周 $R = 0$ 上存在由方程 $\sin 3\varphi = 0$ 确定的 6 个平衡态

$$(R = 0, \varphi = \varphi_n \equiv \frac{\pi n}{3}), \quad (n = 0, \cdots, 5). \tag{10.5.15}$$

n 为偶数的平衡态在圆周上稳定, n 为奇数的不稳定. 如果我们选择小 $\varepsilon > 0$, 则从区间 $\varphi \in (\pi(2n-1)/3, \pi(2n+1)/3)$ 出发的任何轨线 (异于 $\varphi = 2\pi n/3$) 的正半轨线在有限时间内进入点 $2\pi n/3$ 的 ε 邻域; 负半轨线进入点 $\pi(2n-1)/3$ 或者点 $\pi(2n+1)/3$ 之一的 ε 邻域. 由于关于初始值的连续依赖性, 系统 (10.5.14) 从 R 充分小的地方出发的轨线具有相同的性质.

我们证明对非自治系统 (10.5.10) 的轨线这同样成立. 首先, 我们更谨慎地考虑由 (10.5.13) 给出的时间尺度化. 这个公式的意义是参数化 (10.5.12) 的轨线的老时间 t 是 (R, φ) 的函数, 而参数化 (10.5.14) 轨线的新时间 τ 由

$$t(\tau, R, \varphi) = \int_0^\tau \frac{ds}{R^*(s-\tau; R, \varphi)} \tag{10.5.16}$$

定义, 其中 $R^*(s; R, \varphi)$ 是系统 (10.5.14) 在 $s = 0$ 从点 (R, φ) 出发的轨线.

由于 (10.5.14) 中的 $\dot{R}$ 是 R 阶的, 故对有限 τ, 比 R^*/R 有界异于零, 而对任意小 R 它为无穷. 我们看到 $\dfrac{\partial R^*}{\partial \varphi}$ 也是 R 阶的. 因此由公式 (10.5.16) 对有界的 τ 得到

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial t}{\partial \varphi} = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial t}{\partial R} = O\left(\frac{1}{R^2}\right). \tag{10.5.17}$$

此外, 容易证明

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{R^*(-\tau; R, \varphi)}. \tag{10.5.18}$$

由于这个导数不为零, 可得知公式 (10.5.16) 也定义了 τ 为 t 和 (R,φ) 的函数. 因此, 公式 (10.5.13) 可写为形式

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}+\frac{\partial \tau}{\partial R}\dot{R}+\frac{\partial \tau}{\partial \varphi}\dot{\varphi}=R, \tag{10.5.19}$$

其中 $\dot{R}=O(R^2)$ 和 $\dot{\varphi}=O(R)$ 由 (10.5.12) 给出.

现在我们考虑系统 (10.5.10), 并作如在自治系统 (10.5.12) 中相同的时间变换. 即新时间变量 τ 由 (10.5.16) 定义, 其中 R^* 是 (10.5.14) 的解. 所得系统可写为形式

$$\begin{aligned}\dot{R}&=\left(R\cos 3\varphi+\frac{1}{R}g_1(R,\varphi)+\frac{1}{R}\tilde{g}_1(R,\varphi,t(\tau,R,\varphi))\right)\mathcal{X}(\tau,R,\varphi),\\ \dot{\varphi}&=\left(-\sin 3\varphi+\frac{1}{R}g_2(R,\varphi)+\frac{1}{R}\tilde{g}_2(R,\varphi,t(\tau,R,\varphi))\right)\mathcal{X}(\tau,R,\varphi),\end{aligned} \tag{10.5.20}$$

其中

$$\mathcal{X}=\frac{R}{\dfrac{d\tau}{dt}}\equiv\frac{R}{\dfrac{\partial \tau}{\partial t}+\dfrac{\partial \tau}{\partial R}\dot{R}+\dfrac{\partial \tau}{\partial \varphi}\dot{\varphi}},$$

这里 $\dot{R}$ 和 $\dot{\varphi}$ 由 (10.5.10) 定义. 这些 $\dot{R}$ 和 $\dot{\varphi}$ 不同于 (10.5.19) 中的那些, 区别在于它们分别含有阶为 $o(R^r)$ 和 $o(R^{r-1})$ 的项 $\tilde{g}_1$ 和 $\tilde{g}_2$. 因此对有界的 τ (见 (10.5.17) 和 (10.5.18)) 有

$$\mathcal{X}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{R\dfrac{\partial t}{\partial \tau}}\left(\dfrac{\partial t}{\partial R}\tilde{g}_1+\dfrac{\partial t}{\partial \varphi}\tilde{g}_2\right)}=1+o(R^{r-2}). \tag{10.5.21}$$

由此, 我们得知非自治系统 (10.5.20) 在 $R=0$ 有确切的定义, 此时恰如在自治系统 (10.5.14), 它取形式

$$\dot{\varphi}=-\sin 3\varphi.$$

从而, 非自治系统 (10.5.20) 在 $R=0$ 有相同的平衡点, 此外, 所有满足从小 R 开始的轨线在有限时间内进入这些平衡点之一的小邻域.

因此, 为了研究在小 R 下的系统 (10.5.20), 仍需要考虑平衡态小邻域内轨线的性态.

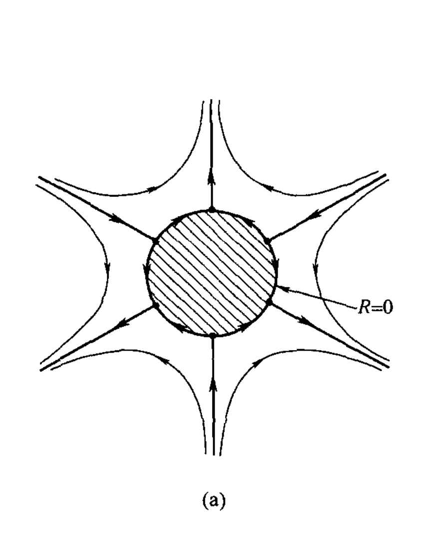
对某 k_n, 系统 (10.5.20) 在平衡态 $\left(R=0,\varphi=\dfrac{\pi n}{3}\right)$ 的线性部分等于系统 (10.5.14) 的线性部分:

$$\begin{aligned}\dot{R}&=R(-1)^n,\\ \dot{\varphi}&=9(-1)^{n+1}\varphi+k_nR.\end{aligned}$$

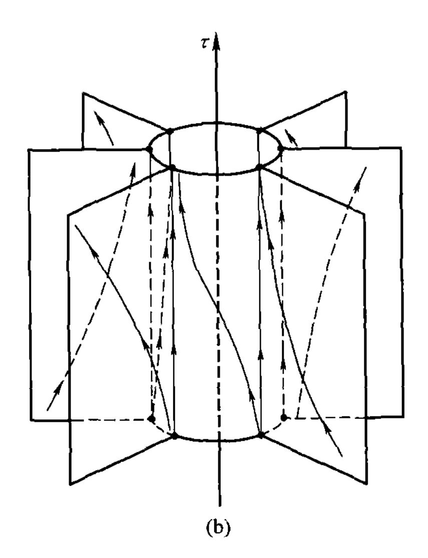
它的特征指数是 $(-1)^n$ 和 $9(-1)^{n+1}$. 由此得知, 对自治系统 (10.5.14), 所有的平衡态都是鞍点. 具有偶数 n 的平衡态有不稳定分界线 $\varphi=\dfrac{\pi n}{3}+\dfrac{Rk_n}{10+O(R^2)}$, 稳定分

界线是在圆 $R=0$ 上的拱形 $\frac{\pi(n-1)}{3}<\varphi<\frac{\pi n}{3}$ 和 $\frac{\pi n}{3}<\varphi<\frac{\pi(n+1)}{3}$. 具有奇数 n 的平衡态有形如 $\varphi=\frac{\pi n}{3}-\frac{Rk_n}{10+O(R^2)}$ 的稳定分界线, 而在圆 $R=0$ 上的拱形 $\frac{\pi(n-1)}{3}<\varphi<\frac{\pi n}{3}$ 和 $\frac{\pi n}{3}<\varphi<\frac{\pi(n+1)}{3}$ 是不稳定分界线.

现在我们在半柱面上构造系统 (10.5.14) 的相图, 如图 10.5.3 所示. 于是, 将圆周 $R=0$ 黏合成一点, 所得系统 (10.5.8) 的平衡态 $w=0$ 是具有 6 条分界线的鞍点, 如图 10.5.3(a) 所示.



(a)



(b)

图 10.5.3 (a) 柱面的截面 (b)半柱面上轨线的性态.

为了证明这个定理, 我们必须对非自治系统 (10.5.9) 得到相同结果. 就是说, 我们必须证明系统 (10.5.20) 的平衡点 $\left(R=0,\varphi=\frac{\pi n}{3}\right)$ 的稳定和不稳定分界线的存在性 (和唯一性). 由问题的对称性, 只需考虑一个平衡点, 例如 $n=1$ 的平衡点.

由 5.2 节和 5.3 节的结果, 为了证明非自治系统的鞍点平衡态的稳定分界线的存在性和唯一性, 只需验证在平衡态的小邻域内, 对所有正时间非线性项以及它们的所有导数保持很小. 因此我们必须验证 (10.5.20) 右端的函数 $\tilde{g}_{1,2}(R,\varphi,t(R,\varphi,\tau))/R$ 和 $(\mathcal{X}-1)$ 以及它们的导数都很小, 只要对某小 δ

$$0\leqslant R\leqslant\delta,\quad \left|\varphi-\frac{\pi}{3}\right|\leqslant\delta. \tag{10.5.22}$$

事实上, 由 (10.5.20) 立刻得知, 对某充分小的 $\varepsilon>0$, 在平衡态的小邻域内有

$$R(\tau)\leqslant e^{-(1-\varepsilon)\tau}R(0).$$

因此, 只要验证在满足

$$e^{(1-\varepsilon)\tau} \leqslant \frac{1}{R}, \quad \tau > 0 \tag{10.5.23}$$

的这部分平衡态邻域内的非线性项保持小就足够了. 事实上, 如果非线性项在那里是小的, 则在由 (10.5.22) 和 (10.5.23) 定义的集合外面, 可以改变系统使得对所有 (R,φ,τ) 它变成大范围二分 (详情见 5.2 节). 由 5.3 节的结果得知, 对这个改变的系统稳定不变流形存在且唯一. 在这个流形上的任何正半轨线应满足 (10.5.23). 因此所得不变流形位于系统没有被改变的区域. 所以, 这个流形与平衡态的小邻域 (10.5.22) 之交是原系统的所寻求的局部不变流形.

由于函数 $\tilde{g}_{1,2}$ 和它们关于时间的导数至少是 $o(R^{r-2})$ 阶 (见 (10.5.11)), 只需证明 (10.5.20) 和 (10.5.21) 中的函数 $t(\tau,R,\varphi)$ 的导数增长不快于 R 的某个负幂次: 当光滑次数 r 足够地大时, 这可给出 (10.5.20) 右端的非线性项所需要的微小性. 现在注意系统 (10.5.14) 在平衡态的线性化的谱有界, 它的下界是 $\lambda=-1$. 因此, 在 $s-\tau\leqslant 0$, 对小 $\varepsilon>0$, 关于系统 (10.5.14) 的解 R^* 我们有下面估计:

$$Re^{(1-\varepsilon)(\tau-s)} \leqslant R^*(s-\tau;R,\varphi) \leqslant Re^{(1+\varepsilon)(\tau-s)}$$

和

$$\frac{\partial^k R^*}{\partial(R,\varphi)^k} = O(e^{(k+\varepsilon)(\tau-s)}).$$

将这个估计代入定义 $t(\tau,R,\varphi)$ 的公式 (10.5.16), 并利用 (10.5.18) 和 (10.5.23), 我们最后得到估计

$$\frac{\partial^k t}{\partial(\tau,R,\varphi)^k} = O\left(\frac{1}{R^{k+1+\sigma}}\right),$$

其中 $\varepsilon\to 0$ 时 $\sigma>0$ 趋于零. 如上面解释的, 这个估计对建立非自治系统 (10.5.20) 的平衡态的局部稳定不变流形的存在唯一性已经足够了.

从而, 我们建立了不变流形, 即 (φ,R,τ) 空间中形如

$$\varphi = \frac{\pi n}{3} + f_n(R,\tau)$$

的曲面的存在唯一性, 它们整个由系统 (10.5.20) 的解 $(\varphi(\tau),R(\tau))$ 组成 (见图 10.5.3(b)). 对奇数 n 这些是稳定流形: τ 增长时在每个流形上 R 的值趋于零. 对偶数 n, 它们是不稳定流形.

由于系统 (10.5.20) 的解是改变时间变量后系统 (10.5.10) 的解, 我们已经证明系统 (10.5.10) 的平衡态 $\left(R=0,\varphi=\dfrac{\pi n}{3}\right)$ 的稳定和不稳定不变流形的存在唯一性. 由构造, 这些流形是系统 (10.5.10) 的轨线的集合, 这些轨线都是在 $t=0$ 时从由

$$\varphi = \frac{\pi n}{3} + f_n(R,0) \tag{10.5.24}$$

唯一确定的曲线 $\mathcal{L}_n$ 出发的. 由于系统 (10.5.10) 的右端关于 t 是周期的, 在 $t=0$ 从曲线 $\mathcal{L}_n$ 的像 $\bar{\mathcal{L}}_n$ (在沿着系统的轨线的一个周期的映射下) 上的点开始的轨线也

组成不变流形. 由唯一性, 这必须是同一个不变流形, 因此 $\bar{\mathcal{L}}_n = \mathcal{L}_n$. 但是这个映射在系统 (10.5.10) 的一个周期上是映射 (10.5.3). 因此, 我们建立了所给映射的不动点 $w=0$ 的 6 个不变流形 $\mathcal{L}_0, \cdots, \mathcal{L}_5$ 的存在性 (三个稳定三个不稳定), 由此得定理的论断.

注 在高维情形, 那里除了中心坐标还存在稳定坐标, 不稳定集合由三条曲线组成, 而稳定集是由一束沿着非主流形 W^{ss} 相交的三个半平面组成, 三维例子如图 10.5.4 所示.

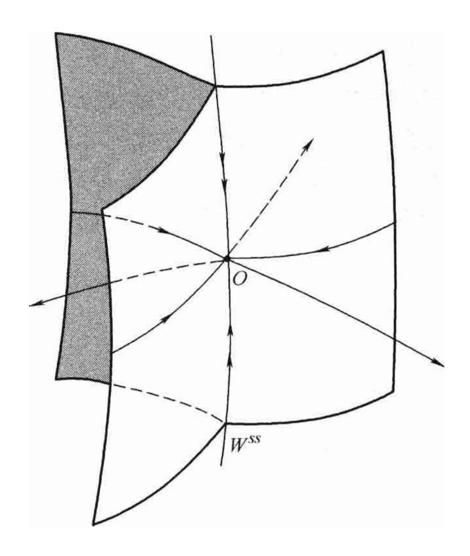


图 10.5.4 $\mathbb{R}^3$ 中共振 $\frac{\pi}{3}$ 不动点的稳定和不稳定流形的拓扑.

现在我们详细阐述共振 $\omega = \frac{\pi}{2}$. 这时这个映射的规范形是

$$\bar{w} = e^{\pi i/2}(w + C'_{21}|w|^2 w + C'_{03} w^{*3}) + o(|w|^3). \tag{10.5.25}$$

我们将假设 $C'_{03} \neq 0$. 于是经变换 $w \to e^{\alpha i/4} C^{1/4}$ 后, 其中 $C'_{03} = Ce^{i\alpha}$, 这个映射化为形式

$$\bar{w} = e^{\pi i/2}(w + (L + i\Omega)|w|^2 w + w^{*3}) + o(|w|^3), \tag{10.5.26}$$

其中 $L + i\Omega \equiv C'_{21}\sqrt{C}$.

定理 10.5 在 $L < 0$ 且 $L^2 + \Omega^2 > 1$ 的情形下, 不动点渐近稳定. 在 $L > 0$ 且 $L^2 + \Omega^2 > 1$ 的情形下, 不动点不稳定, 当 $L^2 + \Omega^2 < 1$ 时, 它是具有 8 条分界线的鞍点.

我们将仅对映射 (10.5.26) 的四次迭代

$$\bar{w}^{(4)} = w + 4[(L + i\Omega)|w|^2 w + w^{*3}] + o(|w|^3) \tag{10.5.27}$$

与某自治系统的时间移位映射重合的情形证明定理 (一般情形的处理基本上与上一个定理的方法相同).

将自治系统写为形式

$$\dot{w} = B_1|w|^2w + B_2w^{*3} + O(|w|^4), \tag{10.5.28}$$

其中 B_1 和 B_2 还未确定. 将 (10.5.28) 重写为

$$w_t = w_0 + \int_0^t (B_1|w_s|^2w_s + B_2w_s^{*3} + O(|w_s|^4))ds,$$

并由逐次逼近法构造它的解. 第一步我们有

$$w_t = w_0 + (B_1|w_0|^2w_0 + B_2w_0^{*3})t + O(|w_0|^4).$$

容易看到所有的近似有相同形式, 因此方程 (10.5.28) 的解有相同形式. 如果我们令 $t=4$, 可得知映射 (10.5.27) 直到三次项与沿着任何形如

$$\dot{w} = (L+i\Omega)|w|^2w + w^{*3} + g(w,w^*) \tag{10.5.29}$$

的系统的轨线的移位映射重合, 其中 g 从四次项开始. 如上, 对某个 g 我们假设映射 (10.5.27) 与沿着系统 (10.5.29) 的轨线的时间 $t=4$ 移位恰好重合. 引入极坐标 $w = Re^{i\varphi}$, 我们得到

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R^3(L+\cos 4\varphi) + O(R^4),\\ \dot{\varphi} &= R^2(\Omega - \sin 4\varphi) + O(R^3),\end{aligned}$$

或者经过时间变换 $R^2dt \to dt$ 后化为:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(L+\cos 4\varphi) + O(R^2),\\ \dot{\varphi} &= \Omega - \sin 4\varphi + O(R).\end{aligned} \tag{10.5.30}$$

不失一般性, 假设 $\Omega \geqslant 0$, 因为变换 $\varphi \to -\varphi$ 不改变系统的形式但改变 Ω 的符号.

在 $L=0$ 时, (10.5.30) 的截断系统

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R\cos 4\varphi,\\ \dot{\varphi} &= \Omega - \sin 4\varphi\end{aligned}$$

有首次积分

$$H = R^4(\Omega - \sin 4\varphi).$$

注意到当 $L<0, \Omega>1$ 时对充分小 R 函数 H 是原系统 (10.5.30) 的 Lyapunov 函数. 事实上, 由于 $\Omega > 1$, 显然对 $R>0$ 有 $H>0$. 我们验证 $\dot{H}<0$, 即 $H_R'\dot{R} + H_\varphi'\dot{\varphi} < 0$. 后面的不等式可以重写为

$$4R^4(\Omega - \sin 4\varphi)(L+\cos 4\varphi) - 4R^4(\Omega - \sin 4\varphi)\cos 4\varphi + O(R^5) < 0$$

或者

$$4R^4(\Omega - \sin 4\varphi)L + O(R^5) < 0,$$

如果 $L < 0$ 且 $\Omega > 1$ 这显然对所有充分小的 R 满足.

存在 Lyapunov 函数意味着不动点渐近稳定, 即在这种情形下定理成立. 我们可以对扩大的参数区域: $\Omega^2 + L^2 > 1, L < 0$ 构造 Lyapunov 函数. 为此考虑函数 $V = R^4(\beta - \sin 4\varphi)$, 并证明对适当选取的 β 它是 Lyapunov 函数. 事实上, 我们需要在 $R > 0$ 有 $V > 0$, 即

$$\beta > 1, \tag{10.5.31}$$

以及 $\dot{V} < 0$, 即 $V'_R\dot{R} + V'_\varphi\dot{\varphi} < 0$. 后一个不等式可重写为形式

$$4R^4(\beta - \sin 4\varphi)(L + \cos 4\varphi) - 4R^4(\Omega - \sin 4\varphi)\cos 4\varphi + O(R^5) < 0.$$

为了对足够小的 R 满足这个不等式, 只需对所有 φ 有

$$(\beta - \sin 4\varphi)(L + \cos 4\varphi) - (\Omega - \sin 4\varphi)\cos 4\varphi < 0,$$

或者

$$\beta L - L\sin 4\varphi + (\beta - \Omega)\cos 4\varphi < 0.$$

这等价于 (由于 $\beta L < 0$)

$$L^2 + (\beta - \Omega)^2 < \beta^2 L^2. \tag{10.5.32}$$

容易验证满足 (10.5.31) 和 (10.5.32) 的 β 值对 $L^2 + \Omega^2 > 1$ 永远存在: 当 $\Omega > 1$ 时, 我们可以令 $\beta = \Omega$; 当 $|L| \geqslant 1$ 时, 任何充分大的数可以取作 β; 在任何其它情形, 可令 $\beta = \dfrac{\Omega}{1 - L^2}$.

如果 $L > 0$, 则函数 V 是由 (10.5.30) 将时间改变方向得到的系统的 Lyapunov 函数. 因此, 系统 (10.5.29) 的平衡态, 从而, 映射 (10.5.27) 的不动点在这里是完全不稳定的.

最后让我们考虑 $L^2 + \Omega^2 < 1$ 的情形. 如同我们对共振 $\dfrac{2\pi}{3}$ 所做的, 假设系统是定义在半柱面上. 于是它有 8 个平衡态

$$(R = 0,\ \varphi = \varphi_n), \quad (n = 0, \cdots, 7),$$

其中 φ_n 满足方程

$$\Omega - \sin 4\varphi = 0. \tag{10.5.33}$$

在平衡态系统的线性部分有形式

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R(L + \cos 4\varphi_n), \\ \dot{\varphi} &= -(4\cos 4\varphi_n)\varphi + k_n R. \end{aligned}$$

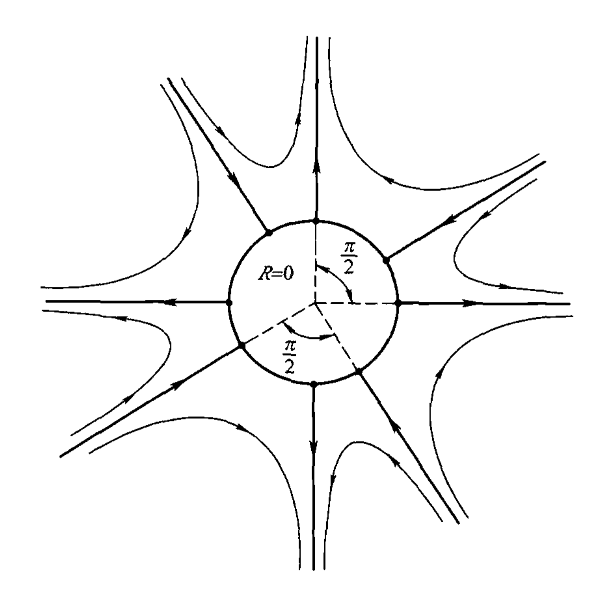


图 10.5.5 半柱面的截面.

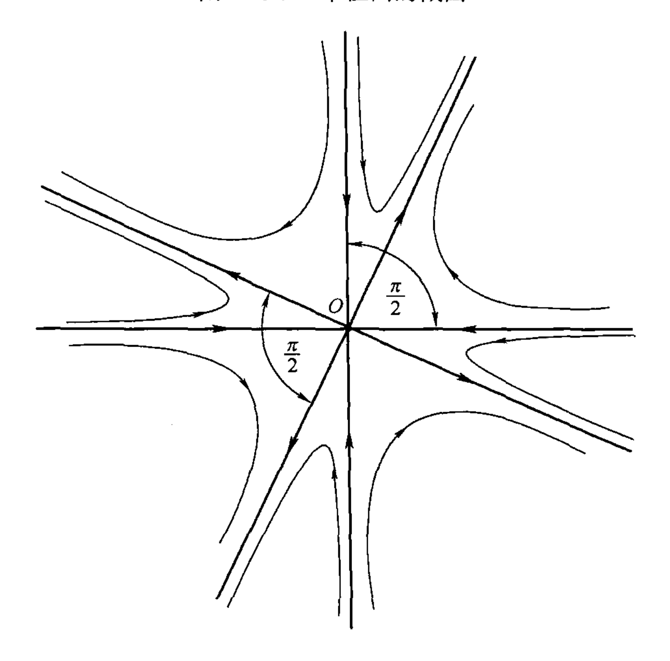


图 10.5.6 每个迭代将稳定 (不稳定) 流形映 $\pi/2$ 角度.

线性化矩阵的行列式等于

$$\Delta = -4\cos 4\varphi_n(L + \cos 4\varphi_n).$$

从 (10.5.33) 得知 $|\cos 4\varphi_n| = (1-\Omega^2)^{1/2}$, 因此, $|\cos 4\varphi_n| > |L|$. 由此, 值 $\cos 4\varphi_n$ 和

$(L+\cos 4\varphi_n)$ 有相同的符号, 且行列式 Δ 是负的. 因此, 我们得到所有的平衡态如在 $2\pi/3$ 的情形都是鞍点. 系统 (10.5.30) 在半柱面上的相图如图 10.5.5 所示. 如果我们将所有 $R=0$ 的点等同, 所得结果为具有 8 条分界线的鞍点, 如图 10.5.6 所示.

10.6 稳定性边界上通过的强共振

我们已经在上面几节看到, 强共振临界不动点的定性性态与非共振或者弱共振的有着本质的不同. 因此自然要问, 当频率变化时在强共振点上将发生什么? 特别地, 在共振 $\omega=2\pi/3$ 的情形, 不动点一般是具有 6 条分界线的鞍点, 但是当引入任意小去谐时, 这个点就变成弱焦点 (稳定或不稳定, 依赖于第一个 Lyapunov 量的符号). 我们要回答的问题是在临界时刻前后动力学是如何发展的?

在稳定性边界上, 对 ω 接近于 $2\pi/3$, 不动点附近的映射可写为下面的形式

$$\bar{w}=e^{i(2\pi/3+\varepsilon)}(w+w^{*2}+C'_{21}|w|^2w+\cdots), \tag{10.6.1}$$

其中参数 ε 测量与共振的偏差; 映射右端的系数特别是 C'_{21} 都假设连续依赖于 ε. 我们用 T_ε 记映射 (10.6.1).

定理 10.6 设 $\mathrm{Re}\, C'_{21}<1$. 则对任何小 $\varepsilon\neq 0$, 点 $O(w=0)$ 稳定. 此外, 映射 T_ε 有周期 3 的鞍点周期轨线 (O_1,O_2,O_3), 它与点 O 相距 $O(\varepsilon)$. 每一点 O_i 的两条不稳定分界线之一趋于 O, 另一条不稳定分界线离开原点的邻域. 周期轨线的稳定分界线组成点 O 的吸引盆的边界 (见图 10.6.1).

因此, 当参数趋于强共振时, 鞍点环从原点邻域的外面连续地收缩到点 O. 在确切的共振时刻它崩塌到 O 使得后者变成不稳定. 通过共振, 环与点 O 的距离重新改变, 当 ε 进一步变化时环离开 O 的 (小) 邻域. $\mathrm{Re}\, C'_{21}>1$ 的情形相同, 但要应用于逆映射 T_ε^{-1}; 此时点 O 对 $\varepsilon\neq 0$ 是完全不稳定的.

我们跳过定理 10.6 的证明, 因为它是研究强共振临界点分支的更一般问题的一部分 (见 Arnold [20] 以及 Guckenheimer 和 Holmes [64]), 这超出了本书的范围. 我们在这里代之以考虑一个模型例子.

考虑映射 (10.6.1) 的三次迭代

$$\bar{\bar{\bar{w}}}=e^{3\varepsilon i}w+(1+e^{3\varepsilon i}+e^{-3\varepsilon i})w^{*2}+(3C'_{21}e^{3\varepsilon i}+4+2e^{-3\varepsilon i})|w|^2w+\cdots, \tag{10.6.2}$$

其中省略号表示 $|w|$ 的四次和更高次的项. 可以证明映射 (10.6.2) 与某个形如

$$\dot{w}=i\varepsilon w+(1+\alpha_1(\varepsilon))w^{*2}+(C'_{21}-1+\alpha_2(\varepsilon))|w|^2w+f(w,w^*,t) \tag{10.6.3}$$

的微分方程在时间 $t=3$ 的移位映射重合, 其中 $\alpha_1(\varepsilon)$ 和 $\alpha_2(\varepsilon)$ 是 $\varepsilon\to 0$ 时趋于零的某函数, 函数 f 以四阶小项开始 (更多细节见上一节).

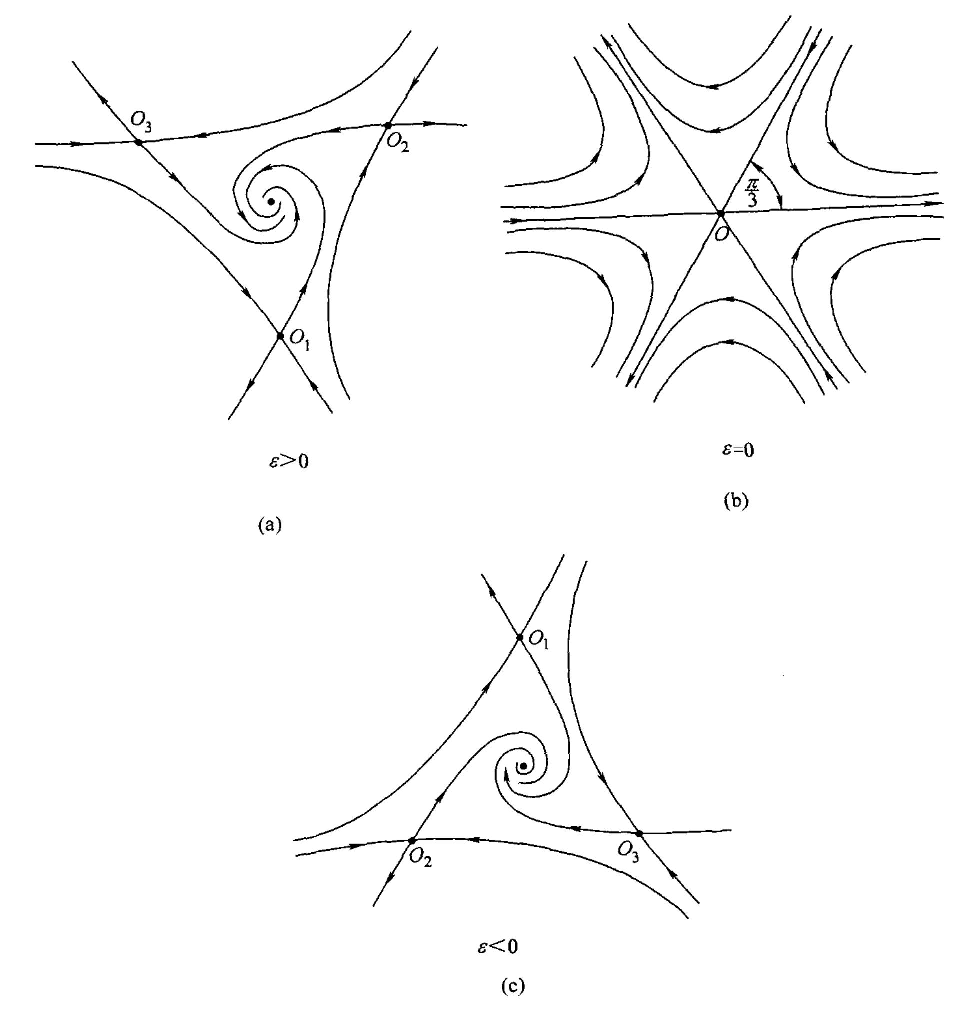


图 10.6.1 ε 变化时相图的变化. 对正的和负的 ε, 不动点稳定. 当 ε 改变符号时原点附近的旋转方向改变.

为确定起见, 假设 $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 0$ 论断类似). 作变换 $w \to \dfrac{\varepsilon w e^{i\arg(1+\alpha_1(\varepsilon))/3}}{|1+\alpha_1(\varepsilon)|}$ 和 $t \to \dfrac{t}{\varepsilon}$. 于是方程 (10.6.3) 可以写为

$$\dot{w} = iw + w^{*2} + \varepsilon(C'_{21}(0) - 1)|w|^2 w + o(\varepsilon) \tag{10.6.4}$$

(回忆 C'_{21} 也是 ε 的函数, 但 $C'_{21}(0)$ 只是常数). 去掉 $o(\varepsilon)$ 项并考虑截断方程

$$\dot{w} = iw + w^{*2} + \varepsilon(C'_{21}(0) - 1)|w|^2 w. \tag{10.6.5}$$

在极坐标 $w = Re^{i\varphi}$ 下, 它写为

$$\dot{R} = R^2 \cos 3\varphi + \varepsilon L R^3,$$
$$\dot{\varphi} = 1 - R \sin 3\varphi + \varepsilon \Omega R^2. \tag{10.6.6}$$

在直角坐标 $w = x + iy$ 下, (10.6.6) 取形式

$$\dot{x} = -y + x^2 - y^2 + \varepsilon(Lx - \Omega y)(x^2 + y^2),$$
$$\dot{y} = x - 2xy + \varepsilon(\Omega x + Ly)(x^2 + y^2), \tag{10.6.7}$$

其中 $C'_{21}(0) - 1 = L + i\Omega$ (回忆在考虑的情形下我们有 $\mathrm{Re}\, C'_{21} < 1$, 即 $L < 0$).

在 $\varepsilon = 0$, 系统除了原点 O 外, 还有三个平衡态 $O_1(0,-1), O_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 和 $O_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 注意, 直线 $y = \frac{1}{2}, y = \sqrt{3}x - 1$ 和 $y = -\sqrt{3}x - 1$ 分别通过点 O_2O_3, O_1O_2 和 O_1O_3, 它们在 $\varepsilon = 0$ 关于系统 (10.6.7) 不变. 此外, 函数

$$H = \left(y - \frac{1}{2}\right)(y - \sqrt{3}x + 1)(y + \sqrt{3}x + 1),$$

或者在极坐标下

$$H = \frac{3R^2}{2} - R^3 \sin 3\varphi - \frac{1}{2}$$

是系统在 $\varepsilon = 0$ 的首次积分. 等位集合 $H = 0$ 如图 10.6.2 所示. 因此点 O 是中心, O_1, O_2, O_3 是鞍点. 鞍点的分界线是不变直线. 此外, 点 O_1 的不稳定分界线与点 O_2 的稳定分界线重合, 等等, 如图所示. 因此, 它们一起构成分界线连接.

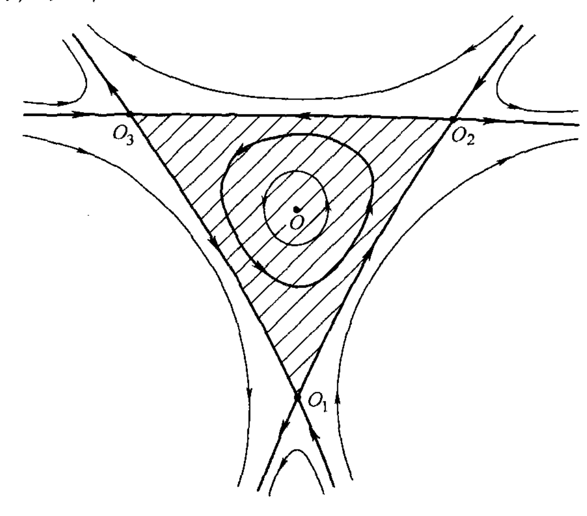


图 10.6.2 在 $\varepsilon = 0$ 时, 不动点是中心. 鞍点不动点组成异宿环.

当 $\varepsilon \neq 0$ 时函数 $\left(H+\frac{1}{2}\right)$ 是在原点的平衡态的 Lyapunov 函数:

$$\dot{H} \equiv H'_R\dot{R} + H'_\varphi\dot{\varphi} = 3\varepsilon LR^4(1+O(R)) < 0,$$

因此原点渐近稳定. 对所有小 ε, 平衡态 O_1, O_2, O_3 仍保持为鞍点. 它们的分界线性态的三个变式仍是可能的: (1) 保持分界线连接; (2) 分裂为向外分散的不稳定分支 (见图 10.6.3(a)); 或者 (3) 分裂为向内收敛的不稳定分支 (图 10.6.3(b)). 让我们证明第三个可能性的出现. 事实上, 由 (10.6.7) 看出, 对 $\varepsilon \neq 0$ 系统右端的散度为负 $\left(\text{div} \equiv \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 3\varepsilon L(x^2+y^2)\right)$. 因此, 沿着系统的轨线, 对正时间的每个移位以后, 平面上任何区域的面积都必须减少. 另一方面, 从图 10.6.2 和图 10.6.3(a) 我们看到如果连接保持, 或者它向外分裂, 则可找到区域, 它的面积经小的正时间移位不减少 (见图, $S_t \geqslant S_0$). 因此对所有小的 ε, 分界线连接必须分裂且都向内收敛.

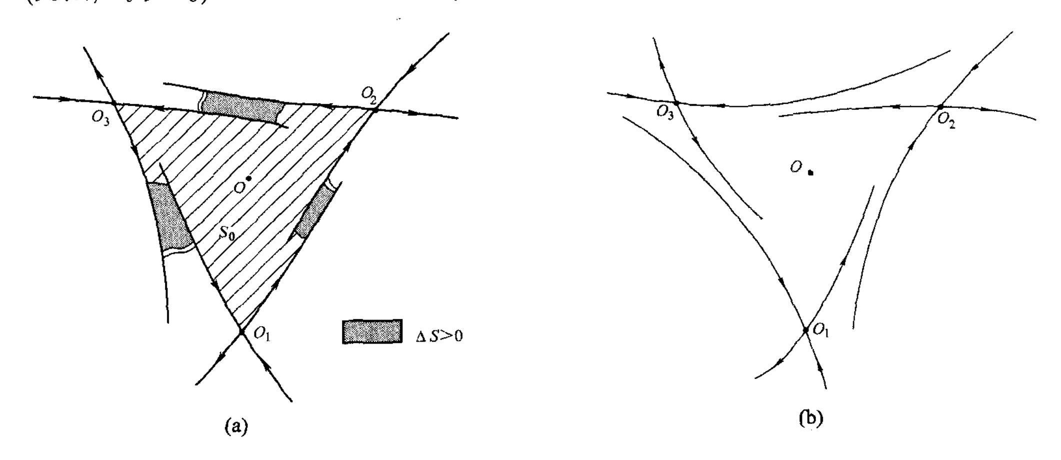


图 10.6.3 异宿连接破裂的两种方式. 讨论见正文.

显然, 当 $t \to +\infty$ 时, 向内收敛的不稳定分界线原则上或者趋于点 O, 如图 10.6.1 所示, 或者趋于某围绕原点的周期轨线, 如图 10.6.4 所示. 但是, 在后一情形, 当沿着系统轨线移位时, 由这条轨线围绕的面积不减少, 这与散度为负矛盾. 这意味着分界线必须趋于原点.

鞍点平衡态是移位映射的鞍点不动点, 相应地, 它们的分界线是不变流形. 回到原来的 (非尺度化) 的变量, 我们得知不动点必须位于距离原点某个 ε 阶. 如果映射 (10.6.1) 的三次迭代 (10.6.2) 是简化系统 (10.6.5) 的移位映射, 则上面的定理可由我们的论述得到, 因为三次迭代的不动点 O_1, O_2, O_3 对应于原映射的周期 3 环.

但是, 一般地, 对所有 ε 映射 (10.6.2) 可能不是沿着自治系统轨线的移位映射. 因此, 为了证明如图 10.6.1 显示的情况会发生, 我们需要验证 (我们不进行) 非自治系统 (10.6.4) 的移位映射的鞍点不动点的整个不变流形完全充分接近截断系统 (10.6.5) 的分界线.

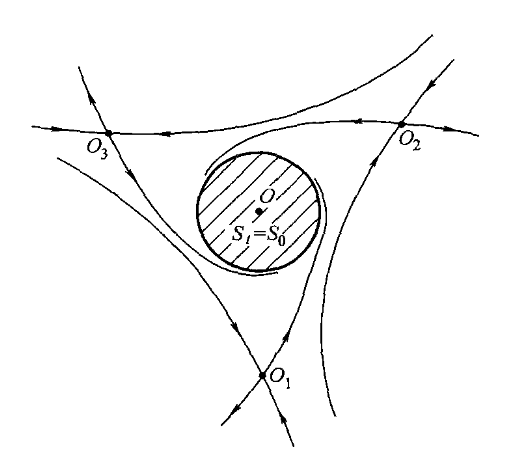


图 10.6.4　围绕原点不出现周期轨道的几何解释. 由于时间移位映射的面积当时间增加时缩小, 围绕原点的极限环不可能存在.

在第二个强共振 $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ 的情形, 情况更加微妙. 考虑由

$$\bar{w} = e^{i(\pi/2+\varepsilon)}(w + w^{*3} + C_{21}'(\varepsilon)|w|^2 w) + o(|w|^3) \tag{10.6.8}$$

定义的映射族 T_ε, 它在 $\varepsilon = 0$ 时通过共振. 设 $C_{21}'(0) = L + i\Omega$.

定理 10.7　设 $L < 0$. 则

(1) 如果 $L < -1$, 则对所有小 ε, 不动点 $O\,(w=0)$ 渐近稳定, 它吸引不依赖于 ε 的某小邻域内的所有轨线;

(2) 如果 $L^2 + \Omega^2 < 1$, 则对任何小 $\varepsilon \neq 0$, 点 O 渐近稳定. 此外, 映射 T_ε 有周期 4 的与点 O 有 $O(\sqrt{|\varepsilon|})$ 阶距离的鞍点环 (O_1, O_2, O_3, O_4). 每个 O_i 的两条不稳定分界线之一趋于 O, 另外的离开原点的邻域. 鞍点环的稳定分界线构成点 O 的吸引盆的边界 (见图 10.6.5); 以及

(3) 如果 $0 > L > -1$ 和 $L^2 + \Omega^2 > 1$, 则对所有小 ε 点 O 渐近稳定, 并当 $\varepsilon\Omega \geqslant 0$ 时吸引大小不依赖于 ε 的小邻域内的所有轨线. 当 $\varepsilon\Omega < 0$ 时, 从点 O 分支出两条周期 4 轨线: 一条是由点 (O_1, O_2, O_3, O_4) 组成的鞍点, 另一条是由 (O_1', O_2', O_3', O_4') 组成的稳定环, 如图 10.6.6 所示. 点 O_i 的一条不稳定分界线趋于 O, 另一条趋于 O_i'. O_i 的稳定分界线将点 O 的吸引盆与环 (O_1', O_2', O_3', O_4') 的分开.

代替这个定理的证明, 我们仅考虑简化方程系统的动力学. 映射 (10.6.8) 的四次迭代有形式

$$\bar{w}^{(4)} = e^{4i\varepsilon}(w + 4C_{21}'(\varepsilon)|w|^2 w) + w^{*3}(e^{4i\varepsilon} + e^{-4i\varepsilon})(1 + e^{-4i\varepsilon}) + o(|w|^3).$$

这个映射与某个形如

$$\dot{w} = i\varepsilon w + (1 + \alpha_1(\varepsilon))w^{*3} + (L + i\Omega + \alpha_2(\varepsilon))|w|^2 w + g(w, w^*, t)$$

的非自治系统在时间 $t=4$ 的移位映射重合, 其中 $g=o(|w|^3)$. 通过用 $\sqrt{|\varepsilon|}$ 和 $|\varepsilon|$ 分别对 w 和时间 t 尺度化, 并令 $\varepsilon \to 0$ 取极限, 我们得到简化系统

$$\dot{w} = i\delta w + (L+i\Omega)|w|^2 w + w^{*3}, \tag{10.6.9}$$

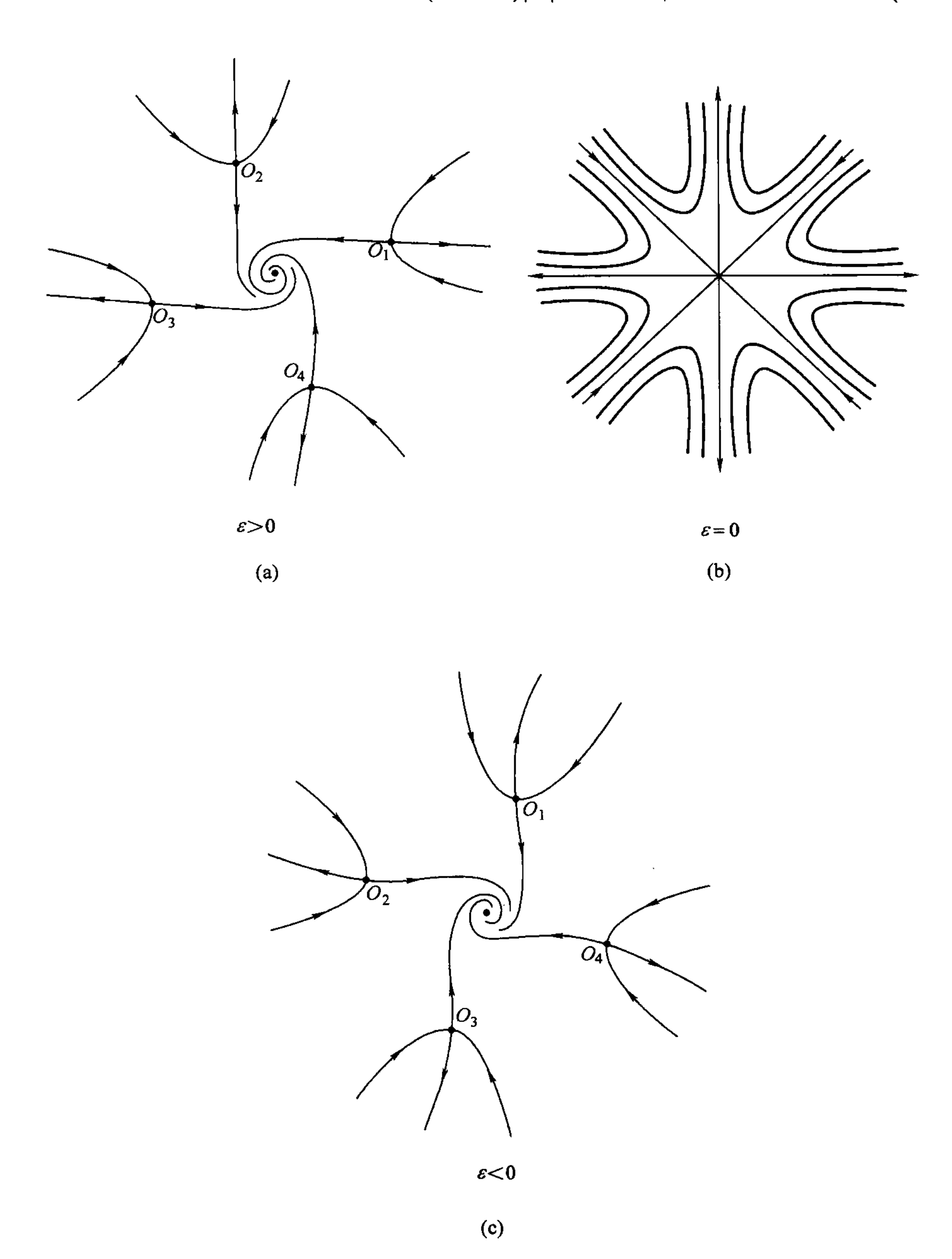


图 10.6.5 当 ε 变化时相图的改变 (这里 $L^2+\Omega^2<1$).

其中 $\delta = \pm 1 = \operatorname{sign} \varepsilon$.

在直角坐标下这个方程写为形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\delta y + (Lx - \Omega y)(x^2 + y^2) + x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} &= \delta x + (Lx + \Omega y)(x^2 + y^2) - 3x^2 y + y^3. \end{aligned} \tag{10.6.10}$$

在极坐标下对应的系统是

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^3(L + \cos 4\varphi), \\ \dot{\varphi} &= \delta + R^2(\Omega - \sin 4\varphi). \end{aligned} \tag{10.6.11}$$

从 (10.6.11) 立刻得知当 $L < -1$ 时 $\dot{R} < 0$, 因此系统 (10.6.11) 的所有轨线都趋于原点, 这就确认了上面定理的论断.

为了研究对应于情形 $0 > L > -1$ 的系统, 我们指出系统右端的散度为负且等于 $4L(x^2 + y^2) < 0$ (见 (10.6.10)). 由此 (对系统 (10.6.5) 重复相应的论述) 得知系统 (10.6.10) 既没有闭轨线也没有分界线连接. 如同对平衡态, 它们可容易地由极坐标方程得到 (见 (10.6.11)).

当 $L^2 + \Omega^2 > 1$ 时, 若 $\Omega\delta > 0$, 则系统仅有一个平衡态 (在原点). 这个平衡态稳定且吸引系统的所有轨线. 为证明这点只需验证函数

$$V = R^4(\beta - \sin 4\varphi) + 2\delta R^2 \tag{10.6.12}$$

对 $\Omega > 0$ 和 $\delta = 1$ 是 Lyapunov 函数, 其中 β 是在上一节构造 Lyapunov 函数时由关系式 (10.5.25)—(10.5.26) 定义的值. $\Omega < 0$, $\delta = -1$ 的情况可通过变量变换 $\varphi \to -\varphi$ 化为已给情形. 当 $\Omega\delta < 0$ 时除了零平衡态外, 系统还有 8 个另外的平衡态, 即四个鞍点 O_1, O_2, O_3, O_4 和四个稳定平衡态 O_1', O_2', O_3', O_4'. 后者的坐标由关系式

$$\cos 4\varphi = -L, \quad \sin 4\varphi = -\delta\sqrt{1 - L^2}, \quad R^2 = \frac{1}{|\Omega| - \sqrt{1 - L^2}}$$

确定, 鞍点的坐标由

$$\cos 4\varphi = -L, \quad \sin 4\varphi = \delta\sqrt{1 - L^2}, \quad R^2 = \frac{1}{|\Omega| + \sqrt{1 - L^2}}$$

确定.

点 O 稳定, 函数 $(2R^2 - \delta R^4 \sin 3\varphi)$ 对小的 R 是 Lyapunov 函数. 显然, 鞍点的稳定分界线当 $t \to -\infty$ 时趋于无穷. 否则, 它们必须趋于完全不稳定周期轨线或者完全不稳定平衡态, 但这不存在. 另一个可能性是一个鞍点的稳定分界线可能与另一个鞍点的不稳定分界线重合, 从而形成如图 10.6.2 所示的但有四个鞍点的分界线环, 但这个假说与负散度的条件矛盾. 不稳定分界线当 $t \to +\infty$ 时不可能趋于无穷. 为证明这点, 验证当 R 充分大时对 (10.6.12) 中的函数 V 有 $\dot{V} < 0$. 因此, 当 t 增加

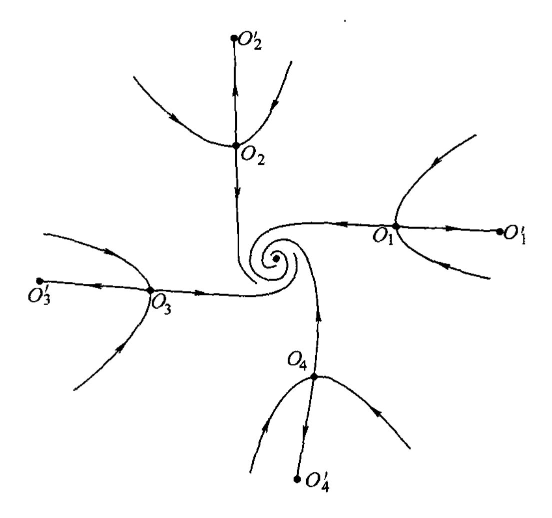


图 10.6.6 在 $-1 < L < 0, L^2 + \Omega^2 > 1$ 的情形下, 当 $\varepsilon\Omega < 0$ 时的相图. 通过鞍 - 结点分支同时出现四对不动点.

时系统的所有轨线对充分大的 C 必须进入某闭曲线 $V = C$ 的内部, 并以后永远在那里. 相同性态应用到鞍点分界线, 从而, 对点 O_i 的不稳定分界线仅有的选择是一条趋于 O, 另一条趋于 O_i', 如图 10.6.6 所示.

在 $L^2 + \Omega^2 < 1$, 系统有 5 个平衡态: 在原点的稳定平凡平衡态以及其它 4 个对 $\delta = 1$ 和 $\delta = -1$ 是鞍点的 O_1, O_2, O_3, O_4. 平衡态的坐标由关系式

$$\cos 4\varphi = -L, \quad \sin 4\varphi = \delta\sqrt{1 - L^2}, \quad R^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - L^2} - \delta\Omega}$$

求得. 如同在上一情形, 鞍点的稳定分界线当 $t \to -\infty$ 时发散到无穷. 为了证明点 O_i 的不稳定分界线有如图 10.6.7 所示的性态: 一条当 $t \to +\infty$ 时趋于无穷, 第二条趋于原点, 我们必须证明它们一起不能同时趋于无穷. 为此, 对大的 R 考虑系统 (10.6.11). 引入新变量 $z = R^{-2}$ 并作时间变换 $dt \to z dt$. 我们得到

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -2z(L + \cos 4\varphi), \\ \dot{\varphi} &= \delta z + \Omega - \sin 4\varphi. \end{aligned} \tag{10.6.13}$$

值 $z = 0$ 对应于 $R = +\infty$. 系统 (10.6.13) 在 $z = 0$ 有由关系式 $\Omega = \sin 4\varphi$ 确定的 8 个平衡态: 4 个平衡态稳定, 其它的完全不稳定. 鞍点 O_i 的稳定分界线出自在 $t = -\infty$ 的完全不稳定平衡态, 从每一个出来两条分界线 (因为 4 个不稳定平衡态有 8 条分界线). 从图 10.6.7 现在看到只有 4 条不稳定分界线当 $t \to +\infty$ 时进入在无穷远稳定平衡态, 余下的必须位于平面的有限部分内, 因此必须趋于点 O.

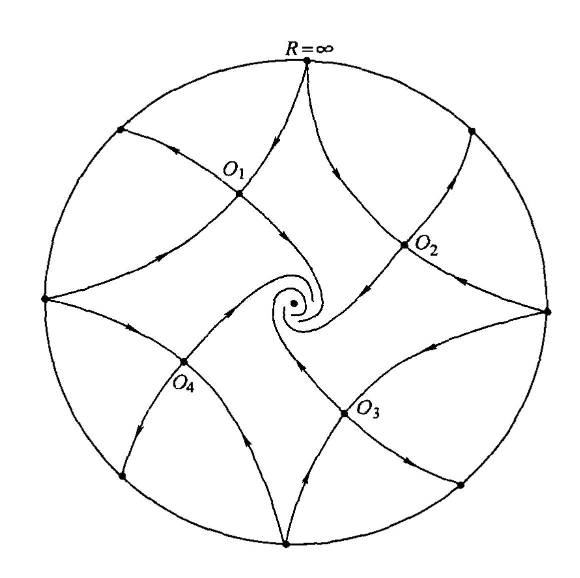


图 10.6.7　这个图像阐明鞍点分界线是如何组织成大范围相图的.

10.7　关于共振的附加说明

我们已经在 10.4 节看到, 在弱共振 $\omega = \dfrac{2\pi M}{N}$, $N \geqslant 5$ 的情形, 临界不动点的稳定性一般由第一个非零 Lyapunov 量的符号确定. 同样情况也适用于具有一对纯虚特征指数的平衡态的临界情形. 但是, 它们之间存在本质的差别, 就是说对共振不动点, 只有不超过 $\dfrac{N-3}{2}$ 的有限个 Lyapunov 量有定义. 当所有的 Lyapunov 量都等于零时, 不动点小邻域的结构问题是困难的, 所以我们在这里没有研究它. 代之以考虑下面两个例子.

第一个例子类似于强共振. 考虑映射

$$\bar{w} = e^{2\pi iM/N}w + (w^*)^{N-1}. \tag{10.7.1}$$

可以看到映射 (10.7.1) 的 N 次迭代与沿着系统

$$\dot{w} = (w^*)^{N-1} \tag{10.7.2}$$

的轨线在时间 $t = N$ 的移位映射直到 N 次项都重合. 在极坐标下这个系统有形式

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^{N-1}\cos N\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -R^{N-2}\sin N\varphi. \end{aligned}$$

函数

$$H = R^N \sin N\varphi$$

是这个系统的首次积分. 函数 H 的等位线的平凡重构显示, 在原点的平衡态是有 $2N$ 条分界线的鞍点. 对原映射 (10.7.1) 的不动点也同样成立.

事实上, 共振不动点并不仅限于鞍点和稳定 (完全不稳定) 点. 其它结构的例子由映射

$$\bar{w} = e^{2\pi M/N}w + w^{N+1} \tag{10.7.3}$$

给出, 它的 N 次迭代, 直到 $(N+1)$ 次项, 是沿着系统

$$\dot{w} = w^{N+1} \tag{10.7.4}$$

的轨线的移位映射. 这个系统在极坐标下为

$$\dot{R} = R^{N+1}\cos N\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = R^N \sin N\varphi.$$

它有首次积分

$$H = \frac{\sin N\varphi}{R^N}.$$

积分曲线由公式

$$R = C(\sin N\varphi)^{1/N}$$

给出. 我们现在可以构造相图 (对 $N = 3$ 见图 10.7.1). 存在 $2N$ 条起着分界线作用的 (稳定和不稳定) 不变射线, 它们将相平面划分为 $2N$ 个扇形 (称为**椭圆扇形**), 在每个扇形域的内部, 任何轨线都是双向渐近于平衡态, 即 $t \to \pm\infty$ 时都趋于 O. 可以验证原映射 (10.7.3) 的不动点邻域有类似结构.

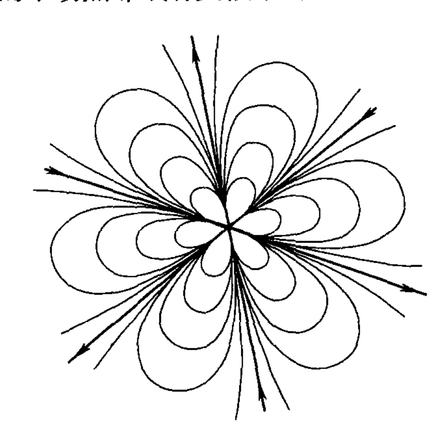


图 10.7.1 $n = 2$ 时的不动点. 分界线之间的扇形称为**椭圆域**.

第 11 章　通往稳定性边界的局部分支

对临界情形的研究产生许多问题: 为什么平衡态或者周期轨道的稳定性在稳定性边界的某些情形能够保持, 而在另外一些情形则不能? 离开稳定性边界将会发生什么?

回答这些问题要用到分支理论. 在这一章, 我们仅考虑**局部**分支, 即这种分支出现在临界平衡态附近, 以及在 Poincaré 映射的不动点附近. 我们局限于研究最简单但却关键的分支, 它们与上面两章讨论的临界情形有直接的联系.

研究分支问题的工具箱由三部分组成: 中心流形定理, 约化定理以及规范形方法.

任何一个分支的研究必须包含选择控制分支的独立参数. 选择参数要用到基于横截性概念的光滑映射的奇点理论思想. 在简单情形, 控制参数的选取通常与常识一致. 对更复杂分支的参数的适当选择是一个非平凡的问题.

11.1　分支曲面与横截族

由某个参数集控制的实际动力系统的数学模型通常是一个微分方程系统. 显然, 对由理论理想化分析所得的实际系统, 即对模型的任何阐述必须对参数难以控制的小变化不太敏感. 因此, 一个标准要求是我们不仅要考虑一个单独的系统, 而且还必须了解所有邻近的系统发生了什么. 这个工作对粗 (结构稳定) 平衡态和周期轨道是满意的: 在这种情形下, 系统右端的微小扰动不改变系统的定性结构. 相比之下, 对在稳定性边界上的系统, 其接近系统的分析可能成为一个实际问题.

考虑微分方程族

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon),$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, 以及 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ 是参数集. 假设对某个 $\varepsilon = \varepsilon^0$, 系统有临界平衡态, 或者有临界周期轨道, 即它位于稳定性区域的边界 $\mathfrak{M}$ 上. 一般地, $\mathfrak{M}$ 是点 ε^0 邻域内的 $(p-1)$ 维光滑曲面, 且由下面形式的方程定义

$$\Phi(\varepsilon) = 0, \tag{11.1.1}$$

其中

$$\Phi' = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_p}\right) \neq 0. \tag{11.1.2}$$

由于 Φ 至少关于一个参数的导数不等于零, 不失一般性我们可以假设

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_p} \neq 0. \tag{11.1.3}$$

显然这个条件对系统右端的小扰动不会被破坏. 此外, 如果它不满足, 在所考虑的情形下这可对族 $X(x, \varepsilon)$ 进行小变换来达到. 当不等式 (11.1.2) 成立时我们就说族 $X(x, \varepsilon)$ 关于 $\mathfrak{M}$ 是处在**一般位置**.

如果我们令

$$\mu = \Phi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p), \tag{11.1.4}$$

则曲面 $\mathfrak{M}$ 简单地由

$$\mu = 0$$

定义.

进一步, 在参数空间中 ε^0 附近的任何点可通过坐标 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}$ 和 μ 唯一确定, 因为 $\partial\Phi/\partial\varepsilon_p \neq 0$, 因此 ε_p 由 (11.1.4) 唯一确定. 如果我们从 (11.1.1) 解出 ε_p, 即 $\mathfrak{M}$ 表示为形式

$$\varepsilon_p = \varphi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}),$$

则我们可定义

$$\mu \equiv \varepsilon_p - \varphi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}),$$

因此

$$\varepsilon_p = \mu + \varphi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}).$$

数量 μ 称为**控制参数**. 它测量从参数空间的点到曲面 $\mathfrak{M}$ 的距离, 而 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-1}$ 给出这点到曲面 $\mathfrak{M}$ 的投影, 如图 11.1.1 所示.

在下面的讨论中, 我们将考虑写为下面形式的**单参数族**

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon_1(\mu), \cdots, \varepsilon_p(\mu)),$$

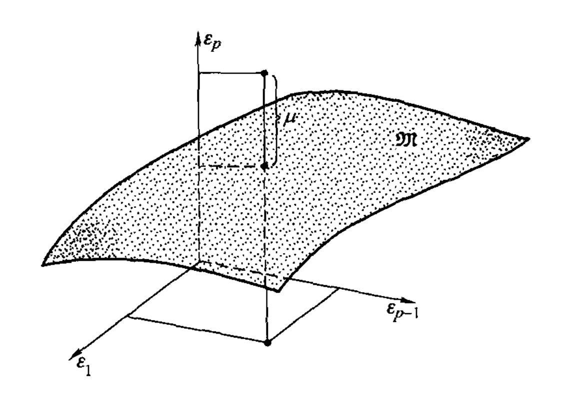


图 11.1.1 在与分支曲面 $\mathfrak{M}$ 横截的族中对控制参数的选择.

其中 $\varepsilon_i(\mu)$ 是光滑函数, $\Phi(\varepsilon(\mu)) \equiv \mu$. [1] 这样的族在曲线

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mu), \cdots, \varepsilon_p = \varepsilon_p(\mu)$$

与曲面 $\mathfrak{M}$ 横截 (无切) 相交的意义下是**横截**的. 由于这样的横截曲线可以通过任何充分接近于 ε^0 的点定义, 显然为了研究所有接近于 $\dot{x} = X(x, \varepsilon^0)$ 的系统只要分析横截族就够了. 按照 Andronov 设置 (8.4 节), 这包括求使得在其中轨线定性相似的 μ 的区间, 以及探究在对应于这些区间边界的 μ 的分支值时会发生什么.

一个理想的情形 (这在有时候是可能的) 是所有接近的横截族都定性地相同 (Arnold [20] 称这样的族为**通有族**). 研究了一个横截族中的分支, 对所有邻近的族就可以有一个完全的描述.

对具有额外退化的系统 (例如平衡态具有零特征指数以及第一个 Lyapunov 量为零), 稳定性区域的边界在点 ε^0 可能失去光滑性. 也可能存在这样的情况, 那里边界是光滑的但附近不同的单参数族的分支不同 (即不存在通有的单参数族, 例如, 平衡态具有一对纯虚特征指数以及第一个 Lyapunov 量为零的情形). 在这种情形下分析步骤如下. 考虑在某些附加条件下选取较低维 (小于 $(p-1)$) 的曲面 $\mathfrak{M}'$, 使得该曲面通过点 ε^0 且是稳定性边界的一部分. 在上面的例子中这个条件是第一个 Lyapunov 量是零. 如果加上 $(k-1)$ 个附加条件, 则曲面 $\mathfrak{M}'$ 将是 $(p-k)$ 维的, 且由下面形式的系统

$$\begin{cases} \Phi_1(\varepsilon) = 0, \\ \quad\vdots \\ \Phi_k(\varepsilon) = 0 \end{cases} \tag{11.1.5}$$

定义.

[1] 为了满足这个等式, 我们可以任意选择 $\varepsilon_1(\mu), \cdots, \varepsilon_{p-1}(\mu)$, 但 $\varepsilon_p(\mu)$ 必须满足 (11.1.4).

设导数矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial \varepsilon_p} \end{pmatrix}$$

的秩是 k, 即它有最大秩,[2] 其中我们假设 $p \geqslant k$. 此时 k 个参数可用其他参数表示, 即

$$\varepsilon_p = \varphi_1(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-k}), \ \cdots, \ \varepsilon_{p-k+1} = \varphi_1(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-k}).$$

我们引入控制参数 (对 $k = 2$ 见图 11.1.2)

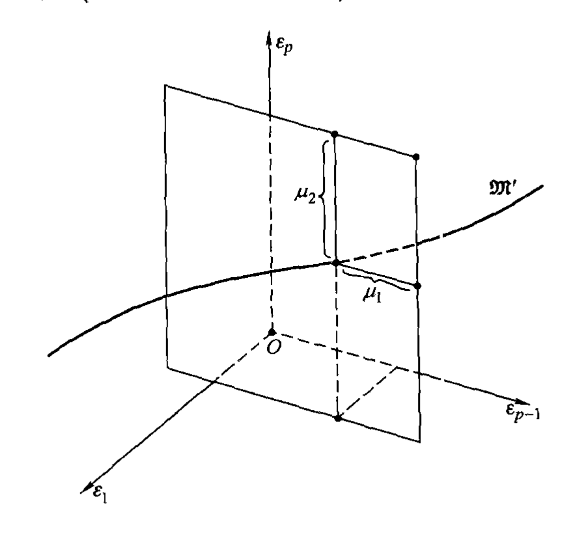


图 11.1.2 余维 2 分支曲面 $\mathfrak{M}'$ 是三参数族中的曲线.

$$\begin{cases} \mu_1 \equiv \varepsilon_p - \varphi_1(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-k}). \\ \qquad \vdots \\ \mu_k \equiv \varepsilon_{p-k+1} - \varphi_1(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-k}). \end{cases} \tag{11.1.6}$$

如果 (11.1.5) 对 $(\varepsilon_{p-k+1}, \cdots, \varepsilon_p)$ 不可解, 我们仍可定义

$$\begin{cases} \mu_1 \equiv \Phi_1(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p), \\ \qquad \vdots \\ \mu_k \equiv \Phi_k(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) \end{cases} \tag{11.1.7}$$

现在考虑与 $\mathfrak{M}'$ 横截的 k 参数向量场族, 它可表示为形式

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon_1(\mu), \cdots, \varepsilon_p(\mu)),$$

[2] 于是我们说族关于 $\mathfrak{M}'$ 是在**一般位置**.

其中 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_k)$, $\varepsilon_i(\mu)$ 是满足 (11.1.6) 或 (11.1.7) 的某些光滑函数.

这样的情形今后就称**为余维 k 分支**, 曲面 $\mathfrak{M}'$ 称为**余维 k 分支曲面** (余维数等于控制参数的个数).

研究 k - 参数族的步骤类似于单参数情形: 首先将参数 μ 空间分成轨线性态拓扑等价的区域, 并在这些区域的每一个中研究系统. 其次描述这些区域的边界 (分支集), 最后研究在分支参数值发生什么. 我们将在下面看到在最简单的情形 (例如, 平衡态有一个零特征指数或一对纯虚特征指数, 或者周期轨道有一个乘子等于 1 或 -1), 除了退化情形以外, 我们几乎总可以确切地选择适当的余维分支曲面并完全地分析横截族. 此外, 所有这些族其实就是通有族.

应该指出, 构造通有族仅在这些简单情形且只有在少数特殊情形下才可实现. 例如, 有限个参数的通有族对具有一对复乘子 $e^{\pm i\omega}$ 的周期轨道分支就不能构造. 尽管如此, 这个问题在单参数和双参数族的框架下允许有非常合理的描述. 在上面的例子中, 不变环面的产生可被完全解释并在单参数族中得到理解, 但是共振周期轨道的分支研究则要求至少是双参数. 因此, 相同的分支现象可作为余维 1 或余维 2 分支处理, 这依赖于我们关注动力学的什么样的细节. 这个不确定性对动力系统的分支理论是十分典型的.

此外, 在更复杂的情形下, 完全描述或者证明所考虑的族是通有的, 这样的问题甚至还没有提出. 但是, 一般方法仍是相同的: 分支系统被考虑为某有限余维光滑分支曲面上的点. 于是, 横截族被构造出来, 以及由研究这个具体的横截族所得到的定性结果必须证明对所有邻近族也成立.

11.2　具有一个零指数的平衡态分支

考虑关于变量与参数是 $\mathbb{C}^r$ $(r\geqslant 2)$ 类的微分方程族, 原点是具有一个零特征指数的平衡态, 其它特征指数假设具有负实部. 于是在原点附近系统可以写为形式

$$\begin{aligned}\dot{x}&=g(x,y,\varepsilon),\\ \dot{y}&=Ay+f(x,y,\varepsilon),\end{aligned}\tag{11.2.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^1, y\in\mathbb{R}^n$, 矩阵 A 的特征值位于虚轴的左边, f 和 g 是 $\mathbb{C}^r$ - 光滑函数, 它们以及它们关于 x 和 y 的一阶导数在 $x=0,y=0$ 和 $\varepsilon=0$ 时等于零.

由约化定理 5.5, 存在 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 坐标变换将族 (11.2.1) 化为形式

$$\begin{aligned}\dot{x}&=G(x,\varepsilon),\\ \dot{y}&=[A+F(x,y,\varepsilon)]y,\end{aligned}\tag{11.2.2}$$

其中 F 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ 函数, G 是 $\mathbb{C}^r$ 函数使得

$$\begin{aligned} F(0,0,0) &= 0, \\ G(0,0) &= 0, \\ G'_x(0,0) &= 0. \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

由 (11.2.2) 得知为了研究原来系统的分支, 只需考虑系统在中心流形上的限制

$$\dot{x} = G(x, \varepsilon). \tag{11.2.4}$$

从 (11.2.3) 得知, 在 $\varepsilon = 0$ 函数 G 有形式

$$G(x, 0) = l_2 x^2 + o(x^2). \tag{11.2.5}$$

首先考虑第一个 Lyapunov 量 l_2 不等于零的情形. 按照上一节的精神, 我们先推导 $\varepsilon = 0$ 附近稳定性区域的边界 $\mathfrak{M}$ 的方程. 接下来求使得 $\mathfrak{M}$ 是余维 1 光滑曲面的条件. 最后我们选择控制参数并研究横截族.

对小的 ε, 集合 $\mathfrak{M}$ 是由系统 (11.2.4) 有一个零特征指数的平衡态的条件定义. 当 $\varepsilon \neq 0$ 时平衡态一般不在原点. 定义 $\mathfrak{M}$ 的条件简单地是存在 x^* 使得

$$G(x^*, \varepsilon) = 0, \tag{11.2.6}$$

$$G'_x(x^*, \varepsilon) = 0. \tag{11.2.7}$$

回忆 $l_2 \equiv G''_{xx}(0,0)/2 \neq 0$, 因此, 利用隐函数定理对所有小的 ε 由公式 (11.2.7), x^* 可唯一确定. 因此, 我们可以将 (11.2.6) 重写为

$$G(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{11.2.8}$$

记 $\Phi(\varepsilon) = G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)$. 由于 G'_x 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ 函数, 可得知 $x^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{r-1}$, 因此 $\Phi(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{r-1}$. 对小 ε, 方程 $\Phi(\varepsilon) = 0$ 确定余维 1 的 $\mathbb{C}^{r-1}$- 光滑曲面, 只要

$$\Phi'_\varepsilon \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_p} \right) \neq 0,$$

或者

$$\frac{d}{d\varepsilon} G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)_{\varepsilon=0} \neq 0.$$

后面的不等式可写为

$$G'_x \frac{dx^*}{d\varepsilon} + G'_\varepsilon \neq 0$$

或者由于 $G'_x(0,0) = 0$, 故

$$G'_\varepsilon(0,0) \neq 0. \tag{11.2.9}$$

从而, 我们将假设 (11.2.9) 满足, [3] 即族在一般位置. 现在我们引入控制参数

$$\mu \equiv G(x^*(\varepsilon), \varepsilon), \tag{11.2.10}$$

并考虑横截于 $\mathfrak{M}$ 的任意单参数族

$$\dot{x} = G(x, \varepsilon(\mu)) \tag{11.2.11}$$

(其中 $\varepsilon(\mu)$ 是满足 (11.2.10) 的某 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 光滑函数).

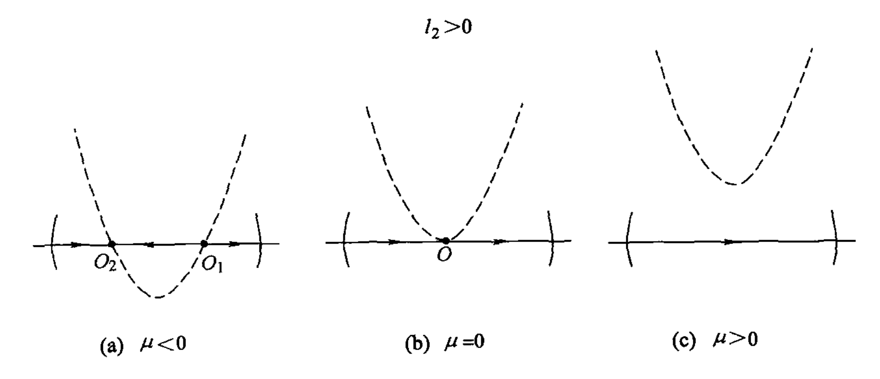


图 11.2.1 当作为控制参数 μ 的函数 $G''_{xx} = l_2 > 0$ 时, 方程 (11.2.11) 的一维相图.

将原点移到点 $x^*(\varepsilon(\mu))$, 即作变量变换 $x = x^* + \xi$. 于是 (11.2.11) 写为

$$\dot{\xi} = G(x^* + \xi; \varepsilon(\mu)) = G(x^*, \varepsilon(\mu)) + G'_x(x^*, \varepsilon(\mu))\xi + \frac{G''_{xx}(x^*, \varepsilon(\mu))\xi^2}{2} + o(\xi^2)$$

由 (11.2.7) 和 (11.2.10), 我们得到

$$\dot{\xi} = \mu + l_2\xi^2 + \tilde{G}(\xi, \mu), \tag{11.2.12}$$

其中 $\tilde{G}$ 关于 ξ 是 $\mathbb{C}^r$ 的, 关于 μ 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ 的, 且

$$\tilde{G}(0, \mu) = 0, \quad \tilde{G}'_\xi(0, \mu) = 0, \quad \tilde{G}''_{\xi\xi}(0, 0) = 0.$$

量 l_2 等于 $\dfrac{G''_{xx}(x^*(\varepsilon(0)), \varepsilon(0))}{2}$. 它不依赖于 μ, 但依赖于横截族 (11.2.11) 的选择. 由于这个依赖性是连续的, 对所有接近的横截族, 量 l_2 是接近的且有相同符号. 注意, 情形 $l_2 < 0$ 可通过变换 $\xi \to -\xi$ 和 $\mu \to -\mu$ 化为情形 $l_2 > 0$. 因此, 我们将假设 $l_2 > 0$, 但也给出两种情形对应的图.

对方程 (11.2.12) 容易研究. 注意到 $\xi = 0$ 是右端的极小点, 对应的 μ 是极小值. 因此当 $\mu > 0$ 时, 对所有小 ξ, $\dot{\xi}$ 为正, 从而所有轨线经有限时间都必须离开原点的

[3] 函数 G 恒等于 $g(x, \varphi(x, \varepsilon), \varepsilon)$, 其中 $y = \varphi(x, \varepsilon)$ 是系统 (11.2.1) 的中心流形方程. 由于 $g'_{(x,y)}(0,0,0) = 0$, 条件 (11.2.9) 等价于 $g'_\varepsilon(0,0,0) \neq 0$.

邻域. 当 $\mu < 0$ 时方程右端在两点 $O_2(\xi^-(\mu) < 0)$ 和 $O_1(\xi^+(\mu) > 0)$ 等于零. $\dot{\xi}$ 在区间 $(\xi^-(\mu), \xi^+(\mu))$ 内为负, 在它外面为正; 因此点 $O_2(\xi^-(\mu))$ 是稳定平衡态, 而点 $O_1(\xi^+(\mu))$ 是不稳定平衡态, 如图 11.2.1(a) 所示. 情形 $l_2 < 0$ 对应的情景如图 11.2.3 所示.

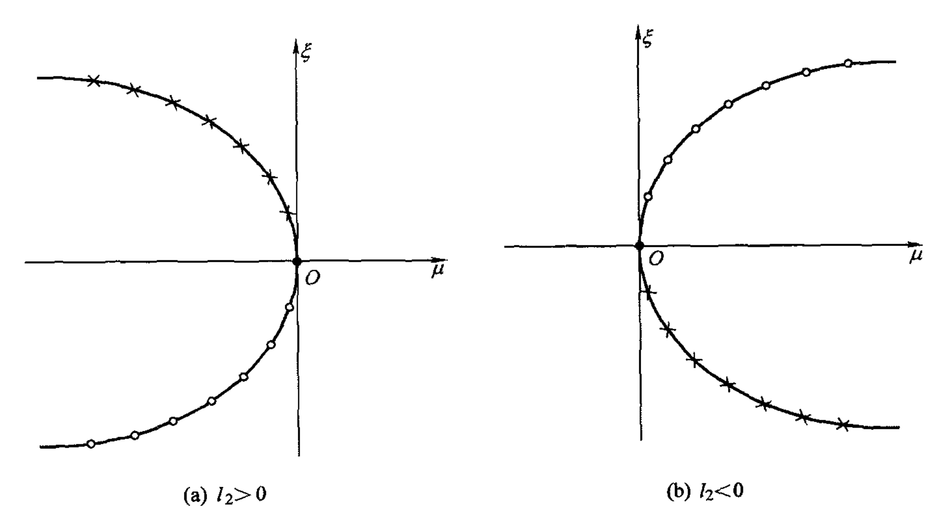


图 11.2.2 在 (a) $l_2 > 0$ 和 (b) $l_2 < 0$ 的情形下平衡态的坐标关于 μ 的依赖性. 叉和圆圈分别表示不稳定和稳定分枝.

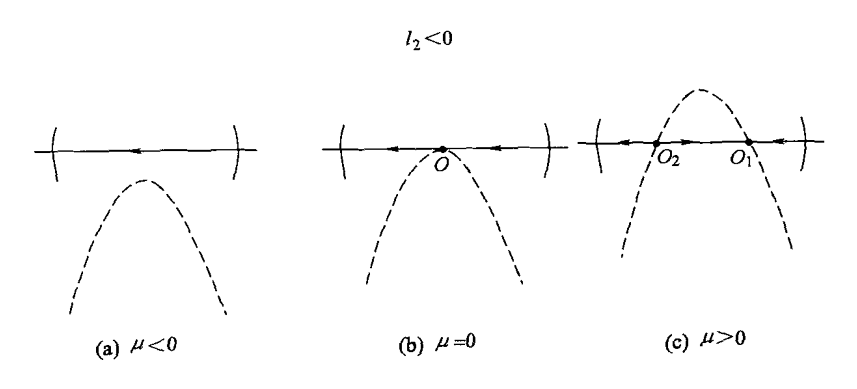


图 11.2.3 与图 11.2.1 相同, 但 $l_2 < 0$.

当 μ 增加时两个平衡态相互靠近地移动, 并在 $\mu = 0$ 合并. 图 11.2.2 显示平衡态的坐标关于 μ 的依赖性. 可以推得下面的平衡态的渐近表达式:

$$\xi^{\pm} \sim \pm\sqrt{|\mu|/l_2}. \tag{11.2.13}$$

为了证明这点, 我们在 (11.2.12) 中用 $\sqrt{|\mu|}$ 进行 ξ – 坐标和时间变量的尺度化: $\xi \to$

$\xi\sqrt{|\mu|}$ 和 $t \to t/\sqrt{|\mu|}$. 于是 (11.2.12) 取形式

$$\frac{\frac{d\sqrt{|\mu|}\xi}{dt}}{\sqrt{|\mu|}} = \mu + l_2(\sqrt{|\mu|}\xi)^2 + \tilde{G}(\sqrt{|\mu|}\xi, \mu)$$

或者

$$\dot{\xi} = -1 + l_2\xi^2 + \frac{\tilde{G}(\sqrt{|\mu|}\xi, \mu)}{|\mu|}. \tag{11.2.14}$$

由于 $\tilde{G} = o(\xi^2)$ 和 $\tilde{G}'_\xi = o(\xi)$, 得知当 $\mu \to 0$ 时 $\dfrac{\tilde{G}(\sqrt{|\mu|}\xi, \mu)}{|\mu|}$ 和它关于 ξ 的导数趋于零. 因此, 由隐函数定理, 我们求得 (11.2.14) 的右端在两点

$$\xi^\pm = \pm 1/\sqrt{l_2} + \cdots$$

等于零, 回到原来的坐标, 这就给出 (11.2.13).

当 $l_2 < 0$ 时, μ 变化时的相图改变如图 11.2.3 所示, 不动点的坐标关于 μ 的依赖性如图 11.2.2(b) 所示.

二维与更高维系统的相图分别如图 11.2.4—图 11.2.7 所示. 其中, 当 $l_2\mu < 0$ 时存在两个粗平衡态: 稳定结点与鞍点, 当 $l_2\mu$ 增加时它们彼此靠近. 在 $\mu = 0$ 它们合并形成鞍 - 结点, 当 $l_2\mu$ 变成正时它消失. 所有轨线从原点邻域离开.

接下来考虑情形 $l_2 = 0$. 设 k 是第一个非零 Lyapunov 量的指标数, 即在 $\varepsilon = 0$, (11.2.4) 中函数 $G(x, \varepsilon)$ 有形式

$$G(x, 0) = l_k x^k + o(x^k)$$

(假设系统的光滑次数不小于 k). 我们证明, 如果参数 ε 的个数 p 等于或大于 $(k-1)$, 则参数空间中对应于具有一个零特征指数以及 $l_2, \cdots, l_{k-1}$ 为零值的非粗平衡态的存在性的点集, 一般组成余维 $(k-1)$ 的光滑曲面 $\mathfrak{M}'$, 使得任何一个与 $\mathfrak{M}'$ 横截的族可以表示为下面的形式

$$\dot{x} = \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}x^{k-2} + l_k x^k + o(x^k). \tag{11.2.15}$$

事实上, 使得系统存在具有一个零指数和零 Lyapunov 量 $l_2, \cdots, l_{k-1}$ 的平衡态 x^* 的条件由

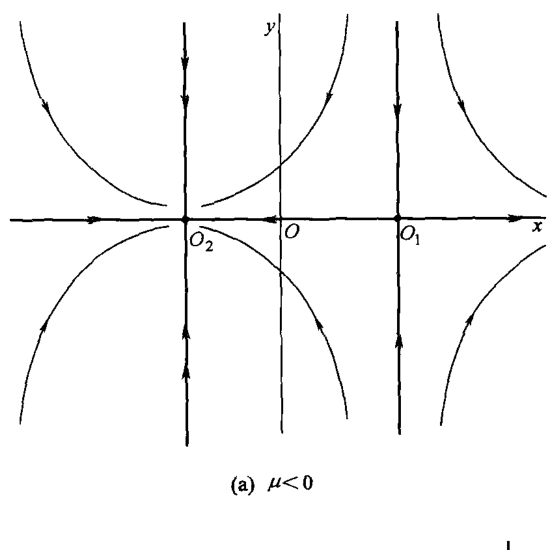
$$G(x^*, \varepsilon) = G'_x(x^*, \varepsilon) = G''_{xx}(x^*, \varepsilon) = \cdots = G^{(k-1)}(x^*, \varepsilon) = 0 \tag{11.2.16}$$

给出. 由于

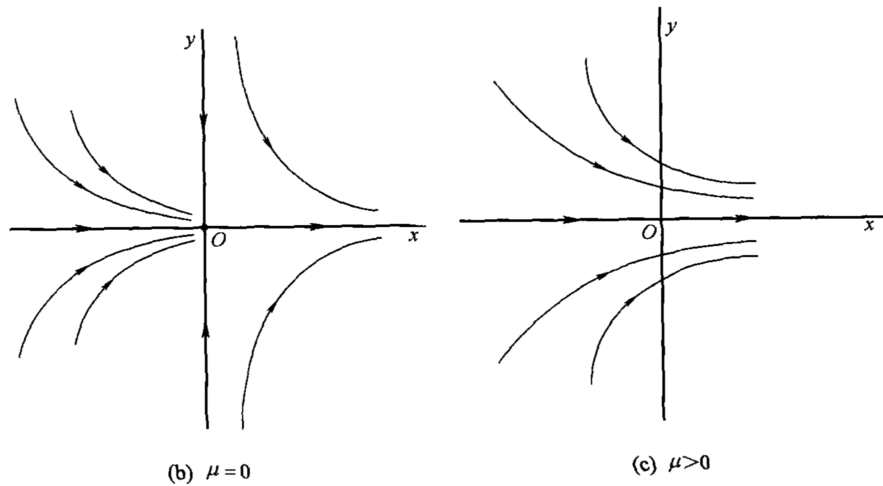
$$\frac{\partial^k G(0,0)}{\partial x^k} \equiv l_k k! \neq 0,$$

对小的 ε, x^* 的值由方程

$$G^{(k-1)}(x^*, \varepsilon) = 0 \tag{11.2.17}$$



(a) $\mu<0$



(b) $\mu=0$ (c) $\mu>0$

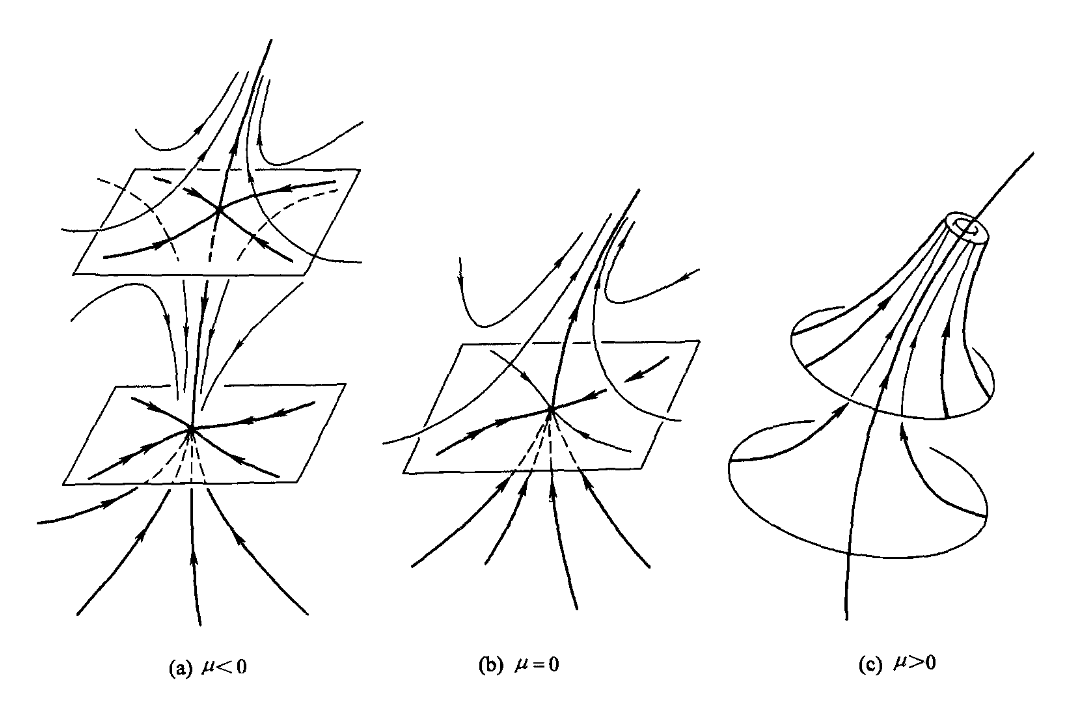
图 11.2.4 满足 $l_2>0$ 的鞍 – 结点平衡态的平面分支.

唯一确定. 设 $x=x^*(\varepsilon)$ 是 (11.2.17) 的解, 显然 x^* 是 $\mathbb{C}^{r-k+1}$ – 光滑函数. 将 $x^*(\varepsilon)$ 代入 (11.2.16) 的余下方程, 我们得到曲面 $\mathfrak{M}'$ 的下面方程:

$$G(x^*(\varepsilon),\varepsilon)=0,\ G'_x(x^*(\varepsilon),\varepsilon)=0,\ \cdots,\ G^{(k-2)}(x^*(\varepsilon),\varepsilon)=0.$$

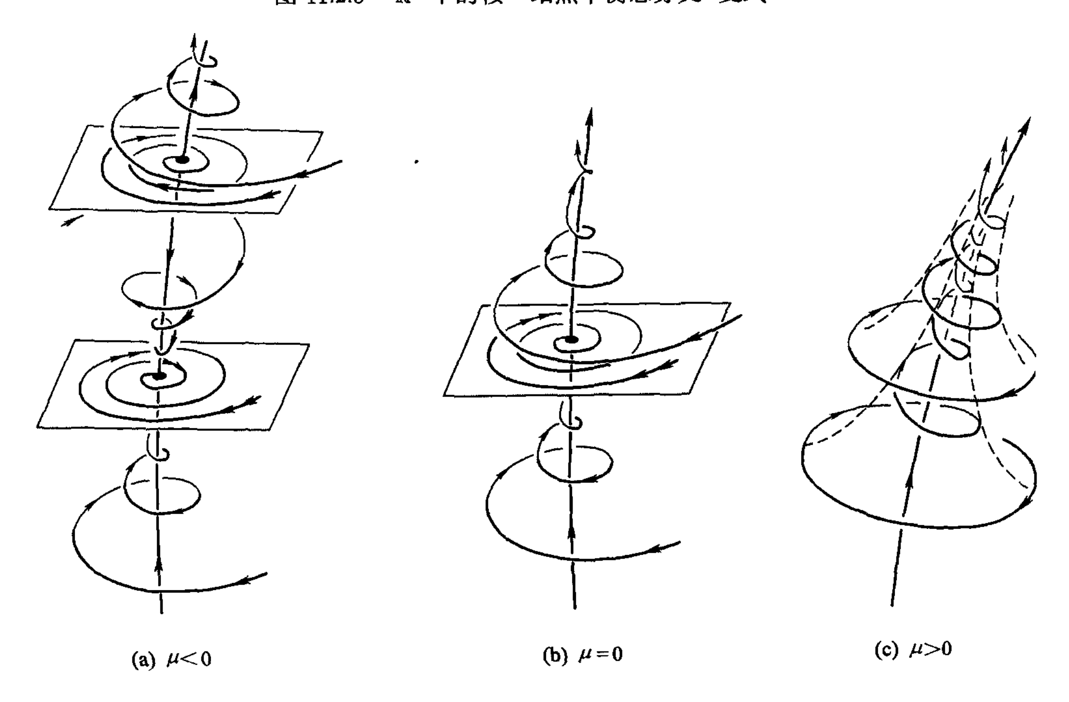
如果系统是在一般位置, 这个曲面是光滑的, 即如果矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc}\dfrac{\partial G(x^*(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial G(x^*(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon_p}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial G^{(k-2)}(x^*(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial G^{(k-2)}(x^*(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon_p}\end{array}\right)_{\varepsilon=0} \tag{11.2.18}$$



(a) $\mu<0$　　(b) $\mu=0$　　(c) $\mu>0$

图 11.2.5　$\mathbb{R}^3$ 中的鞍 – 结点平衡态分支. 变式 I.



(a) $\mu<0$　　(b) $\mu=0$　　(c) $\mu>0$

图 11.2.6　$\mathbb{R}^3$ 中的鞍 – 结点平衡态分支. 变式 II.

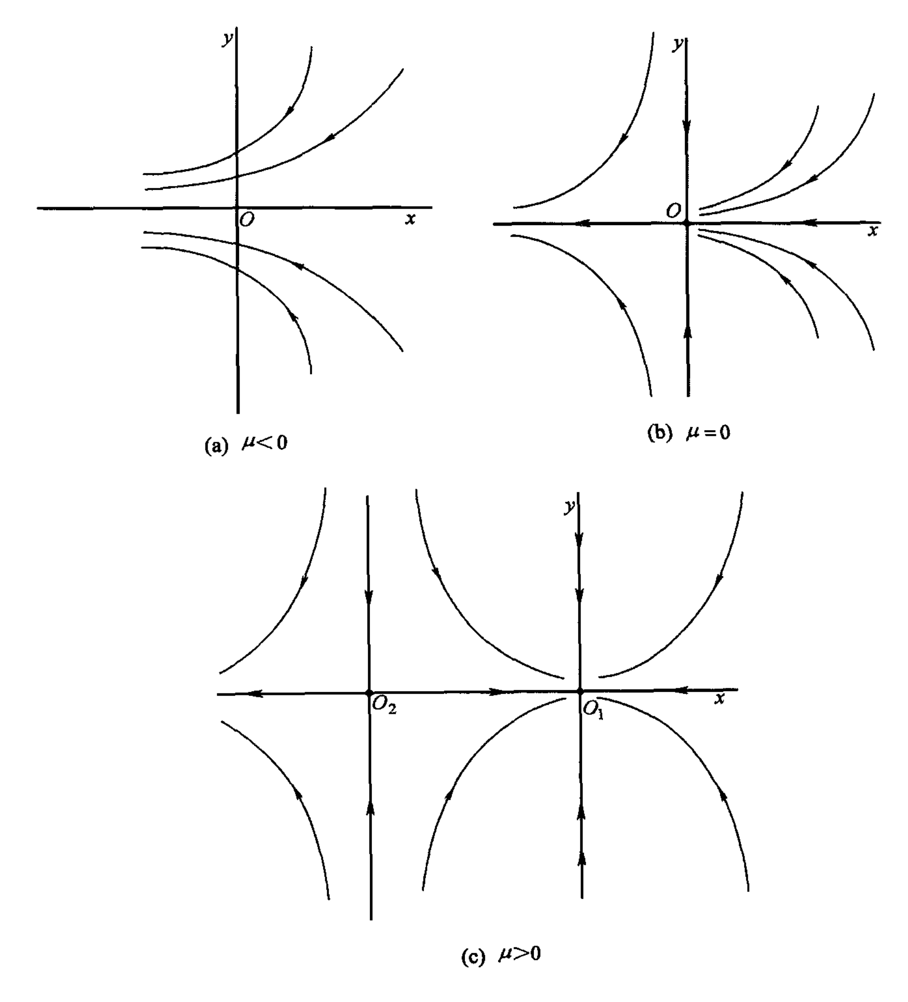


图 11.2.7 用变换 $(\mu\to-\mu, x\to-x)$ 将 $l_2<0$ 的情形化为图 11.2.4 中的情形.

的秩等于 $(k-1)$(见上一节; 立刻得知参数个数 p 应该不小于 $(k-1)$). 由于

$$\frac{\partial G^j(x^*(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon_i}\equiv\left(\frac{\partial^{j+1}G}{\partial x^{j+1}}\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_i}+\frac{\partial^{j+1}G}{\partial x^j\partial\varepsilon_i}\right)_{x=x^*(\varepsilon)}$$

和

$$\frac{\partial^j G(0,0)}{\partial x^j}=0 \quad 如果 \quad 1\leqslant j\leqslant k-1,$$

这是矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial G}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial G}{\partial\varepsilon_p}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^{k-1}G}{\partial\varepsilon_1\partial x^{k-2}} & \cdots & \dfrac{\partial^{k-1}G}{\partial\varepsilon_p\partial x^{k-2}}\end{pmatrix}_{(x=0,\varepsilon=0)}$$

有最大秩的充分条件. 我们将假设这个条件满足. 因此, 我们可以引入 $k-1$ 个控制参数 $\mu_1,\cdots,\mu_{k-1}$:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= G(x^*(\varepsilon),\varepsilon),\\ \mu_2 &= G'_x(x^*(\varepsilon),\varepsilon),\\ &\vdots\\ \mu_i &= G^{(i-1)}(x^*(\varepsilon),\varepsilon)/(i-1)!,\\ &\vdots\\ \mu_{k-1} &= G^{(k-2)}(x^*(\varepsilon),\varepsilon)/(k-2)!,\end{aligned} \tag{11.2.19}$$

使得与 $\mathfrak{M}'$ 横截的 $(k-1)$ - 参数族可以写为

$$\dot{x} = G(x,\varepsilon(\mu)), \tag{11.2.20}$$

其中 $\varepsilon(\mu)$ 是满足 (11.2.19) 的某类 $\mathbb{C}^{r-k+1}$ - 函数. 这样的 $\varepsilon(\mu)$ 由于矩阵 (11.2.18) 的秩的最大性而存在: ε_i 中的某 $(k-1)$ 个可由 (11.2.19) 用 $\mu_1,\cdots,\mu_{k-1}$ 和其它 ε 唯一确定.

如果将原点移到 x^* (即如果令 $x=\xi+x^*$), 则方程 (11.2.20) 化为形式

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= G(x^*+\xi,\varepsilon(\mu))\\ &= G(x^*,\varepsilon(\mu)) + G'_x(x^*,\varepsilon(\mu))\xi + \cdots + \frac{G^{(k)}(x^*,\varepsilon(\mu))\xi^k}{k!} + o(\xi^k).\end{aligned}$$

利用 (11.2.17) 和 (11.2.19), 我们得到

$$\dot{\xi} = \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}\xi^{k-2} + l_k\xi^k + \tilde{G}(\xi,\mu). \tag{11.2.21}$$

函数 $\tilde{G}$ 关于 ξ 是 $\mathbb{C}^r$ - 光滑, 关于 μ 是 $\mathbb{C}^{r-k+1}$ - 光滑. 它关于 ξ 直到 $(k-1)$ 阶的导数是 $\mathbb{C}^{r-k+1}$ - 光滑, 关于 μ 也是. 此外,

$$\begin{aligned}\tilde{G}(0,\mu) = \tilde{G}'_\xi(0,\mu) = \cdots = \tilde{G}^{(k-1)}(0,\mu) = 0,\\ \tilde{G}^{(k)}(0,0) = 0.\end{aligned} \tag{11.2.22}$$

最后, 将 ξ 改回到 x, 我们得到 (11.2.15).

我们将仅详细考虑小余维 $(k=3,4)$ 分支. 当 $l_3\neq 0$ 时, 族 (11.2.21) 取形式

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + l_3 x^3 + \tilde{G}(x,\mu). \tag{11.2.23}$$

回忆在 $\mu_1=\mu_2=0$, 如果 $l_3<0$, 点 $O(x=0)$ 稳定, 或者如果 $l_3>0$, 它不稳定 (见 9.2 节). 我们也注意到情形 $l_3>0$ 可用变量变换 $t\to -t,\mu_1\to -\mu_1$ 和 $\mu_2\to -\mu_2$ 化为情形 $l_3<0$.

容易看到, 对小的 μ, 方程 (11.2.23) 在原点附近至多可有三个平衡态. 事实上, 如果右端有例如四个根 (包括重次), 则它的一阶导数必须至少有三个根, 它的二阶

导数必须有两个根, 三阶导数必须至少有一个根. 但三阶导数等于 $(6l_3+o(1))$, 因此在原点附近不可能为零.

显然对于只有两个平衡态的参数值是分支点, 因为右端的一个根这时必须是重根 (见 $l_3<0$ 时的图 11.2.8(c) 和 (d), 以及 $l_3>0$ 时的图 11.2.9 (c) 和 (d)). 这个根对应于半稳定平衡态, 它在参数的任意小变化下或者消失, 或者分裂为两个平衡态.

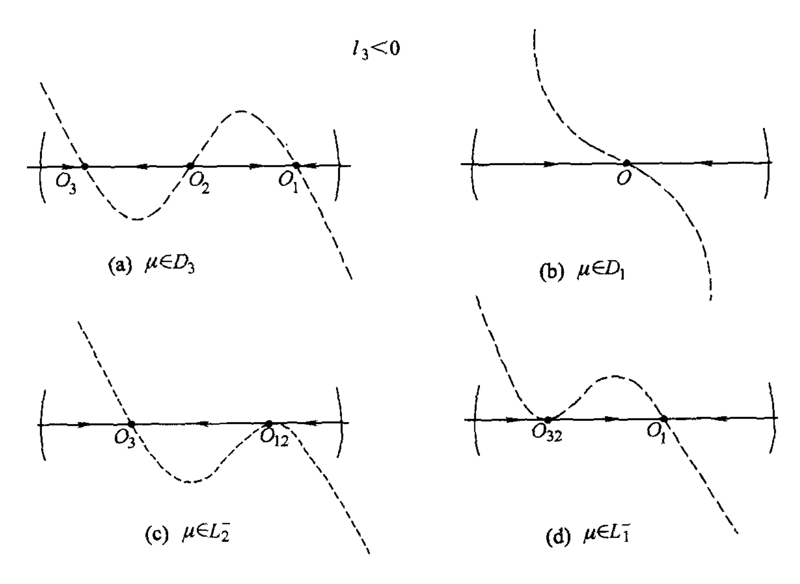


图 11.2.8　$l_2=0$, $l_3<0$ 的情形.

如果

$$
\begin{aligned}
\mu_1+\mu_2x+l_3x^3+\tilde{G}(x,\mu)&=0,\\
\mu_2+3l_3x^2+\tilde{G}'_x(x,\mu)&=0,
\end{aligned}
\tag{11.2.24}
$$

则点 x 是二重根. 为了求解系统 (11.2.24), 用 $\sqrt{|\mu_2|}$ 尺度化 x, 并令 $M=\dfrac{\mu_1}{\mu_2\sqrt{|\mu_2|}}$. 在新变量下系统 (11.2.24) 变成

$$
\begin{aligned}
M+x\pm l_3x^3+\tilde{G}(x\sqrt{|\mu_2|},\mu)/(\mu_2\sqrt{|\mu_2|})&=0,\\
\pm1+3l_3x^2+\tilde{G}'_x(x\sqrt{|\mu_2|},\mu)|\mu_2|&=0,
\end{aligned}
\tag{11.2.25}
$$

其中 $\pm$ 表示 μ_2 的符号. 由于 $\tilde{G}=o(x^3)$, 可得知 (11.2.25) 中具有 $\tilde{G}$ 和 $\tilde{G}'$ 的项当 $\mu_1\to0$ 和 $\mu_2\to0$ 时变成无穷小. 由 (11.2.25) 的第二个方程看出, μ_2 的符号必须与 l_3 的相反. 在极限 $\mu_1=\mu_2=0$ 时, 系统 (11.2.25) 化为形式

$$
\begin{aligned}
M+x-|l_3|x^3&=0,\\
-1+3|l_3|x^2&=0.
\end{aligned}
$$

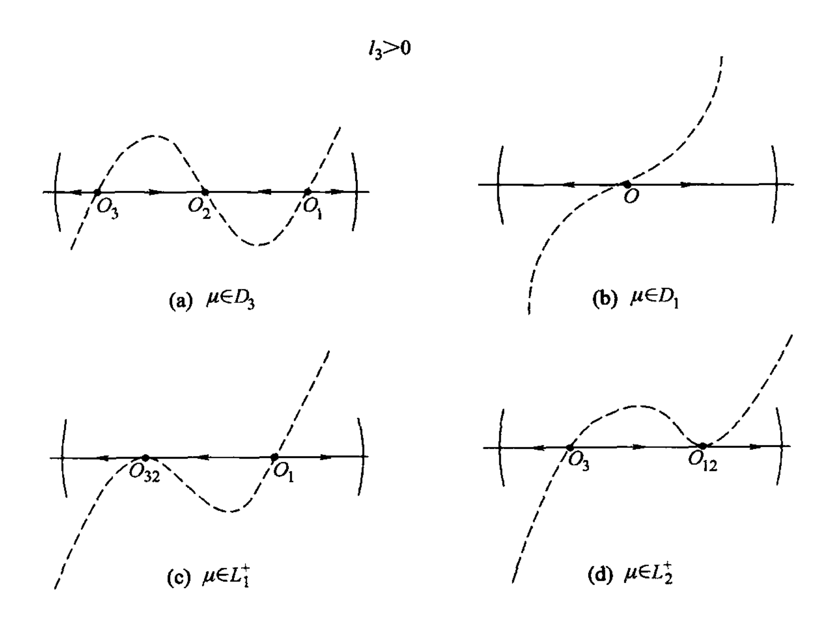


图 11.2.9　$l_2=0,\ l_3>0$ 的情形.

对 x 求解上面这个系统, 得

$$x=\frac{\pm 1}{\sqrt{3|l_3|}},\quad M=-\frac{2}{3}x.$$

于是由隐函数定理对小的 μ_2, 得知在 (11.2.25) 中

$$M=\frac{\pm 2}{3\sqrt{3|l_3|}}+\cdots .$$

恢复非尺度化的变量, 我们得到分支曲线 (图 11.2.10) 的下面方程:

$$\mu_1=\frac{\pm 2\mu_2\sqrt{|\mu_2/l_3|}}{3\sqrt{3}}+\cdots,\quad \mu_2 l_3<0. \tag{11.2.26}$$

我们将以 L^- 记 $l_3<0$ 时的这条曲线 (见图 11.2.10(a)), 以 L^+ 记 $l_3>0$ 时的这条曲线 (见图 11.2.10(b)). 点 $(\mu_1=0,\mu_2=0)$ 分这些曲线为两个分支, 以 $L_1^\pm$ 和 $L_2^\pm$ 记之. 两个分支彼此在原点与 μ_2 轴接触.

由于分支集的这个特殊形状, 这个分支称为**尖分支**. 曲线 $L^\pm$ 将原点邻域划分为两部分: 楔内区域 D_3 (它包含 $l_3<0$ 时的正 μ_2 半轴, 或 $l_3>0$ 时的负半轴), 以及楔外区域 D_1. 容易验证在曲线 $L^\pm$ 上的每一点, 双参数族 (11.2.23) 满足一般性条件 (11.2.9).

容易证明如果 $l_3<0$, 则:

(1) 在楔内部 D_3 中, 方程 (11.2.17) 有三个平衡态: 两个稳定点 (O_1 和 O_3) 和一个不稳定点 (O_2), 如图 11.2.8 (a) 所示.

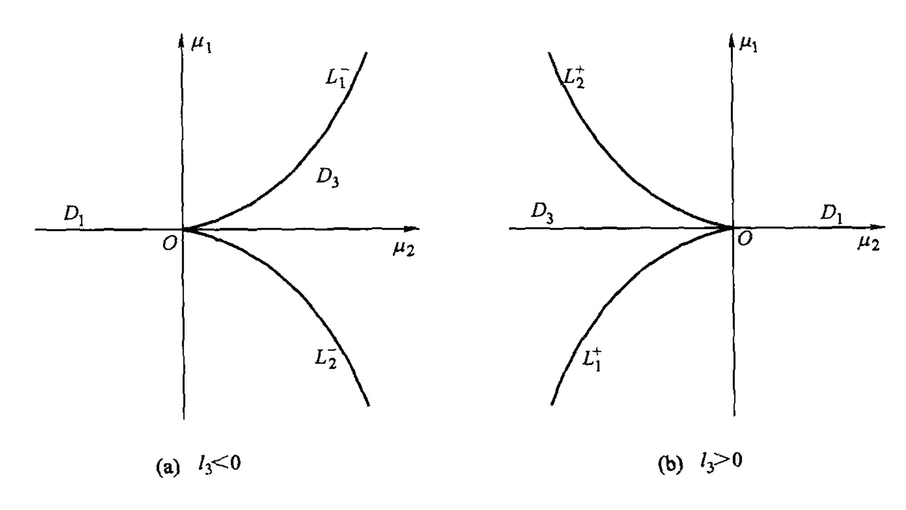


图 11.2.10 在 (a) 情形 $l_3 < 0$ 和 (b) 情形 $l_3 > 0$ 的分支开折.

(2) 在楔外部 D_1 中, 方程 (11.2.17) 只有一个稳定平衡态, 如图 11.2.8 (b) 所示.

(3) 对 $\mu \in L_1^-$, 方程 (11.2.17) 有一个稳定平衡态 O_1 以及一个半稳定平衡态 $O_{2,3}$, 它是 O_3 和 O_2 合并的结果, 它的第一个 Lyapunov 量为负, 如图 11.2.8 (d) 所示. 以及

(4) 对 $\mu \in L_2^-$, 方程 (11.2.17) 有一个稳定平衡态 O_3 和一个鞍 - 结点 $O_{1,2}$, 它的第一个 Lyapunov 量为负, 如图 11.2.8(c) 所示.

如果 $l_3 > 0$, 则:

(1) 在区域 D_3 内, 方程 (11.2.17) 有三个平衡态: 两个不稳定点 (O_1 和 O_3) 和一个稳定点 (O_2), 如图 11.2.9(a) 所示.

(2) 在楔外部 D_1 中, 方程 (11.2.17) 只有一个不稳定平衡态, 如图 11.2.9(b) 所示.

(3) 对 $\mu \in L_1^+$, 方程 (11.2.17) 有一个不稳定平衡态 O_1 以及一个半稳定平衡态 $O_{2,3}$, 其第一个 Lyapunov 量为正, 如图 11.2.9(c) 所示. 以及

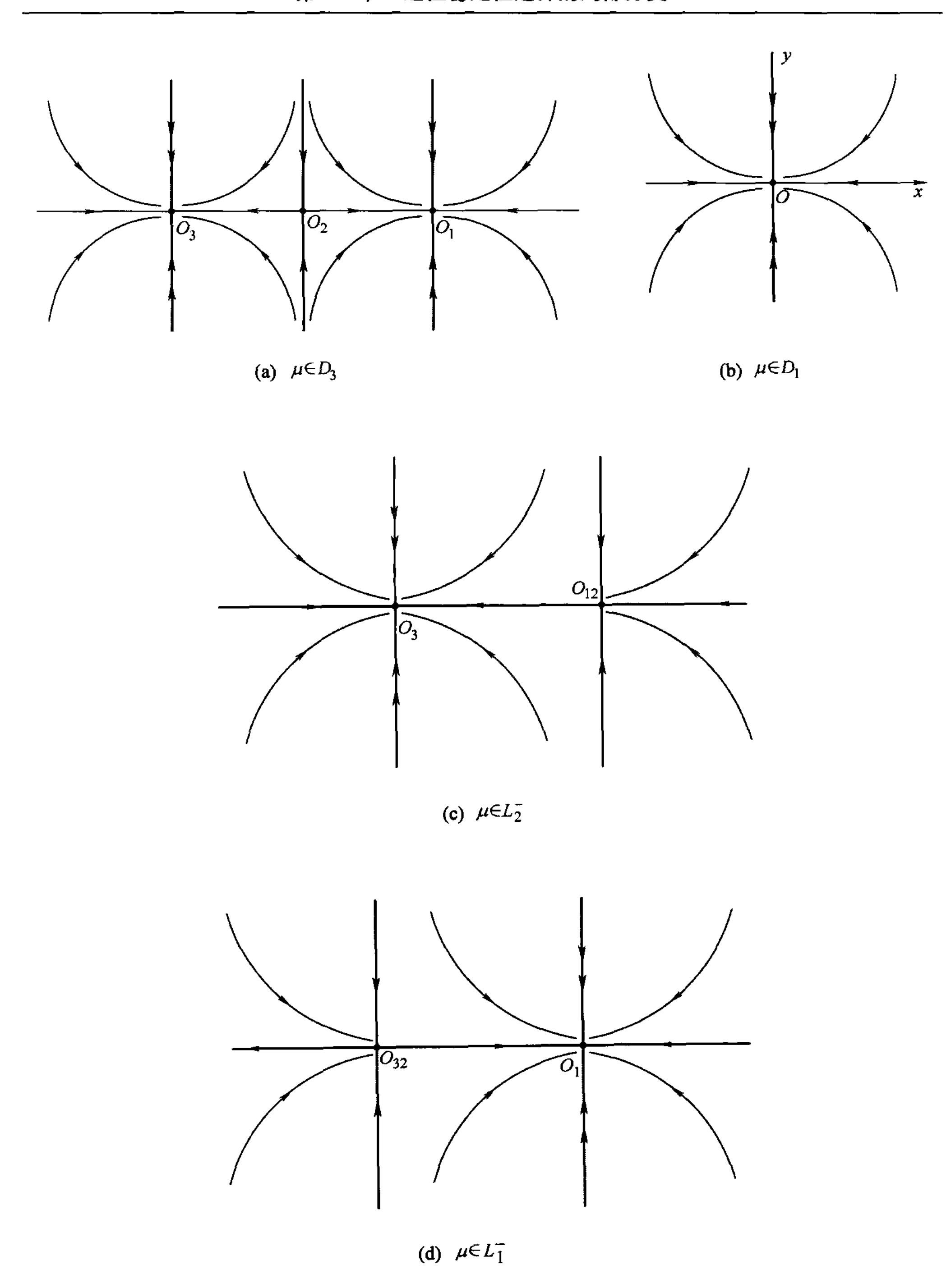
(4) 对 $\mu \in L_2^+$, 方程 (11.2.17) 有一个不稳定平衡态 O_3 和一个半稳定平衡态 $O_{1,2}$, 如图 11.2.9(d) 所示.

二维情形的分支在 $l_3 < 0$ 和 $l_3 > 0$ 的情形下分别如图 11.2.11 和 11.2.12 所示.

在情形 $l_3 > 0$, 中心平衡态对 $\mu \in D_3$ 是稳定的. 对 $l_3 < 0$, 稳定性区域的特征变得不大平凡: 即它变成多叶 (见图 11.2.13). 应该注意这时的稳定性边界在原点不光滑.

接下来假设 $l_2 = l_3 = 0$ 而 $l_4 \neq 0$. 则横截族取形式

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2 + l_4 x^4 + o(x^4). \tag{11.2.27}$$



(a) $\mu\in D_3$　(b) $\mu\in D_1$

(c) $\mu\in L_2^-$

(d) $\mu\in L_1^-$

图 11.2.11　对应于分支图 11.2.10 (a) 的相图.

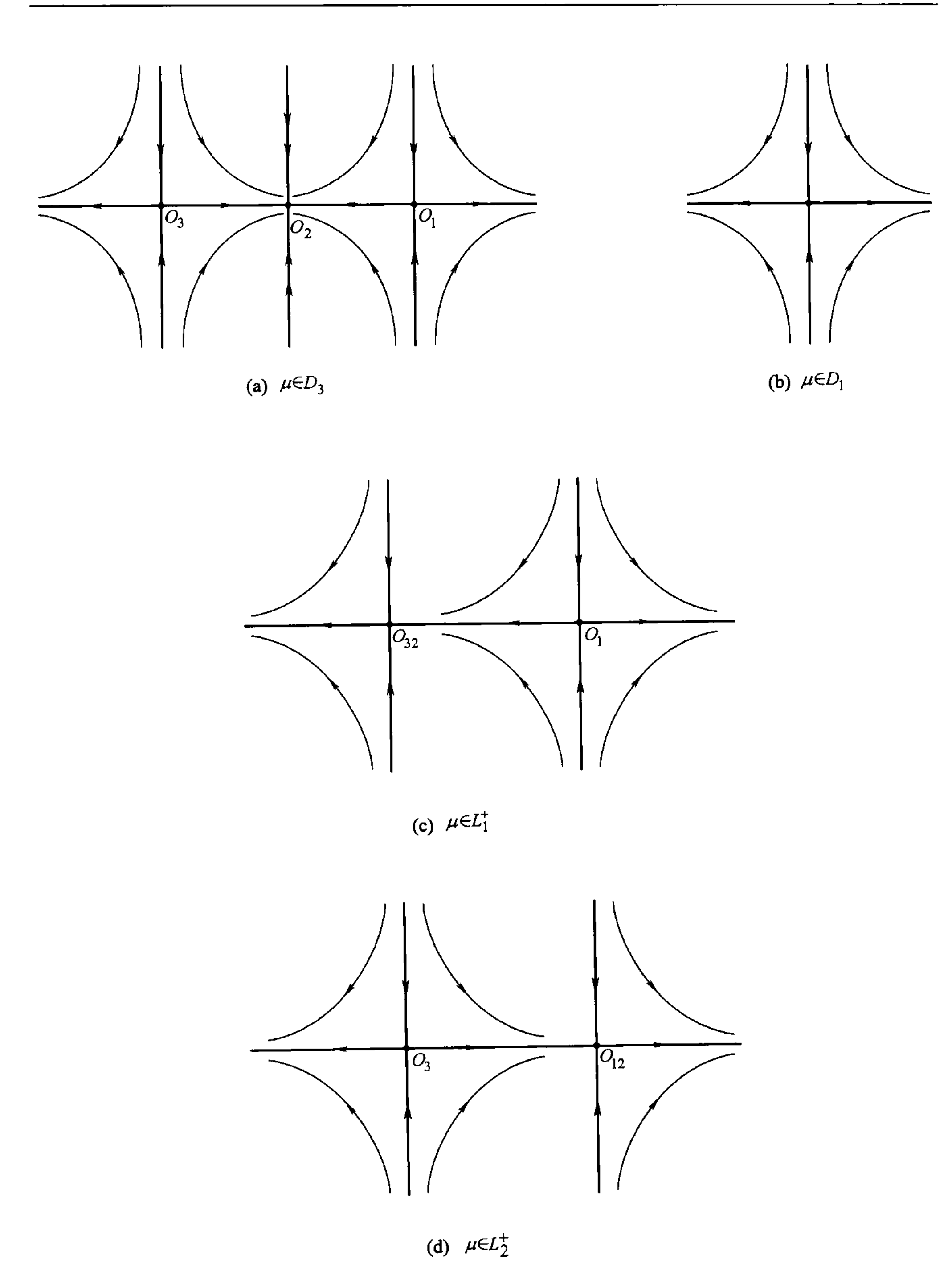


图 11.2.12 对应图 11.2.10 (b) 中分支图的相图.

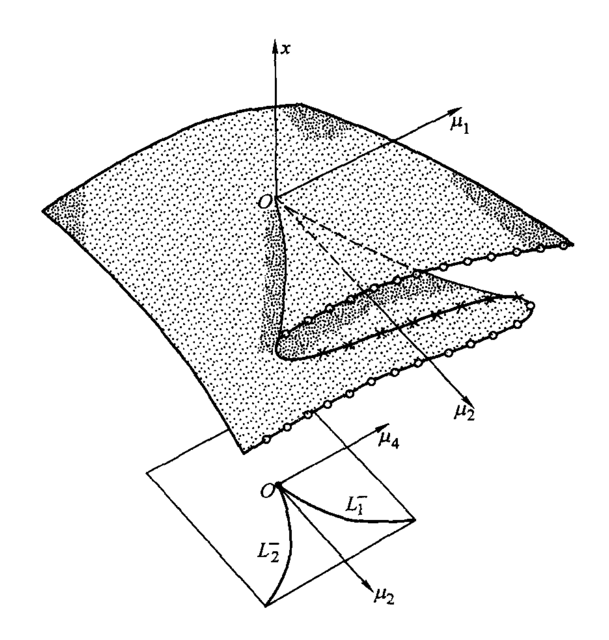


图 11.2.13　扩展相空间中分支集的拓扑.

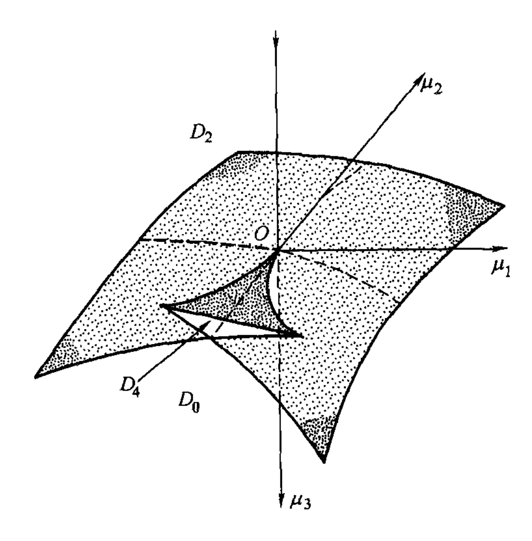


图 11.2.14　"燕尾状" 分支曲面. 见正文中说明.

参数空间在这里被划分成三个区域: 在原点相连接的 D_0, D_2 和 D_4. 当 $\mu \in D_4$ 时方程 (11.2.27) 有 4 个粗平衡态, 2 个稳定, 另 2 个不稳定; 当 $\mu \in D_2$ 时, 方程有 2 个粗平衡点, 1 个稳定, 另 1 个不稳定; 当 $\mu \in D_0$ 时, 根本就不存在平衡态.

分隔这些区域的分支曲面称为**燕尾** (当 $l_4 > 0$ 时见图 11.2.14 中对应的图像).

它有一条自交线

$$\mu_3 = -2l_4\sqrt{\frac{\mu_1}{l_4}} + o(\sqrt{|\mu_1|}), \quad \mu_2 = o(|\mu_1|^{3/4})$$

对应方程 (11.2.27) 的一对半稳定平衡态的存在性, 以及两个尖边

$$\mu_1 = -\frac{\mu_3^2}{12l_4} + o(\mu_3^2), \quad \mu_2 = \pm\sqrt{-\frac{8\mu_3^3}{27l_4}} + o(|\mu_3|^{3/2})$$

对应存在三重平衡态, 它的第三个 Lyapunov 量当 $\mu_2 > 0$ 时为正, $\mu_2 < 0$ 时为负. 在分支曲面上, 不在自交线和尖边上的其它参数值对应于一个半稳定平衡态.

对任何 k 关于 $l_2 = \cdots = l_{k-1} = 0, l_k \neq 0$ 的情形可作类似的分析. 它简单地化为对方程

$$0 = \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}x^{k-2} + l_kx^k + \tilde{G}(x, \mu) \tag{11.2.28}$$

的根的分析. 严格地讲, 后面的问题与奇点理论有关, 我们就不详细去考虑了. 由于 (11.2.28) 右端的 k 阶导数当 x 较小时不为零, 这个方程的根的个数不会超过 k (包括重次), 即原来的平衡态不可能分支出多于 k 个平衡态.

空间 $(\mu_1, \cdots, \mu_{k-1})$ 中的分支集对应于不同退化次数的平衡态. 分支曲面的自交对应于出现两个或更少的结构不稳定平衡态. 为了求分支曲面, 作坐标和参数的尺度化是有用的. 特别地, 令

$$\delta = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i^{1/(k+1-i)}, \quad M_i = \frac{\mu_i}{\delta^{k+1-i}}.$$

则经变换 $x \to \delta x$ 后, 方程 (11.2.28) 化为形式

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} M_ix^{i-1} + l_kx^k + \cdots, \tag{11.2.29}$$

其中的省略号表示 $\delta \to 0$ 时趋于零的项. x 和 $M_1, \cdots, M_{k-1}$ 不再是小量, 且

$$\sum_{i=1}^{k-1} M_i^{1/(k+1-i)} = 1.$$

可以证明对方程 (11.2.29) 的分析等价于对截断方程

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} M_ix^{i-1} + l_kx^k \tag{11.2.30}$$

的分析 (回复到非尺度化的变量, 这意味着方程 (11.2.25) 的分支集的结构和相图与多项式族 $\dot{x} = \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}x^{k-2} + l_kx^k$ 对应的相同).

设 $(M_1^*, \cdots, M_{k-1}^*)$ 是 (11.2.30) 的分支点, 即它对应于一个或多个重根的存在性. 在这一点族 (11.2.30) 关于所给分支是在一般位置上. 应用隐函数定理容易对方程 (11.2.29) 进行验证, 当 δ 充分小时对应于相同分支的曲线 $\{M_i(\delta)=M_i^* + \cdots\}_{i=1,\cdots,k-1}$ 有定义. 因此, 分支集是由具有渐近表达式

$$\mu_i \sim M_i^* \delta^{k+1-i} \tag{11.2.31}$$

的曲线组成. 我们可以争取做到更深入一些, 即对任何余维 s 分支, 至少一个 M_i^* 的值对 $i \geqslant s+1$ 是非零的. 由此得知对应于余维 s 分支的分支集是由曲面 (在 $\mu = 0$ 相连接)

$$\mu_j = \psi_j(\mu_{s+1}, \cdots, \mu_{k-1}) \quad (j = 1, \cdots, s) \tag{11.2.32}$$

组成, 其中 ψ_j 满足关系

$$|\psi_j|^{1/(k+1-j)} \leqslant C \sum_{i=s+1}^{k-1} |\mu_i|^{1/(k+1-s)} \tag{11.2.33}$$

(其中, C 是与 s 和 j 无关的公共常数). 因此, 例如燕尾整个地位于 "锥"

$$|\mu_1| \leqslant C(|\mu_2|^{4/3} + |\mu_3|^2)$$

内, 其上的尖边和自交线 (它们是余维 2 曲线) 满足不等式

$$|\mu_1| \leqslant C|\mu_3|^2, \quad |\mu_2| \leqslant C|\mu_3|^{3/2}.$$

还得注意, 在实践中经常可能发生, 中心流形上方程的控制参数按一般方式得不到. 例如, 如果系统关于对称变换 $x \to -x$ 不变, 则中心流形方程容许有相同的对称. 因此, 在中心流形上系统的右端将不包含 x 的偶次项. 于是相应的横截族可表示为形式

$$\dot{x} = \mu x + l_3 x^3 + o(x^3).$$

如果 $l_3 \neq 0$, 一个参数 μ 就够了. 坐标关于 μ 的依赖性在 $l_3 < 0$ 的情形下如图 11.2.15 所示. 当 μ 变成正的时, 平凡平衡态失去它的稳定性, 生成两个新的稳定平衡态. 这样的分支称为**叉分支**.

在应用中经常会遇到其它的机构, 它们的平衡态在分支点不会消失是预先知道的. 如果平衡态位于原点, 则横截族有形式

$$\dot{x} = \mu x + l_2 x^2 + o(x^2).$$

如果 $l_2 \neq 0$, 分支将以下面方式呈现 (见图 11.2.16): 当 $\mu \to -0$ 时, 不稳定平衡态趋于在原点的稳定平衡态; 当 μ 穿过零时平凡平衡态变成不稳定的, 而非平凡平衡态变成稳定的, 即发生所谓稳定性的改变. 这样的分支称为**超临界分支**.

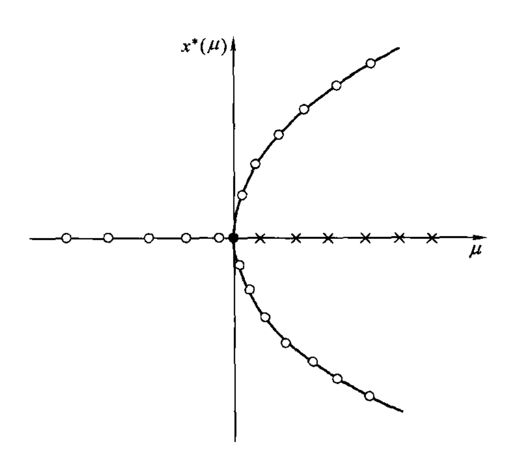


图 11.2.15　在叉分支 (对称系统中是典型的) 与参数 μ 相对的平衡态坐标.

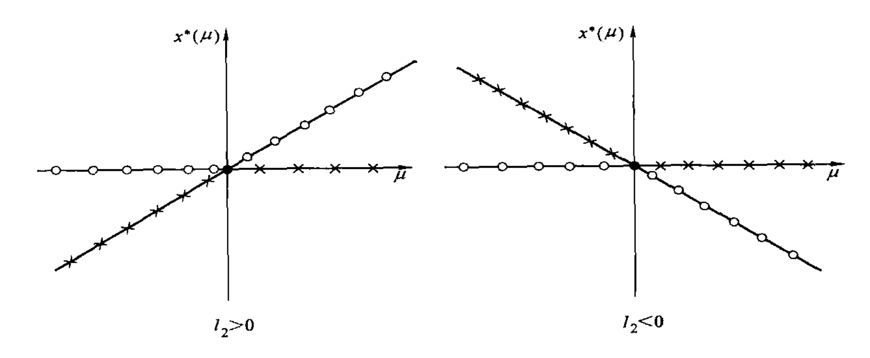


图 11.2.16　超临界分支平衡态的坐标. 平衡态不消失, 但改变了它们的稳定性.

11.3　具有乘子 +1 的周期轨道分支

考虑 $\mathbb{C}^r$ – 映射族 ($r \geqslant 2$), 它在零参数值有乘子等于 +1 的不动点, 其余的乘子假设在单位圆内. 在这种情形下不动点附近的映射可写为形式

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + g(x, y, \varepsilon), \\ \bar{y} &= Ay + f(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^n$, 矩阵 A 的特征值位于单位圆内, f 和 g 是 $\mathbb{C}^r$ – 光滑函数, 它们以及它们关于 x 和 y 的一阶导数在 $x = 0, y = 0, \varepsilon = 0$ 时等于零.

用我们重复多次的约化定理, 存在 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 坐标变换将族 (11.3.1) 化为形式

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + G(x,\varepsilon), \\ \bar{y} &= [A + F(x,y,\varepsilon)]y, \end{aligned} \tag{11.3.2}$$

其中 G 是 $\mathbb{C}^r$ – 函数, F 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 函数, 使得

$$\begin{aligned} F(0,0,0) &= 0, \\ G(0,0) &= 0, \\ G'_x(0,0) &= 0. \end{aligned} \tag{11.3.3}$$

由于在 y 变量上的动力学是平凡的 —— 它们指数式地收敛于原点, 因此我们只需考虑系统 (11.3.2) 在中心流形上的限制

$$\bar{x} = x + G(x,\varepsilon) \tag{11.3.4}$$

的分支. 由 (11.3.3), 函数 G 在 $\varepsilon = 0$ 关于 x 至少是二阶小量. 如果 k 是第一个非零 Lyapunov 量的指标数, 则在 $\varepsilon = 0$ 函数 G 有形式

$$G(x,0) = l_k x^k + o(x^k), \tag{11.3.5}$$

其中 $l_k \neq 0$. 在最典型的情形 $k = 2$, $G(x,0) = l_2 x^2 + o(x^2)$.

由于当 x 和 ε 较小时 $G'_x(x,\varepsilon)$ 较小, (11.3.4) 的右端是 x 的单调增加函数. 映射 (11.3.4) 的不动点由条件 $G(x,\varepsilon) = 0$ 求得, 它们的稳定性由导数 $G'_x(x,\varepsilon)$ 的符号确定. 如果在不动点这个导数为正, 则不动点不稳定; 如果导数为负, 则不动点稳定. 换句话说, 我们有与微分方程族

$$\dot{x} = G(x,\varepsilon)$$

完全类似的系统, 即具有单位乘子的不动点与具有零特征指数的平衡态以相同方式分支.

因此, 我们现在可以简单地应用上一节的结果. 从而, 如果族 (11.3.4) 在一般位置 (即矩阵 (11.2.18) 的秩是最大的; 如果 $l_2 \neq 0$, 这个条件化为不等式 (11.2.9)), 那么对应于具有单位乘子和零 Lyapunov 量 $l_2, \cdots, l_{k-1}$ 的不动点存在性的参数集形成一个通过 $\varepsilon = 0$ 的余维 $(k-1)$ 的 $\mathbb{C}^{r-(k-1)}$ – 光滑曲面 $\mathfrak{M}'$. 与 $\mathfrak{M}'$ 横截的映射族可写为

$$\bar{x} = x + G(x,\mu) = x + \mu_1 + \mu_2 x + \cdots + \mu_{k-1}x^{k-2} + l_k x^k + o(x^k) \tag{11.3.6}$$

(为达到这个形式我们必须将原点移到点 x^*, 在这点导数 $G^{(k-1)}$ 为零. 由于 G 关于 x 的 k 阶导数不为零, 点 x^* 是唯一确定的且 $C^{r-(k-1)}$ 光滑依赖于参数).

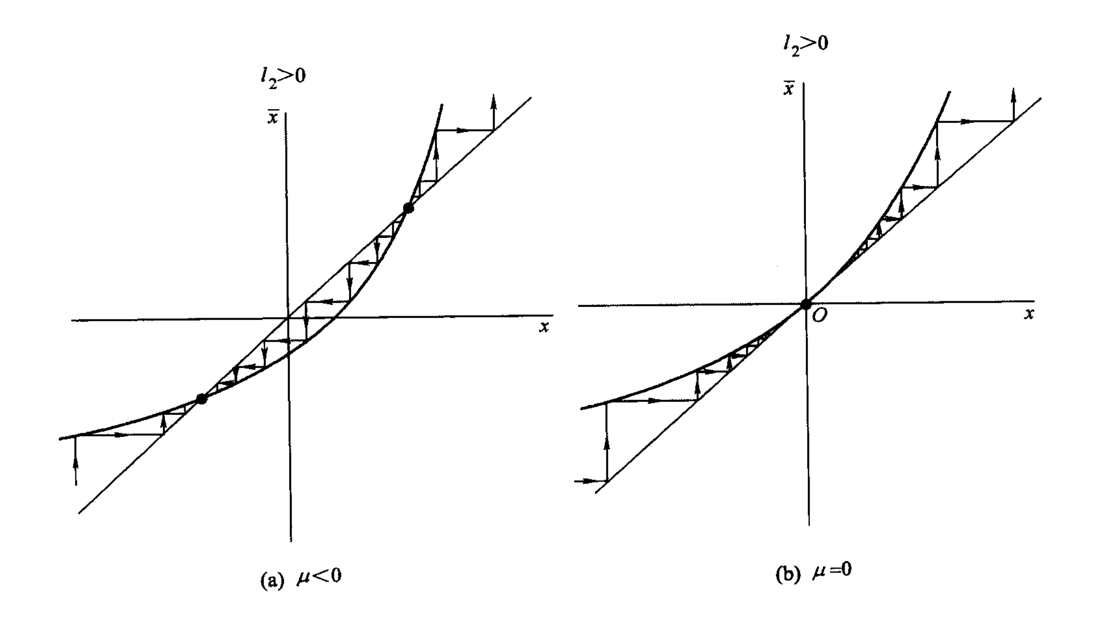
我们已经在上一节强调过, 函数 G 的零点的研究等价于多项式

$$\mu_1 + \mu_2 x + \cdots + \mu_{k-1}x^{k-2} + l_k x^k$$

的零点的研究. 我们不准备进一步讨论它的一般情形, 下面仅考虑低维分支.

1. $l_2 \neq 0$. 一维映射的横截族在这种情形下取形式

$$\bar{x} = x + \mu + l_2 x^2 + o(x^2). \tag{11.3.7}$$



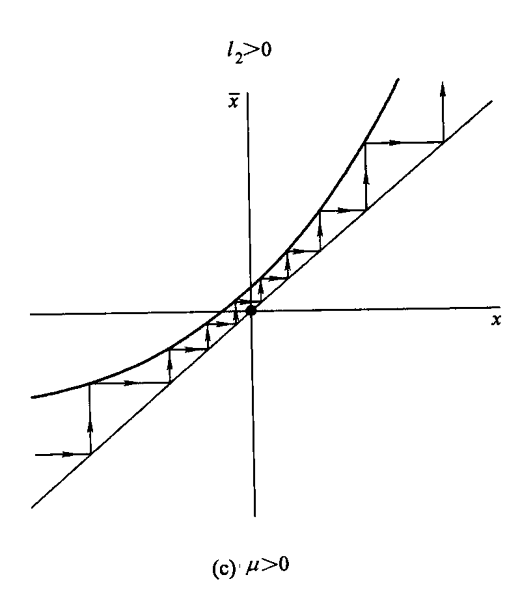
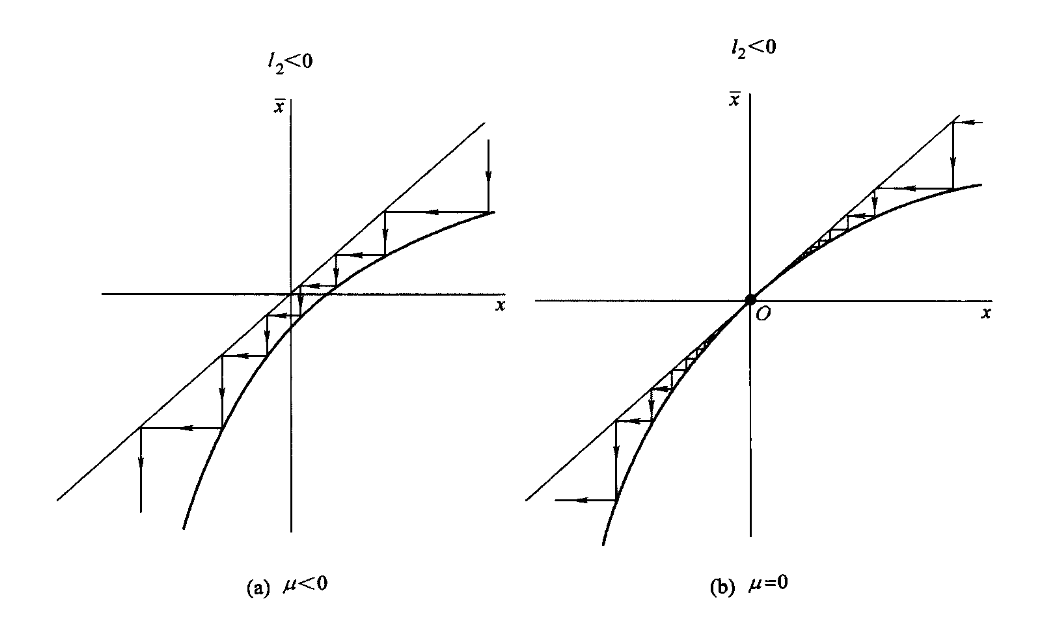


图 11.3.1　在情形 $l_2 > 0$ 时的 Lamerey 阶梯图.



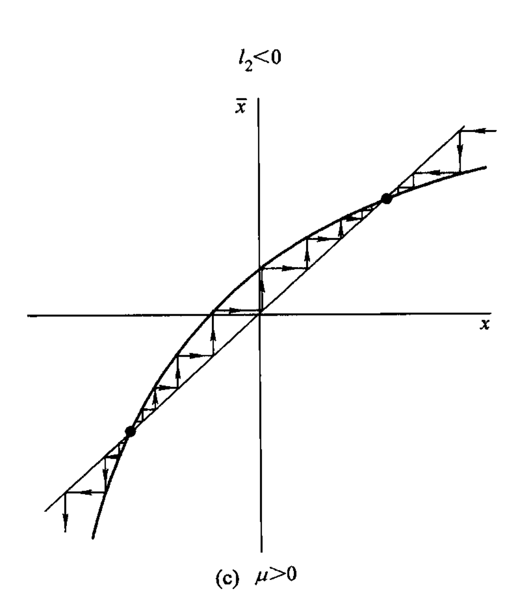


图 11.3.2　在情形 $l_2<0$ 时的 Lamerey 阶梯图.

情形 $l_2>0$ 和 $l_2<0$ 的 Lamerey 图分别如图 11.3.1 和图 11.3.2 所示. 当 $l_2\mu<0$ 时存在两个不动点: $x^{\pm}=\pm\sqrt{-\dfrac{\mu}{l_2}}+o(\sqrt{\mu})$; 在 $\mu=0$ 时, 只存在一个结构不稳定点; 当

$l_2\mu > 0$ 时不存在不动点. 所有轨线经过有限次 ($\sqrt{\frac{\mu}{l_2}}$ 阶的) 迭代都跑出原点邻域.

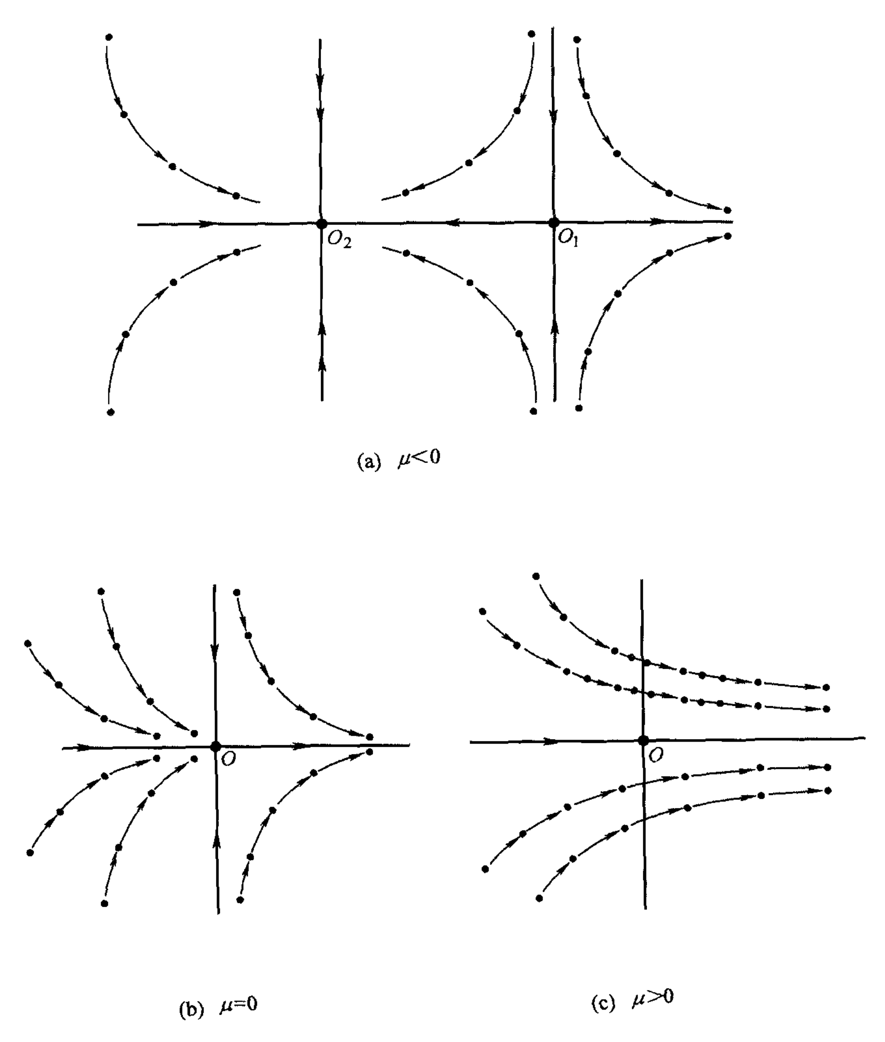


图 11.3.3 在情形 $l_2 > 0$ 时的鞍 – 结点不动点分支. 注意到鞍 – 结点的幻影 ((c) 中) 附近点的迭代变得更加密集 (水平方向的膨胀率刚好大于 1).

不动点坐标关于 μ 的依赖性如图 11.2.2 所示.

当维数高于 1 时, 对不同的 μ 原始映射 (11.3.1) 的相图如图 11.3.3 和图 11.3.4 所示.

当映射 (11.3.1) 是某个常微分方程系统周期轨道附近的 Poincaré 映射时, 所考虑的不动点对应鞍 – 结点周期轨道 (在 $\mu = 0$). 此时的相图如图 11.3.5—图 11.3.7 所示.

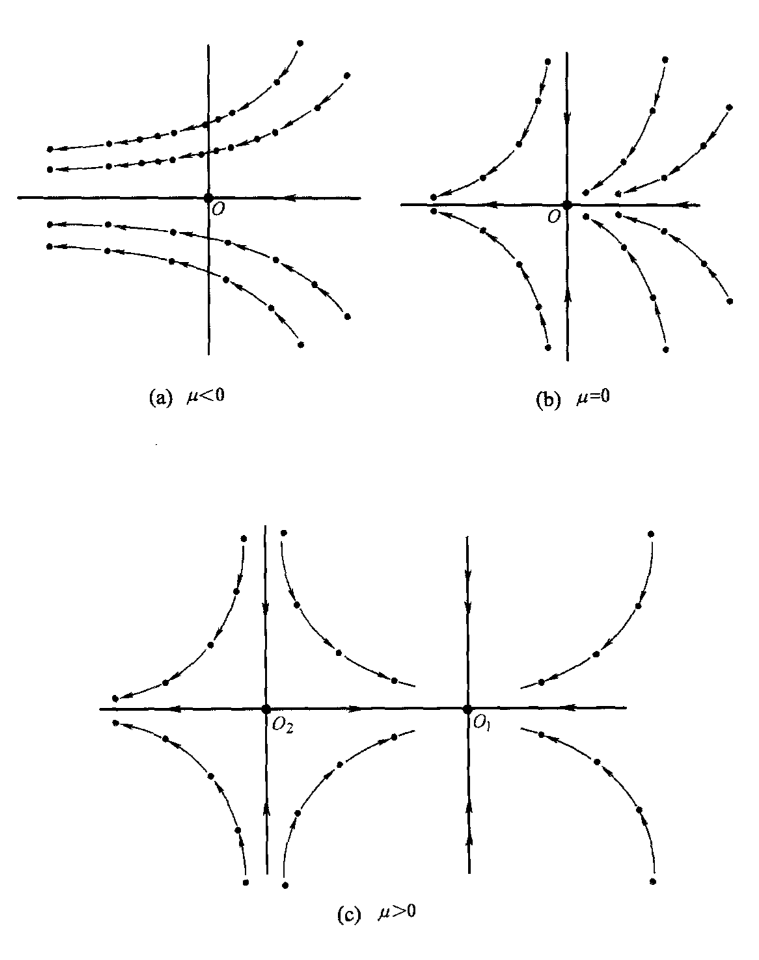


图 11.3.4　在情形 $l_2 < 0$ 时的鞍 – 结点不动点分支.

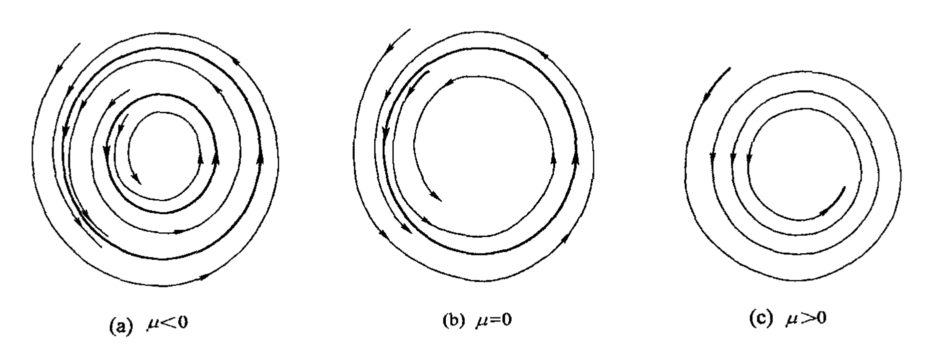


图 11.3.5　在情形 $l_2 > 0$ 时的平面鞍 – 结点极限环分支. 半稳定环 (b) 对外部区域吸引, 对内部区域排斥.

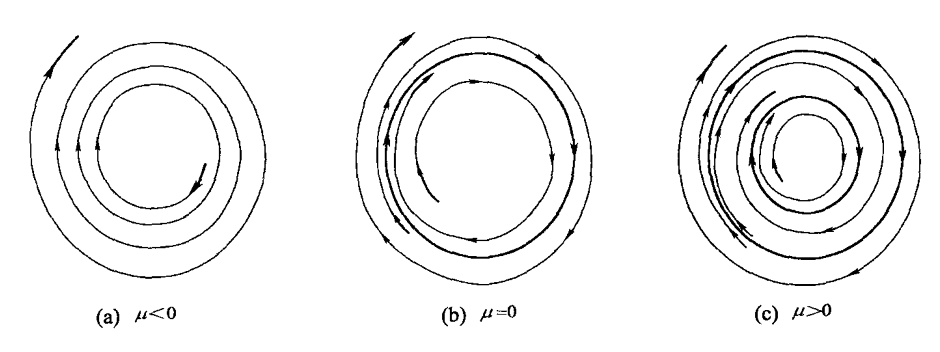


图 11.3.6 在情形 $l_2 < 0$ 时的平面鞍 - 结点极限环分支. 在变换 $\mu \to -\mu$ 下这与图 11.3.5 相同. 向前路径的特征是从轨线的收缩中出现鞍 - 结点环.

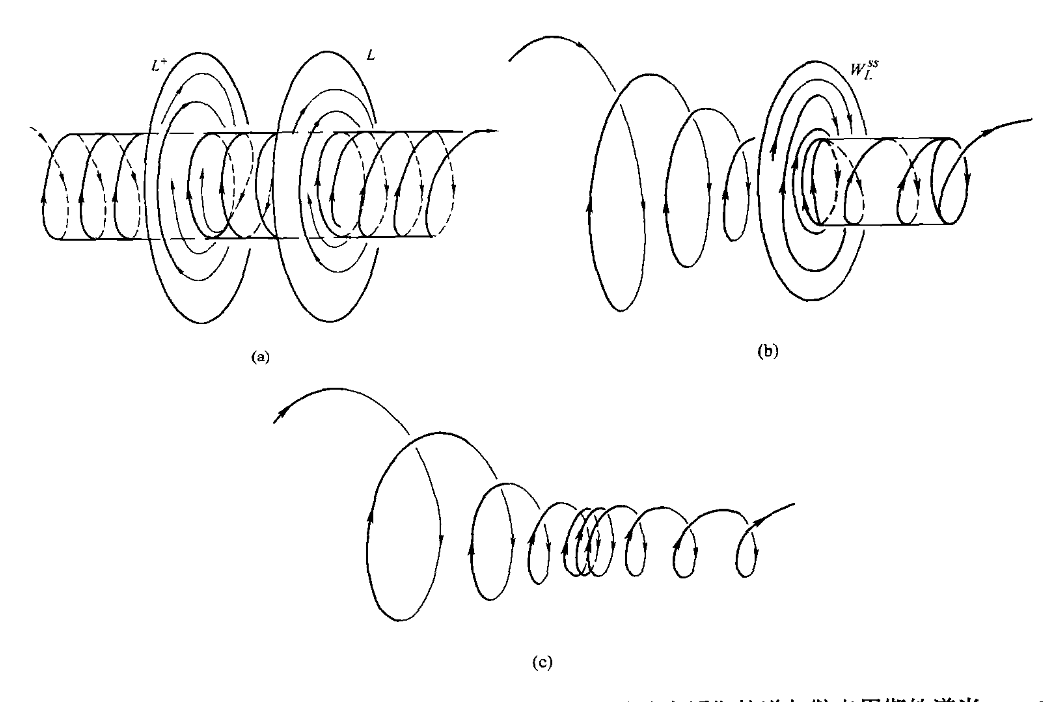


图 11.3.7 $\mathbb{R}^3$ 中鞍 - 结点周期轨道分支的情景. (a) 中的稳定周期轨道与鞍点周期轨道当 $\mu = 0$ 时重合, 在 (b) 中变为鞍 - 结点周期轨道, 然后在 (c) 中消失. (c) 中鞍 - 结点轨道的不稳定流形同胚于半柱面. 跟随 (b) 的路径轨线在"虚" 鞍 - 结点周期轨道 (即 (b) 中鞍 - 结点轨道的幻影) 附近沿着横截方向慢下来, 故它的局部线段类似于压缩的弹簧.

2. $l_2 = 0, l_3 \neq 0$. 横截族在这时取形式

$$\bar{x} = x + \mu_1 + \mu_2 x + l_3 x^3 + o(x^3). \tag{11.3.8}$$

分支如图 11.3.8 ($l_3 < 0$) 和图 11.3.9 ($l_3 > 0$) 所示. 对应于鞍 – 结点型的不动点 [即方程 $G(x,\mu)=0$ 的重根] 的分支曲线 $L^{\pm}$ 由方程

$$27\mu_1^2 + \frac{4\mu_2^3}{l_3} + o(\mu_2^3) = 0$$

定义. 在区域 D_3 中, 映射 (11.3.8) 有三个粗不动点: 如果 $l_3 < 0$ 则两个稳定, 一个不稳定, 如果 $l_3 > 0$ 则两个不稳定, 一个稳定. 在区域 D_1 中存在单个粗不动点: $l_3 < 0$ 时稳定, 反之则不稳定. 图 11.3.10 和图 11.3.11 显示穿越 L_1 和 L_2 时, 对 l_3 的两个符号的 Lamerey 图. 图 11.3.12 和图 11.3.13 表示相应的二维情形.

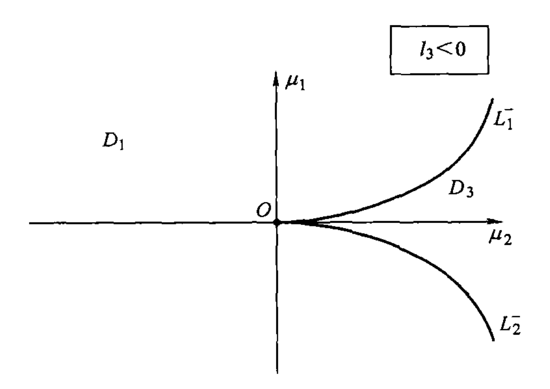


图 11.3.8　在情形 $l_2 = 0$ 和 $l_3 > 0$ 时的分支图.

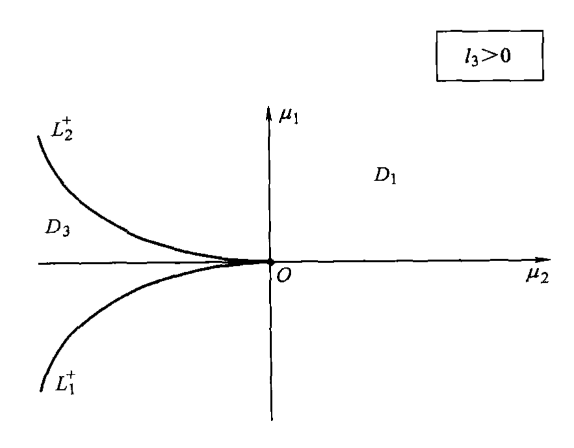


图 11.3.9　在情形 $l_2 = 0$ 和 $l_3 < 0$ 时的分支图.

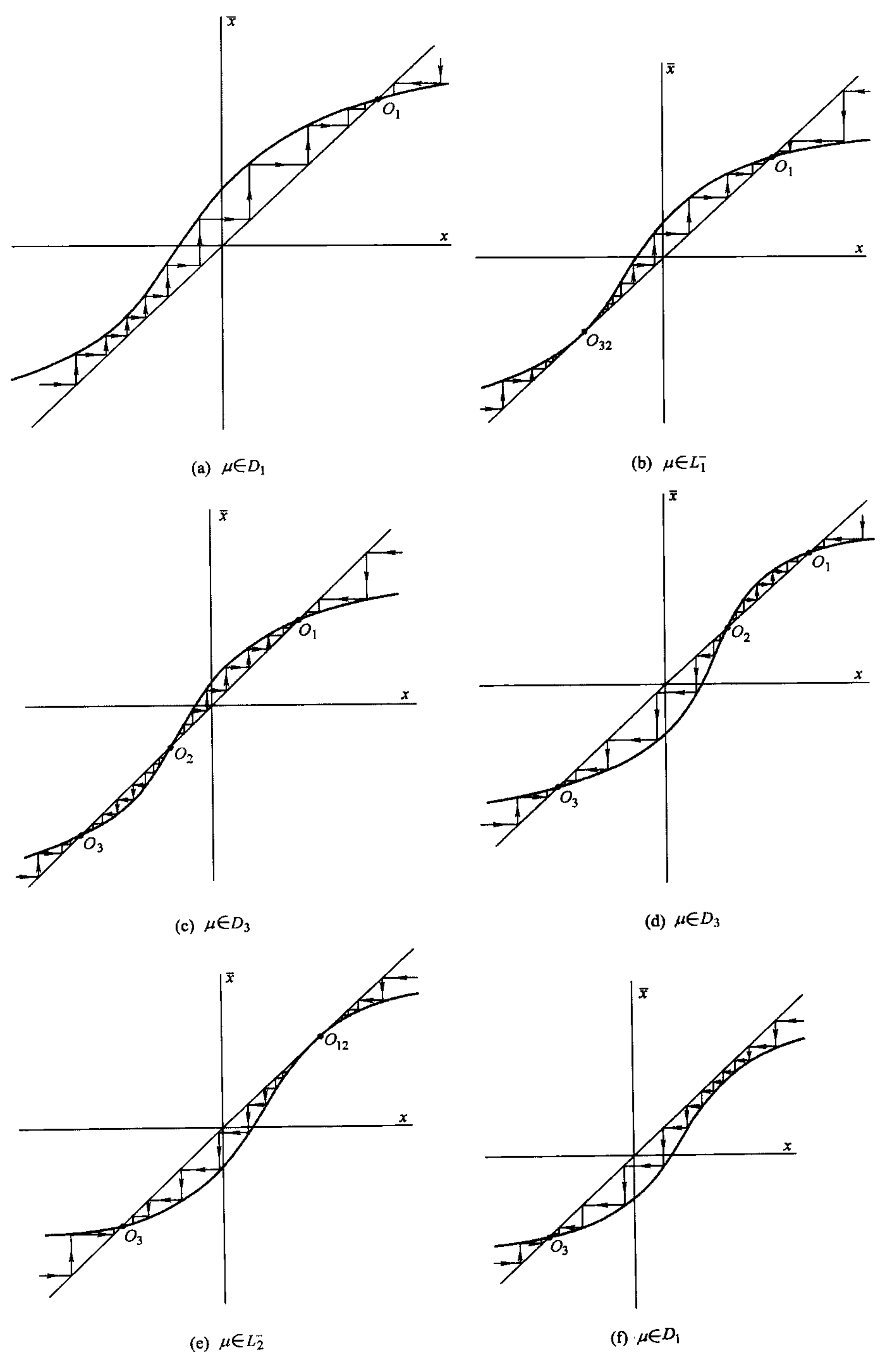


图 11.3.10　对应于图 11.3.8 中分支图的不动点分支.

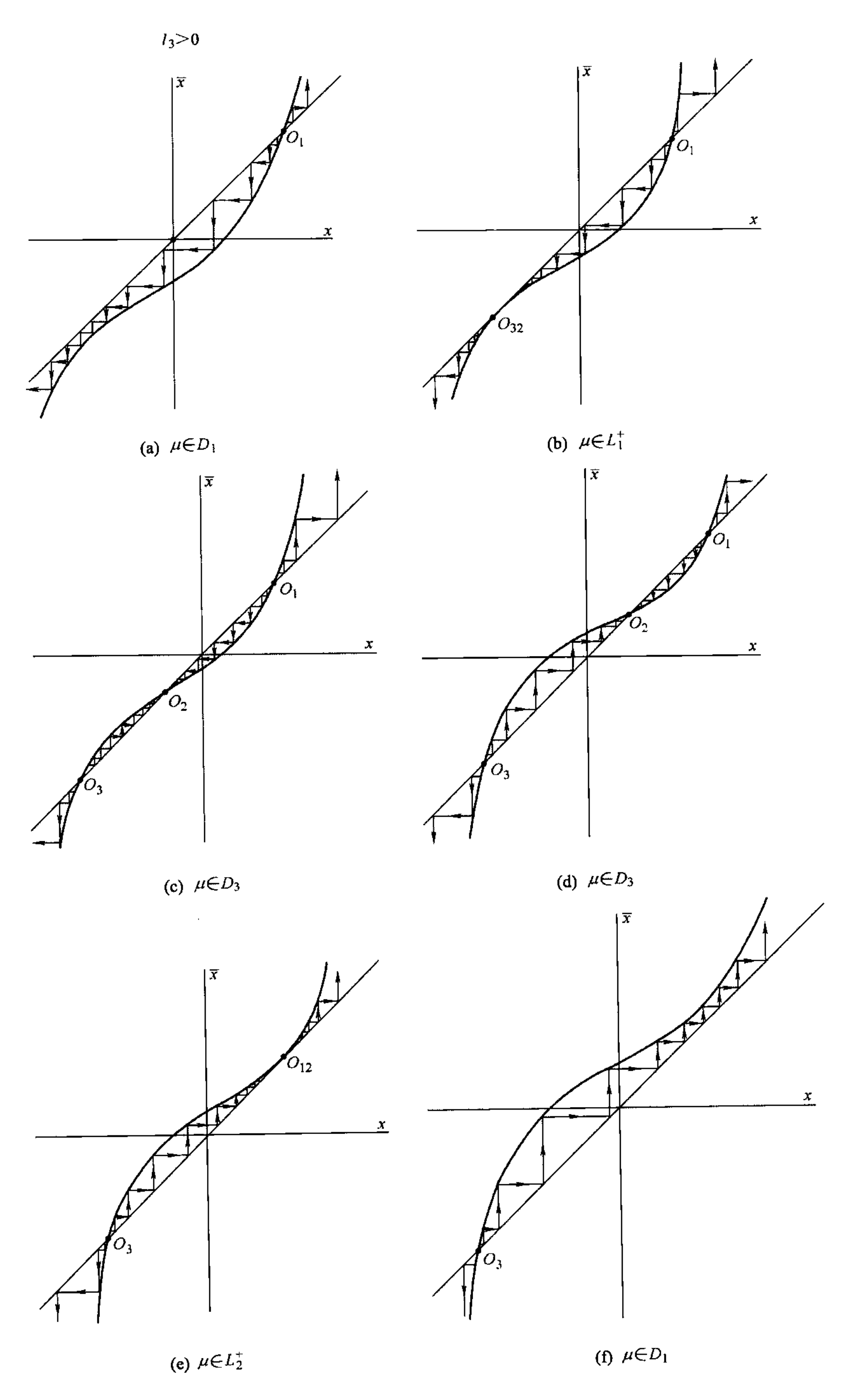
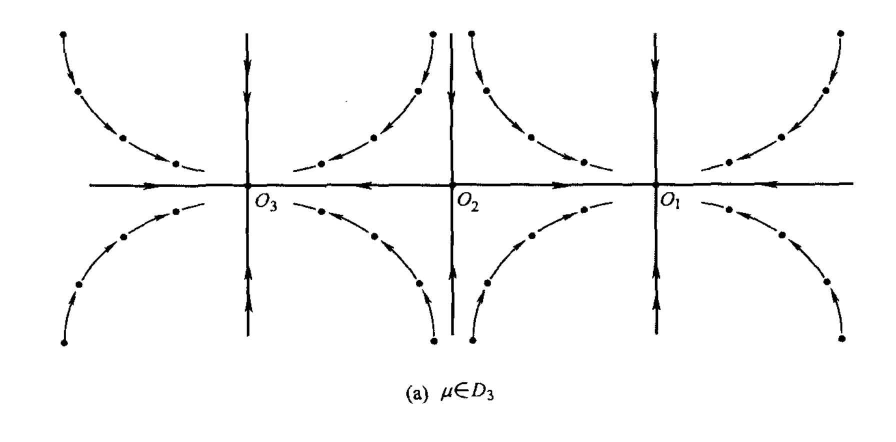
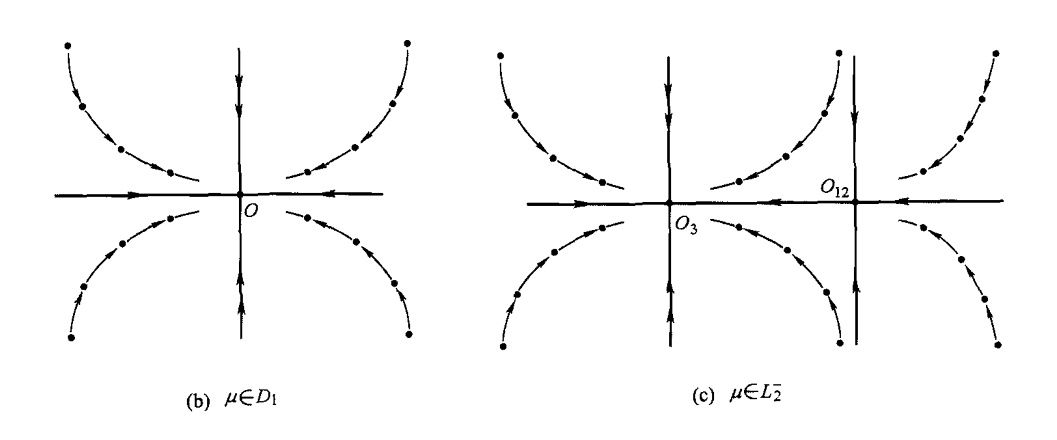


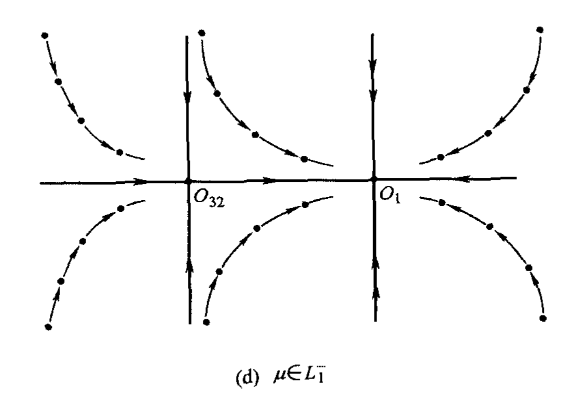
图 11.3.11　对应于图 11.3.9 中开折的不动点分支.



(a) $\mu \in D_3$



(b) $\mu \in D_1$ (c) $\mu \in L_2^-$



(d) $\mu \in L_1^-$

图 11.3.12 在情形 $l_2 = 0$ 和 $l_3 < 0$ 时的平面不动点分支.

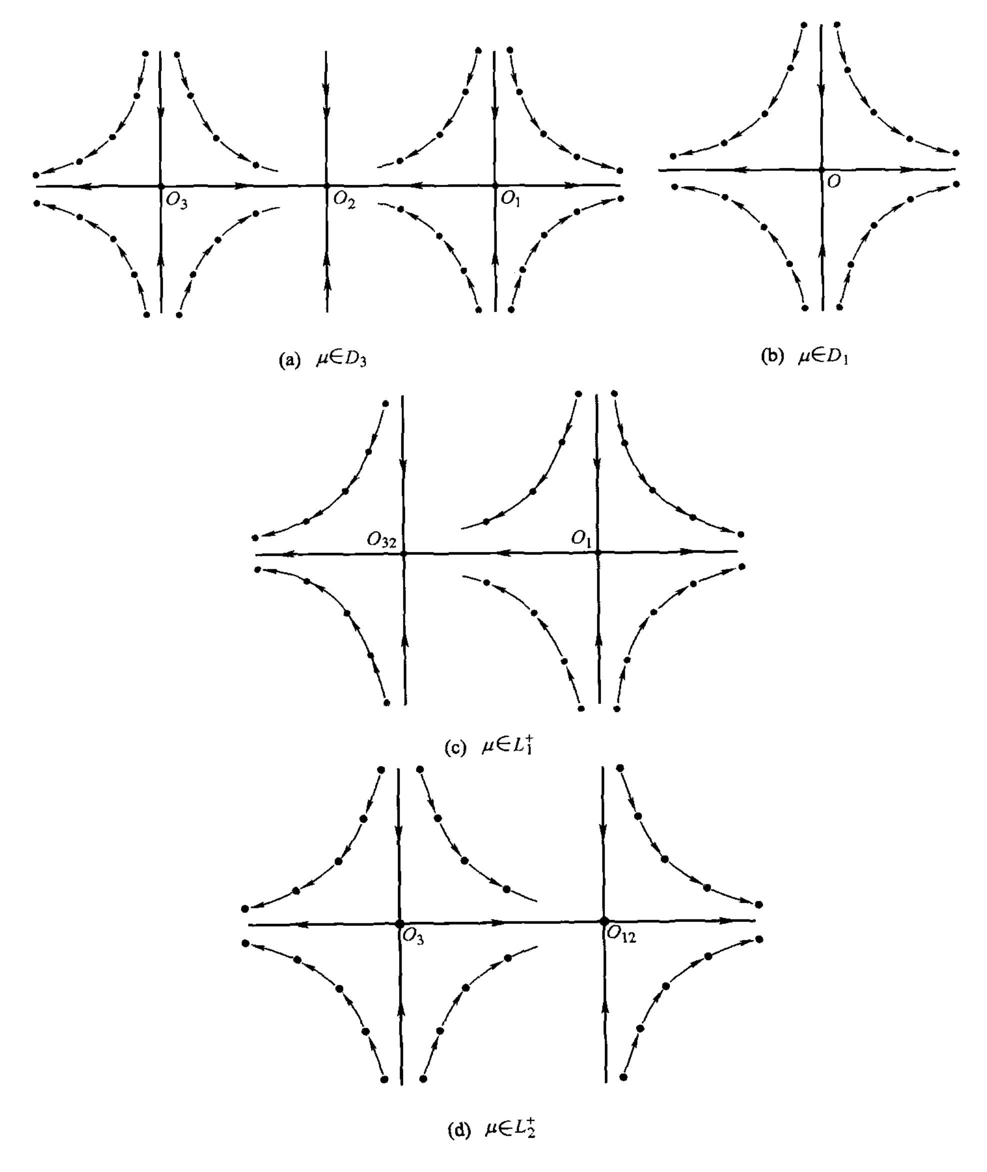


图 11.3.13　在情形 $l_2 = 0$ 和 $l_3 > 0$ 时的平面不动点分支.

11.4　具有乘子 -1 的周期轨道分支

下面考虑 $\mathbb{C}^r$ $(r \geqslant 3)$ 类映射族, 它在零参数值有乘子等于 (-1) 的不动点. 由于

余下的乘子假设在单位圆内, 映射在不动点附近取形式

$$\begin{aligned}\bar{x}&=-x+G(x,y,\varepsilon),\\ \bar{y}&=(A+F(x,y,\varepsilon))y,\end{aligned}\tag{11.4.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^1, y\in\mathbb{R}^n$, 矩阵 A 的特征值位于单位圆内, G 是 $\mathbb{C}^r$ - 函数以及 F 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 函数, 满足

$$\begin{aligned}F(0,0,0)&=0,\\ G(0,0)&=0,\\ G'_x(0,0)&=0.\end{aligned}\tag{11.4.2}$$

考虑在中心流形上的映射

$$\bar{x}=-x+G(x,\varepsilon).\tag{11.4.3}$$

由于映射 (11.4.3) 右端的导数不为零 (它在 $x=0,\varepsilon=0$ 时等于 -1), 对所有小 ε 不动点保持 (且仍是单的). 不失一般性假设不动点位于原点, 即

$$G(0,\varepsilon)\equiv 0.\tag{11.4.4}$$

在 10.6 节已经证明当 $\varepsilon=0$ 时 G 的 Taylor 展开式中 x 的所有偶次幂都非共振. 因此, 可以用多项式变换将它们消去直到任意阶. 显然, 对小 $\varepsilon\neq 0$ 这些项仍保持非共振, 即对所有小 ε 可以用系数光滑依赖于 ε 的多项式变换将它们也消去直到任意阶.

一般地, 第一个 Lyapunov 量 l_1 不为零, 即函数 G 在 $\varepsilon=0$ 时从三次项开始

$$G(x,0)=-l_1x^3+o(x^3).$$

于是, 对所有小 ε 消去 x^2 项后, 映射可化为形式

$$\bar{x}=-x(1+l_0(\varepsilon)+l_1x^2)+o(x^2),\tag{11.4.5}$$

其中 l_0 是 ε 的 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑函数, $l_0(0)=0$.

不动点的稳定性区域边界 $\mathfrak{M}$ 由条件 $l_0(\varepsilon)=0$ 确定, 只要向量 $\left(\dfrac{\partial l_0}{\partial\varepsilon_1},\cdots,\dfrac{\partial l_0}{\partial\varepsilon_p}\right)_{\varepsilon=0}$ 不为零. 它是余维 1 的 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑曲面, 选择 $l_0(\varepsilon)$ 作为控制参数 μ. 于是任何横截族有形式

$$\bar{x}=-x(1+\mu+l_1x^2)+\tilde{G}(x,\mu),\tag{11.4.6}$$

其中 $\tilde{G}=o(x^3)$. 它是 x 的 $\mathbb{C}^r$ - 光滑函数, μ 的 $\mathbb{C}^{r-2}$ - 光滑函数, 使得

$$\tilde{G}(0,\mu)=\tilde{G}'_x(0,\mu)=\tilde{G}''_{xx}(0,\mu)=\tilde{G}'''_{xxx}(0,0)=0.\tag{11.4.7}$$

对所有 x 和充分小的 μ, 映射 (11.4.6) 有唯一不动点. 这个点 (在原点) 当 $\mu<0$ 时稳定, $\mu>0$ 时不稳定, 对 $\mu\neq 0$, 它不产生分支. 除了这个不动点, 映射 (11.4.6) 可

有周期 2 点. 因此为了确定分支我们应该考虑这个映射的二次迭代. 那里不可能存在周期大于 2 的其它周期点, 因为 (11.4.6) 的二次迭代是单调增加的一维映射 —— 这样的映射的周期轨道是不动点.

二次迭代由

$$\bar{\bar{x}} = x(1 + 2\mu + \mu^2 + 2l_1 x^2) + \tilde{\tilde{G}}(x, \mu) \tag{11.4.8}$$

给出, 其中

$$\tilde{\tilde{G}}(0, \mu) = \tilde{\tilde{G}}'_x(0, \mu) = \tilde{\tilde{G}}''_{xx}(0, \mu) = \tilde{\tilde{G}}'''_{xxx}(0, 0) = 0. \tag{11.4.9}$$

二次迭代的非零不动点由方程

$$\mu\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) + l_1 x^2 + \frac{\tilde{\tilde{G}}(x, \mu)}{2x} = 0$$

求得. 这个方程类似于出现鞍 – 结点分支的不动点的坐标方程 (见 (11.2.12)). 因此, 我们可以验证 $\mu l_1 > 0$ 时方程没有实根, $\mu l_1 < 0$ 时有两个相反符号的根, 即

$$x^{\pm}(\mu) = \pm\sqrt{\left|\frac{\mu}{l_1}\right|} + o(\sqrt{|\mu|}).$$

如同对映射 (11.4.7), 偶 (x^+, x^-) 组成周期 2 轨道. 它的乘子由微分 (11.4.8) 的右端得到, 且等于

$$\rho = 1 + 2\mu + 6l_1 x^2 + o(\mu) + o(x^2) = 1 - 4\mu + o(\mu).$$

由于在周期 2 点的存在性区域, μ 的符号与 l_1 的符号相反, 可得知 $l_1 > 0$ 时乘子大于 1, 周期 2 点不稳定. 相应地, $l_1 < 0$ 时乘子小于 1, 周期 2 点稳定. 综上所述我们得到:

(1) 若 $l_1 < 0$, 则对 $\mu \leqslant 0$, 在原点的不动点稳定, 它吸引任何小邻域内的一切轨线. 当 $\mu > 0$ 时不动点变成不稳定, 从这点分支出稳定的周期 2 点, 对应的 Lamerey 图如图 11.4.1 所示.

(2) 若 $l_1 > 0$, 则对 $\mu < 0$, 存在在原点的稳定不动点 O 以及界定 O 的吸引盆的不稳定周期 2 轨道. 在 $\mu = 0$, 周期 2 轨道与 O 合并, 后者变成不稳定, 当 $\mu \geqslant 0$ 时所有轨线除了 O 以外都离开原点邻域, 见图 11.4.2.

下面考虑原映射 (11.4.1). 为了看得清楚起见我们限制在二维情形. 这时这个映射写为形式

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -x(1 + \mu + l_1 x^2) + o(x^2),\\ \bar{y} &= \gamma(\mu) y + o(y),\end{aligned}$$

其中 $|\gamma(\mu)| < 1$. 如果我们考虑三维流的 Poincaré 映射, 则它可定向 (保持方向). 因此, 周期轨道乘子的积必须为正, 即 $\gamma < 0$.

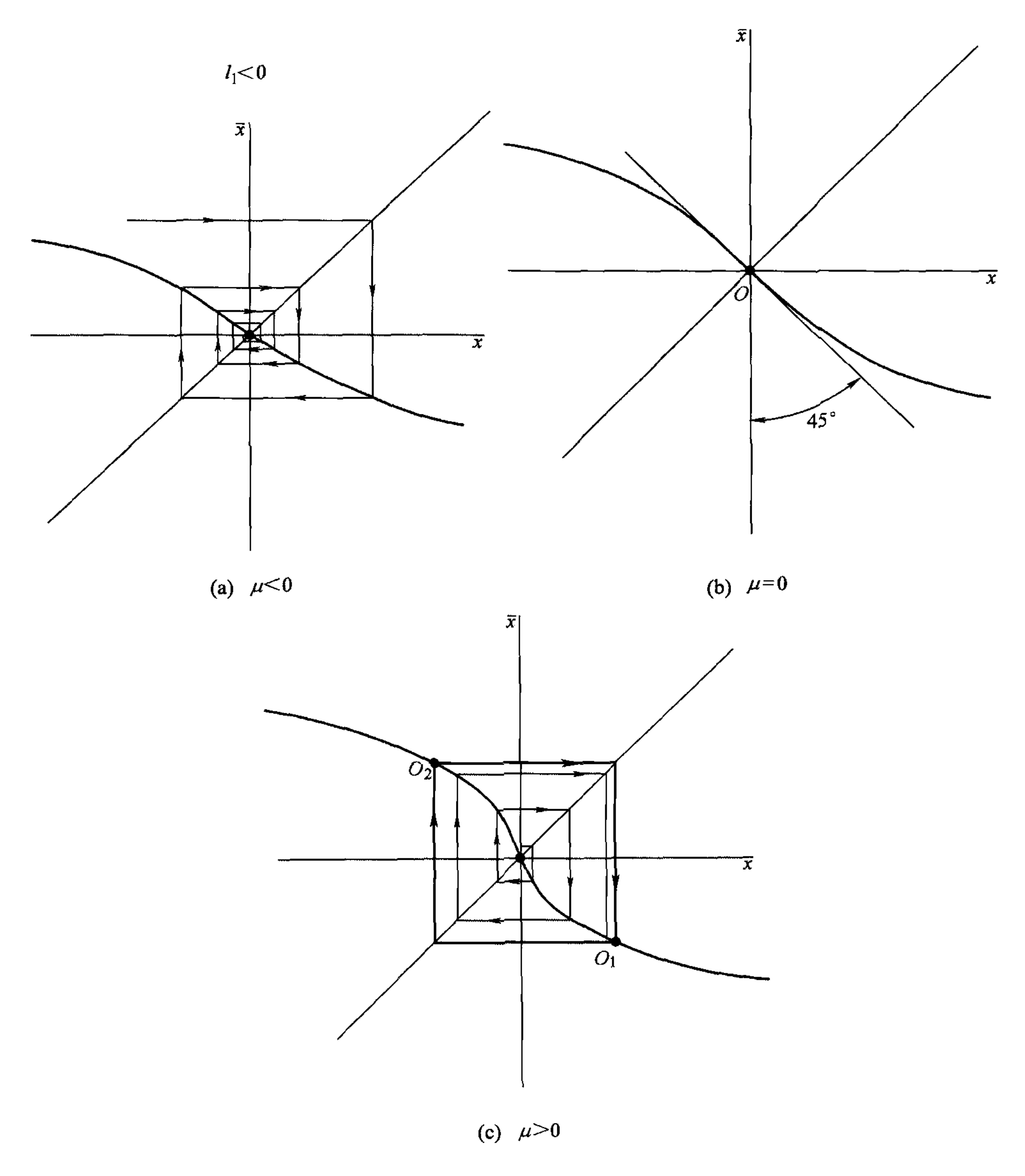


图 11.4.1 在情形 $l_1 < 0$ 时的 Lamerey 螺线的变化.

如果 $l_1 < 0$, 点 O 对 $\mu \leqslant 0$ 稳定 (结点 (−)). 当 μ 变成正时, 点 O 失去稳定性而变成鞍点 (−, −), 这意味着从原点分支出稳定的周期 2 轨道. 相图如图 11.4.3 所示.

如果 $l_1 > 0$, 则对所有充分小的负 μ, 存在鞍点 (+, +) 型的周期 2 轨道 (O_1, O_3). 它的稳定和不稳定不变流形将不动点 O_2 的吸引盆分开. 当 μ 趋于零时周期 2 轨道趋于 O 并在 $\mu = 0$ 坍缩于它. 当 $\mu > 0$ 时, 点 O 变成鞍点 (−, −)(见图 11.4.4).

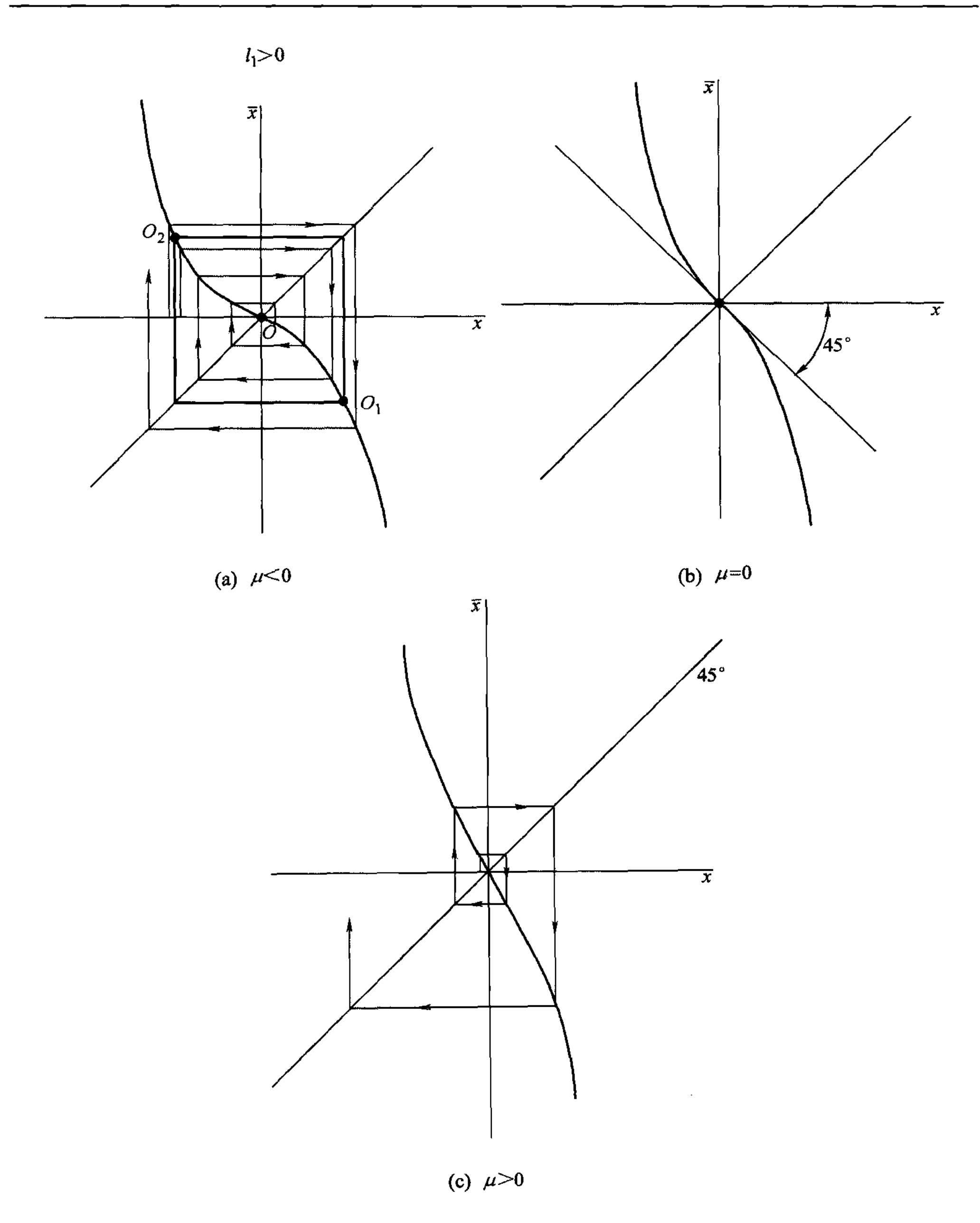


图 11.4.2 在情形 $l_1 > 0$ 时的 Lamerey 螺线的变化. 不稳定周期 2 环界定原点的吸引盆.

在自治微分方程系统的周期轨道情形, 这个分支值得注意的特征是, 与 Poincaré 映射的不动点 O 对应的周期轨道 L 的中心流形是 Möbius 带. 周期轨道本身是 Möbius 带的中线, 因此从 L 分支出的新轨道必须围绕 L 两次, 如图 11.4.5 所示. 很显然新轨道的周期接近于 L 周期的两倍. 因此这个分支称为**倍周期分支**. 对以 τ

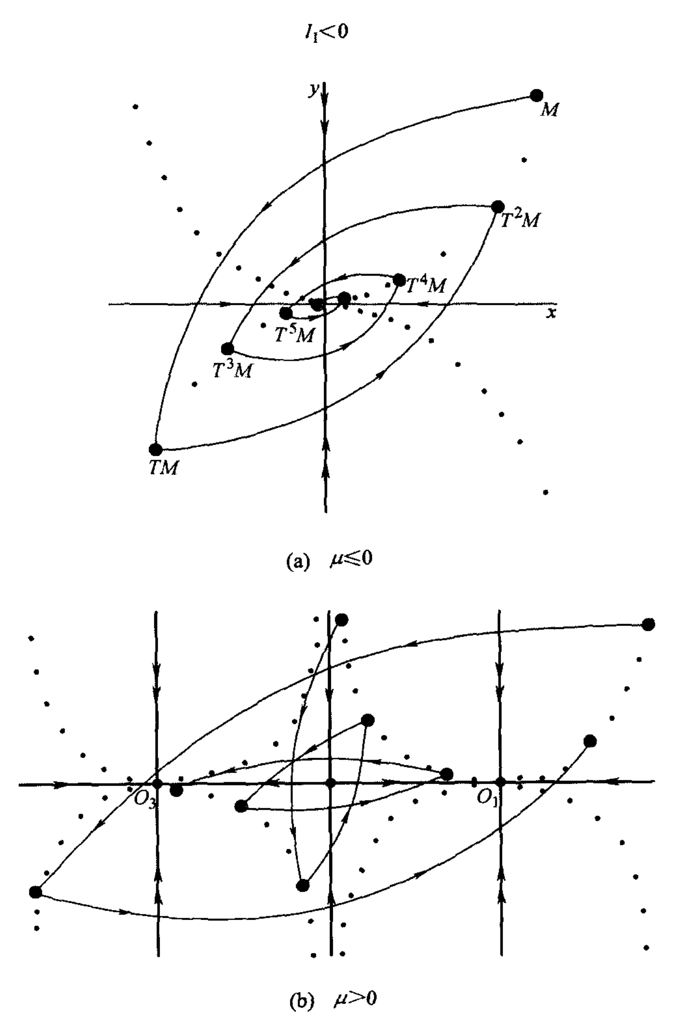


图 11.4.3 原点最初是稳定结点 (−). 在 (b) 中 O_1 和 O_3 的每一点都是周期 2 点. 它们构成当原点变成鞍点 (−, −) 时从它分支出的稳定周期 2 环.

为周期的非自治系统, Poincaré 映射的周期 2 点对应于倍周期的两条周期轨道, 使得以相移位 τ 由一条变到另一条.

接下来我们集中研究当第一个 Lyapunov 量等于零时出现的分支. 这里, 经去掉二次和四次项后 (映射的光滑次数 r 假设不小于 5), 映射可以写为形式

$$\bar{x}=-x(1+l_0(\varepsilon)+l_1(\varepsilon)x^2+l_2x^4)+o(x^5),$$

其中 $l_0(0)=l_1(0)=0, l_2\neq 0$. 在这种情形下分支曲面 $\mathfrak{M}$ 由方程

$$l_0(\varepsilon)=l_1(\varepsilon)=0$$

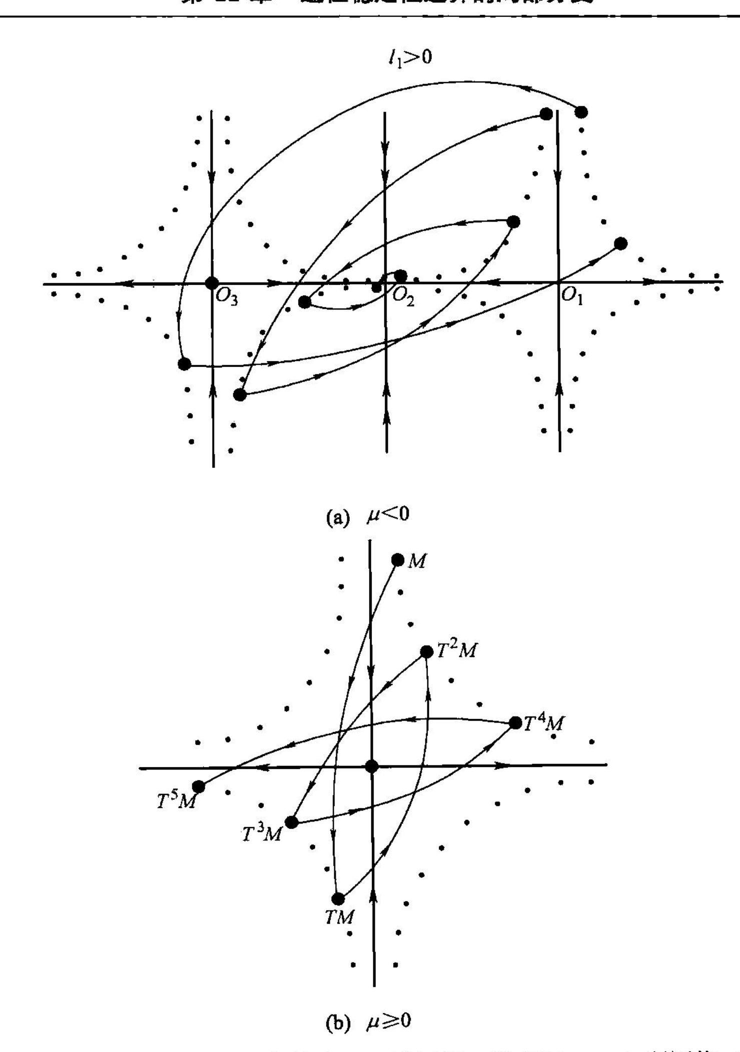


图 11.4.4　情形 $l_1 > 0$. 在原点的稳定结点 (−) 被周期 2 鞍点环 (+, +) 所围绕. 当环坍缩到原点时, 后者变成不稳定.

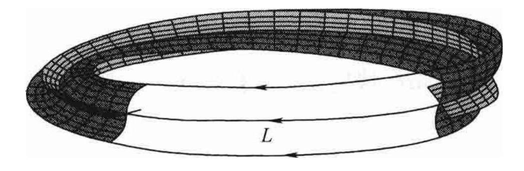


图 11.4.5　倍周期分支的拓扑. 平凡周期轨道 L 的不稳定流形 (黑色) 是 Möbius 长条, 它的边界是一条刚分支出来的周期 2 稳定轨道. L 的稳定流形表示为白色. (承蒙 B.Krauskopf 允许).

定义, 并且当假设一般性条件

$$
\text{秩}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_p} \\ \dfrac{\partial l_1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial l_1}{\partial \varepsilon_p} \end{pmatrix}_{\varepsilon=0} = 2
$$

成立时, 它是余维 2 的 $\mathbb{C}^{r-3}$ – 光滑曲面. 因此, 横截族依赖于两个参数:

$$\bar{x} = -x(1 + \mu_0 + \mu_1 x^2 + l_2 x^4) + o(x^5). \tag{11.4.10}$$

其中, 如上, 不动点是唯一的. 当 $\mu_0 < 0$ 时它稳定, $\mu_0 > 0$ 时不稳定. 对所有其它小的 $\mu_0 \neq 0$, 它不产生分支.

为了求周期 2 点, 我们考虑映射的二次迭代

$$\bar{\bar{x}} = x(1+\mu_0)^2 + \mu_1(1+\mu_0)(2+2\mu_0+\mu_0^2)x^3 + 2l_2x^5 + o(x^5). \tag{11.4.11}$$

这个映射的不动点除 $x = 0$ 以外是方程

$$2\mu_0 + \mu_0^2 + \mu_1(1+\mu_0)(2+2\mu_0+\mu_0^2)x^2 + 2l_2x^4 + o(x^4) = 0 \tag{11.4.12}$$

的根. 重根必须满足由微分 (11.4.12) 得到的另外方程

$$\mu_1(1+\mu_0)(2+2\mu_0+\mu_0^2) + 4l_2x^2 + o(x^2) = 0. \tag{11.4.13}$$

关于 x 求解系统 (11.4.12) — (11.4.13), 我们求得在 (μ_0, μ_1) – 参数平面上包含重根的曲线由半抛物线

$$\mu_0 = \frac{\mu_1^2}{4l_2} + o(\mu_1^2), \quad \mu_1 l_2 < 0 \tag{11.4.14}$$

组成. 对映射 (11.4.10), 这条曲线对应出现鞍 – 结点型的周期 2 轨线 (x^+, x^-). 鞍 – 结点的坐标由 (11.4.12) 和 (11.4.13) 求得: $x^{\pm} = \pm\sqrt{\left|\frac{\mu_1}{2l_2}\right|} + o(\sqrt{|\mu_1|})$. 将 (11.4.11) 的右端在 x^+ 展开为 Taylor 级数, 我们可以验证 Lyapunov 量不为零, 即这个点是简单鞍 – 结点.

除了直线 $\mu_0 = 0$ 和直线 (11.4.14) 以外, 分支开折不包含其它东西 (见图 11.4.6). 这些曲线将原点邻域分成三个区域 D_0, D_1 和 D_2. 对应每个区域的 Lamerey 图如图 11.4.7($l_2 < 0$) 和图 11.4.8($l_2 > 0$) 所示. 在 D_0 内不存在周期 2 轨线, 在 D_1 内存在一条周期 2 轨线, 在 D_2 内存在两条这样的轨线. 当从 D_2 移动到 D_0 时两条周期 2 轨道重合并消失.

最后示意性地考虑当几个 Lyapunov 量同时为零时的一般情形的分支. 设 k 是在 $\varepsilon = 0$ 时第一个非零 Lyapunov 量的指标数. 于是消去直到 $2k$ 阶的 x 的偶次幂, 映射可以化为形式

$$\bar{x} = -x\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} l_i(\varepsilon)x^{2i} + l_k x^{2k}\right) + o(x^{2k+1}), \tag{11.4.15}$$

其中 l_i 是 ε 的 $\mathbb{C}^{r-(2i+1)}$ – 光滑函数 $(i = 0, \cdots, k-1)$. 假设映射的光滑次数 r 不小于 $(2k+1)$ 以及 $l_0(0) = \cdots = l_{k-1}(0) = 0, l_k \neq 0$.

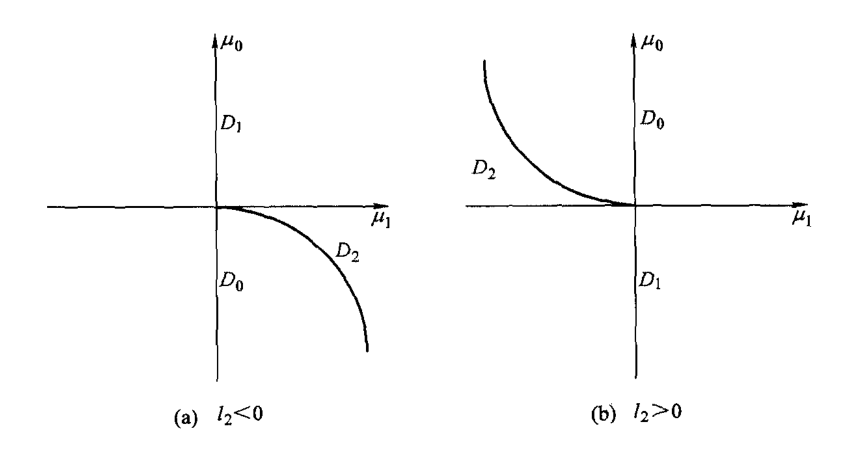


图 11.4.6 分支开折 (a) $l_2 < 0$ 和 (b) $l_2 > 0$.

显然, 在一般位置的情形 (即矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial l_{k-1}}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial l_{k-1}}{\partial \varepsilon_p} \end{pmatrix}_{\varepsilon=0}$$

的秩等于 k), 分支曲面

$$\mathfrak{M}' : \ l_0(\varepsilon) = \cdots = l_{k-1}(\varepsilon) = 0$$

是通过点 $\varepsilon = 0$ 以及对应于具有乘子 -1 和前面 $(k-1)$ 个 Lyapunov 量为零的不动点的余维 k 的 $\mathbb{C}^{r-(2k-1)}$ - 光滑曲面. [4]

我们选择量 $l_i(\varepsilon)$ 作为控制参数 $\mu_0, \cdots, \mu_{k-1}$. 于是任何一个与 $\mathfrak{M}'$ 横截的族在这种情形下可表示为形式

$$\bar{x} = -x(1 + \mu_0 + \mu_1 x^2 + \cdots + \mu_{k-1} x^{2(k-1)} + l_k x^{2k}) + \tilde{G}(x, \mu), \tag{11.4.16}$$

其中 $\tilde{G} = o(x^{2k+1})$ 是 x 的 $\mathbb{C}^r$ - 光滑函数, 是 μ 的 $\mathbb{C}^{r-2k}$ - 光滑函数, 且满足 $\tilde{G}(0, \mu) = \tilde{G}'_x(0, \mu) = \cdots = \tilde{G}^{(2k)}(0, \mu) = 0$ 和 $\tilde{G}^{(2k+1)}(0, 0) = 0$.

平面 $\mu_0 = 0$ 对应于在原点的不动点失去其稳定性. 在 $\mu_0 \neq 0$ 不动点不出现其它分支. 为了研究周期 2 轨线, 我们需要研究映射的二次迭代

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= x\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i x^{2i} + l_k x^{2k}\right)\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i \bar{x}^{2i} + l_k \bar{x}^{2k}\right) \\ &= x(1 + 2\hat{\mu}_0 + 2\hat{\mu}_1 x^2 + \cdots + 2\hat{\mu}_{k-1} x^{2(k-1)} + 2l_k x^{2k}) + o(x^{2k+1}), \end{aligned} \tag{11.4.17}$$

[4] 注意, 稳定性区域的边界是由条件 $l_0(\varepsilon) = 0$ 确定, 且是余维 1 的光滑曲面, 只要向量 $\left(\dfrac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_1}, \cdots, \dfrac{\partial l_0}{\partial \varepsilon_p}\right)_{\varepsilon=0}$ 非零, 而不管任何 Lyapunov 量是否为零.

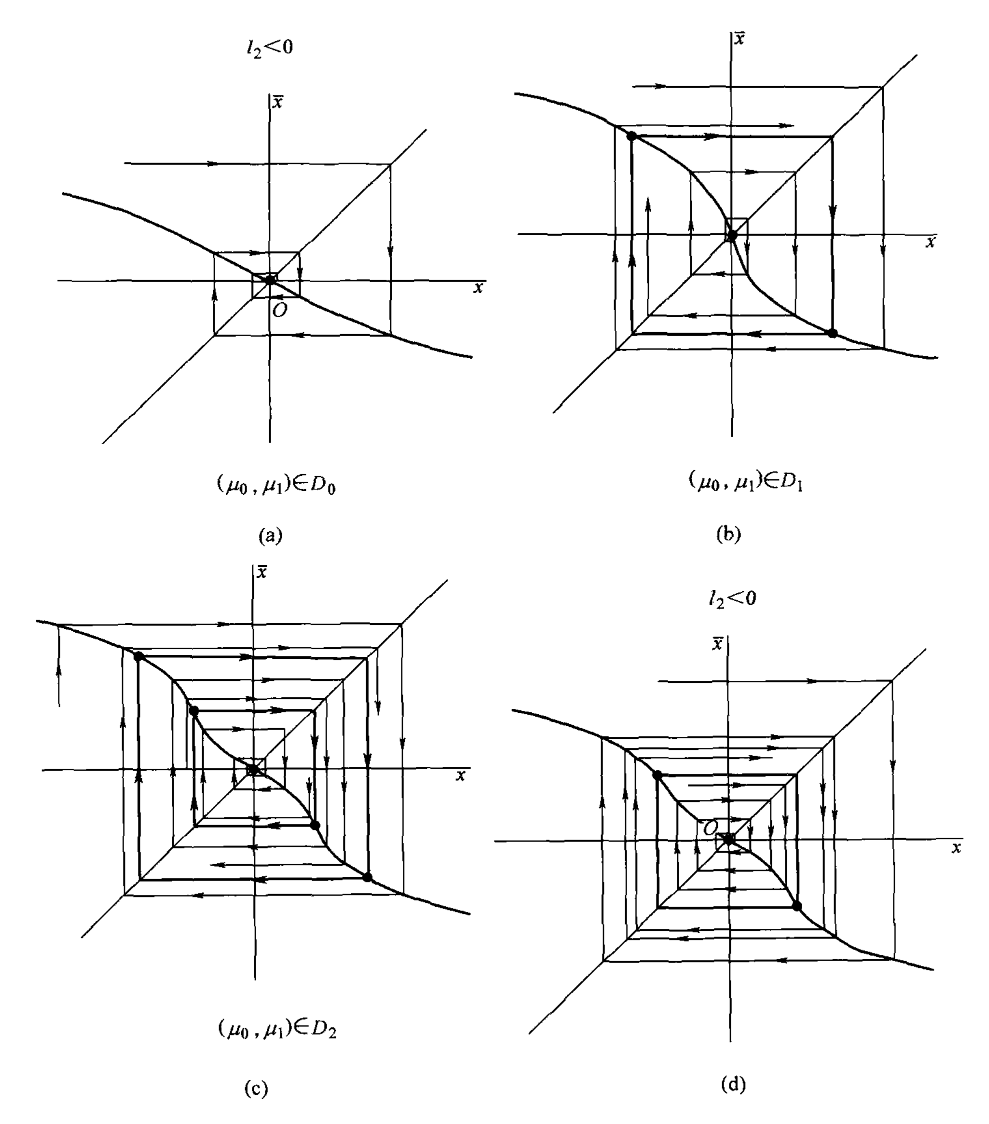


图 11.4.7 分支图 11.4.6 (a) 中对 $l_2<0$ 情形的映射, 围绕原点顺时针方向移动. (c) 中的两个周期 2 环在分隔 D_2 和 D_0 的边界上合并且在 D_0 内消失. 周期 2 的半稳定环显示在 (d) 中.

其中每一个 $\hat{\mu}_i$ 由 $\mu_0,\cdots,\mu_i$ 唯一表示:

$$\hat{\mu}_i=\mu_i+\varphi_i(\mu_0,\cdots,\mu_i). \tag{11.4.18}$$

我们并不需要函数 φ_i 的具体形式. 只需注意

$$\varphi_i=o(\mu_j)\quad (j=0,\cdots,i) \tag{11.4.19}$$

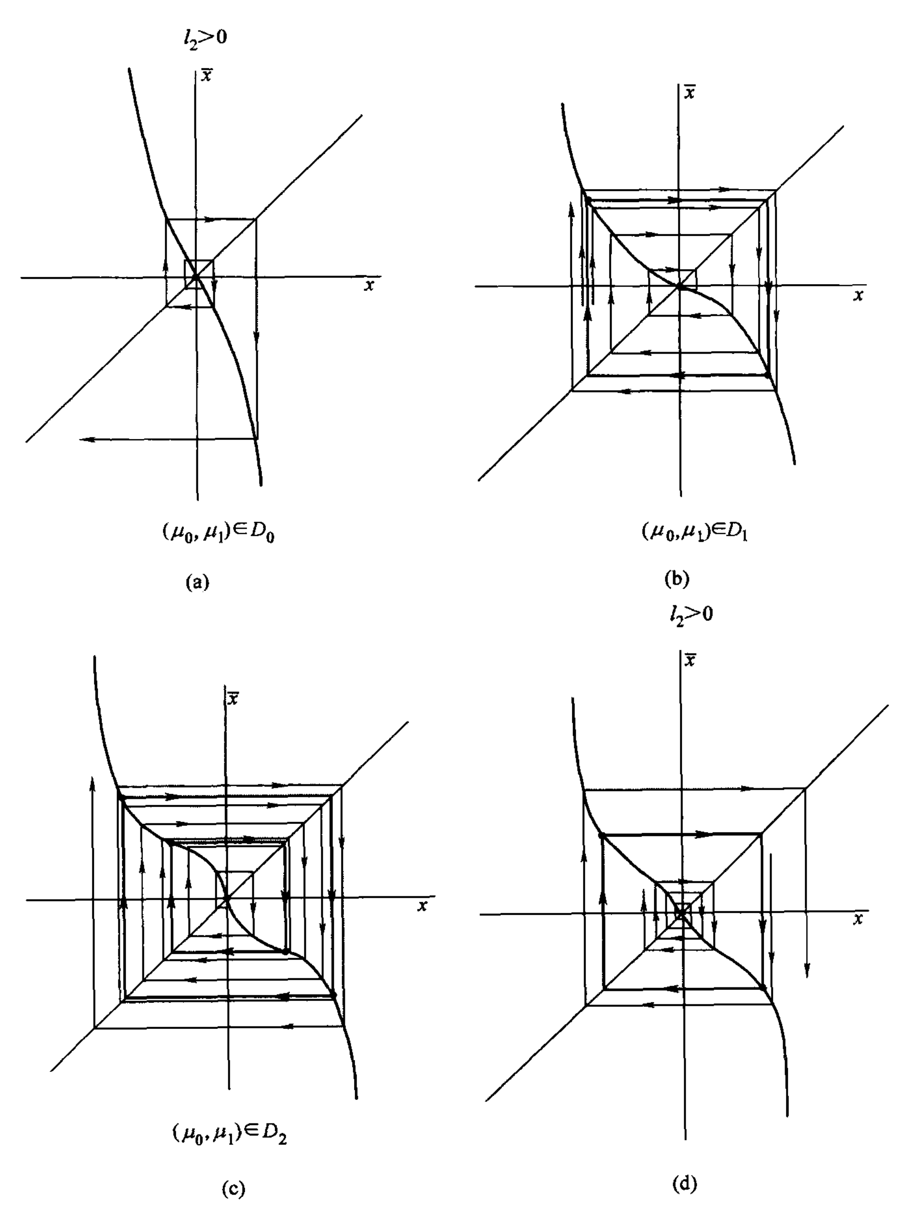


图 11.4.8　对应于分支图 11.4.6 (b) 中的映射. 在 D_2 和 D_0 之间的边界上周期 2 半 – 稳定环显示在 (d) 中.

就够了. 映射 (11.4.17) 的非零不动点是方程

$$\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 x^2 + \cdots + \hat{\mu}_{k-1} x^{2(k-1)} + l_k x^{2k} + o(x^{2k}) = 0 \tag{11.4.20}$$

的根. 它们对应于映射 (11.4.16) 的周期 2 轨道. 此外, 每条轨道是由一个正根和一个负根组成. 因此, 我们可以仅考虑正根, 即如果令 $u = x^2$, 则我们的问题化为对方

程

$$\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 u + \cdots + \hat{\mu}_{k-1} u^{k-1} + l_k u^k + o(u^k) = 0 \tag{11.4.21}$$

正根的分支分析. 这种根的类似分支我们已经在 11.2 节研究过 (其差别是 u^{k-1} 的因子不是零 —— 但这由平移原点总可以办到; 除了这个我们没有单独讨论过正根的性态). 如在 11.2 节, 通过验证方程左端的 k 阶导数不为零, 我们就可以证明当 x 和 μ 都小时方程 (11.4.21) 不可能有多于 k 个的根.

因此, 具有一个乘子等于 -1 以及 $(k-1)$ 个零 Lyapunov 量的不动点的分支不可能产生多于 k 个周期 2 轨道. 此外, 容易指定确切的参数值使得方程 (11.4.21) 有从 0 到 k 范围内指定个数的正根. 由此得知在映射 (11.4.16) 的参数空间内存在区域, 其中这个族具有任何指定个数 (从 0 到 k) 的周期 2 轨道.

为了了解周期 2 轨道的分支曲面的结构, 我们必须构造方程 (11.4.21) 的重根曲面 $\mathfrak{M}$, 然后选择对应正重根的部分 $\mathfrak{M}^+$. 曲面 $\mathfrak{M}$ 由方程组

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 u + \cdots + \hat{\mu}_{k-1} u^{k-1} + l_k u^k + o(u^k) = 0, \\ \hat{\mu}_1 + 2\hat{\mu}_2 u + \cdots + (k-1)\hat{\mu}_{k-1} u^{k-2} + k l_k u^{k-1} + o(u^{k-1}) = 0 \end{aligned} \tag{11.4.22}$$

定义. 由 (11.4.22) 得知重根 $u=0$ 对应于令值 $\hat{\mu}_0$ 和 $\hat{\mu}_1$ 为零. 因此, 由 $\hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_1 = 0$ 定义的直线构成 $\mathfrak{M}$ 中 $\mathfrak{M}^+$ 的边界. 映射 (11.4.16) 的周期 2 轨道的分支图与 $\mathfrak{M}^+$ 重合. 相应地, 曲面 $\mathfrak{M}^+$ 和平面 $\mu_0 = 0$ 的并, 其上不动点失去它的稳定性, 这给出映射 (11.4.16) 的完全分支图.

现在我们来更详细地考虑集合 $\mathfrak{M}^+$ 的构造问题 (对 $k=3, l_k<0$ 的情形, 映射 (11.4.16) 的分支图的例子见图 11.4.9). 注意, 曲面 $\mathfrak{M}$ 包含对应于存在 k 重根的直线 L. 这条直线由下面方程组确定 (它们要求在某点 u, 方程 (11.4.21) 的左边及它的前 $(k-1)$ 阶导数必须为零).

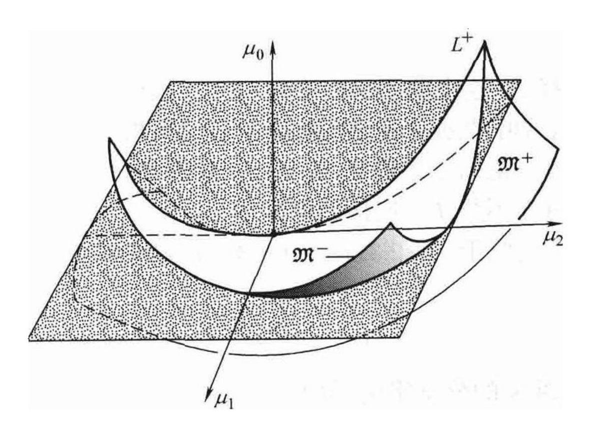


图 11.4.9 三参数族中的分支集的结构. 说明见正文.

$$0=\hat{\mu}_0+\hat{\mu}_1 u+\cdots+\hat{\mu}_{k-1}u^{k-1}+l_k u^k+o(u^k),$$

$$0=\hat{\mu}_1+2\hat{\mu}_2 u+\cdots+(k-1)\hat{\mu}_{k-1}u^{k-2}+kl_k u^{k-1}+o(u^{k-1}),$$

$$\vdots$$

$$0=\hat{\mu}_i+\sum_{j=i+1}^{k-1}C_j^i\hat{\mu}_j u^{j-i}+C_k^i l_k u^{k-i}+o(u^{k-1}),$$

$$\vdots$$

$$0=\hat{\mu}_{k-1}+kl_k u+o(u),$$

其中 C_j^i 是二项式因子. 从下到上关于 $\hat{\mu}_{k-1}$ 逐个求解这个系统, 我们求得曲线 L 可渐近地表示为形式

$$\hat{\mu}_i\sim(\hat{\mu}_{k-1})^{k-i}\alpha_i, \tag{11.4.23}$$

其中 α_i 是某非零系数. 此外, k 重根位于点

$$u^*\sim-\hat{\mu}_{k-1}/kl_k \tag{11.4.24}$$

上.

点 $\mu=0$ 将曲线 L 分为两个分枝: $L^+:\hat{\mu}_{k-1}l_k<0$ 和 $L^-:\hat{\mu}_{k-1}l_k>0$. 由方程 (11.4.24) 得知在 L^+ 上 $u^*>0$, 即只有 L 的这个分枝对应于 k 重周期 2 轨道.

通过将原点移到点 $u=u^*$, 方程 (11.4.21) 化为

$$\nu_0+\nu_1 u+\cdots+\nu_{k-2}u^{k-2}+l_k u^k+o(u^k)=0,$$

其中 ν_i 是 $\hat{\mu}$ 的某些函数. 因此, 由 11.2 节得知在与直线 L 横截的每个截面 $\hat{\mu}_{k-1}=$ 常数上, 曲面 $\mathfrak{M}$ 有相同结构, 它是 (直到微分同胚) 多项式 $\nu_0+\nu_1 u+\cdots+\nu_{k-2}u^{k-2}+u^k$ 的重根曲面, 此曲面是在截面与曲线 L 的交点 (这个点的坐标由 (11.4.23) 求得) 附近组建成的.

正如 11.2 节解释的, 这个曲面是由许多对应二重根的余维 1 光滑叶片组成. 直线 $\hat{\mu}_0=\hat{\mu}_1=0$ 将这些叶片划分成分别对应于负二重根和正二重根的两个部分 (只有后面部分组成 $\mathfrak{M}^+$): 正的二重根当 $\hat{\mu}_{k-1}l_k<0$ 时恰好在与 L^+ 相连接的部分中, 或者当 $\hat{\mu}_{k-1}l_k>0$ 时在不与 L^- 连接的部分中.

我们也可以推导类似于 (11.2.31)—(11.2.33) 的渐近关系式, 即重根曲面叶化为渐近表达为

$$\hat{\mu}_i\sim M_i^*\delta^{k-i} \tag{11.4.25}$$

的曲线, 以及所有余维 s 的分支集由形如

$$\hat{\mu}_j=\psi_j(\hat{\mu}_s,\cdots,\hat{\mu}_{k-1})\quad(j=o,\cdots,s-1) \tag{11.4.26}$$

的曲面片 (在 $\mu=0$ 相连接) 组成, 其中诸 ψ_j 满足关系

$$|\psi_j|^{1/(k-j)} \leqslant C\sum_{i=s}^{k-1}|\hat{\mu}_i|^{1/(k-i)} \tag{11.4.27}$$

(这里, C 是与 s 和 j 无关的公共常数).

由 (11.4.18) 和 (11.4.19) 得知, 如果我们回复到原来的参数 $\mu_0,\cdots,\mu_{k-1}$, 则每条曲线 (11.4.25) 将有具有相同常数集 M_i^* 的同样的渐近表达式. 因此, 在计算一阶渐近关系式时不必用 μ_i 来表示 $\hat{\mu}_i$. 我们简单地令 $\hat{\mu}_i=\mu$.

11.5 Andronov-Hopf 分支

这一节我们讨论当平衡态的一对复共轭特征指数穿过虚轴时发生什么. 这里失去稳定性与周期轨道的产生或消失直接相联系. 这个分支是从驻定机制过渡到振动机制的最简单的装置, 并且它允许我们对许多物理现象给以适当的解释. 由于这个缘故, 这个分支在分支理论中传统上有着特殊的作用.

考虑 $\mathbb{C}^r$ - 光滑 $(r\geqslant 3)$ 依赖于变量 $x\in\mathbb{R}^2, y\in\mathbb{R}^m$ $(m\geqslant 0)$ 和参数 $\varepsilon\in\mathbb{R}^p$ $(p\geqslant 1)$ 的微分方程系统族. 设系统在 $\varepsilon=0$ 有具有一对纯虚特征指数的平衡态 O, 余下的特征指数假设都位于虚轴的左边. 由于平衡态没有零特征值, 它在 $\varepsilon=0$ 的小邻域内得到保持. 不失一般性, 我们可以假设对所有小 ε 它停留在原点. 又假设这是一对最接近于虚轴的特征指数

$$\lambda_{1,2}=\lambda(\varepsilon)\pm i\omega(\varepsilon),$$

其中 $\lambda(\varepsilon)$ 和 $\omega(\varepsilon)$ 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑地依赖于 ε, 以及

$$\lambda(0)=0, \omega(0)>0.$$

由约化定理, 在平衡态附近系统可化为形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\lambda(\varepsilon)x_1-\omega(\varepsilon)x_2+G_1(x_1,x_2,\varepsilon),\\ \dot{x}_2&=\omega(\varepsilon)x_1+\lambda(\varepsilon)x_2+G_2(x_1,x_2,\varepsilon),\\ \dot{y}&=[A+F(x_1,x_2,\varepsilon)]y,\end{aligned} \tag{11.5.1}$$

其中 F 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 函数, $G_{1,2}$ 是 $\mathbb{C}^r$ - 函数, 且

$$\begin{aligned}F(0,0,0)&=0,\\ G(0,0,0)&=0,\\ G'_x(0,0,0)&=0,\end{aligned} \tag{11.5.2}$$

我们可以如 9.3 节一样验证, 在 $\varepsilon = 0$ 函数 G 的 Taylor 展开中异于 $x_1(x_1^2 + x_2^2)$ 和 $x_2(x_1^2 + x_2^2)$ 的项 (例如任何偶次项) 都是非共振项, 故可用 (关于 x 的) 多项式变量变换消去.

在参数空间中平衡态的稳定性区域边界 $\mathfrak{M}$ 由方程 $\lambda(\varepsilon) = 0$ 给出: 如果 $\lambda(\varepsilon) < 0$ 平衡态 O 稳定, $\lambda(\varepsilon) > 0$ 它不稳定. 如果向量 $\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon_1}, \cdots, \dfrac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon_p}\right)_{\varepsilon=0}$ 至少有一个分量不为零, 则对所有小 ε 边界 $\mathfrak{M}$ 是余维 1 的 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑曲面. 选择 $\lambda(\varepsilon)$ 为控制参数 μ, 并考虑与 $\mathfrak{M}$ 横截的单参数族. 在中心流形 $y = 0$ 上, 这个族取形式

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - \omega(\mu) x_2 + (L_1 x_1 - \Omega_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{G}_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 &= \omega(\mu) x_1 + \mu x_2 + (\Omega_1 x_1 + L_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{G}_2(x_1, x_2, \mu), \end{aligned} \tag{11.5.3}$$

其中对所有小 μ, x 的所有二次项和在 $\mu = 0$ 异于 $x_1(x_1^2 + x_2^2)$ 和 $x_2(x_1^2 + x_2^2)$ 的三次项都被消去.

这意味着在 (11.5.3) 中, 函数 $\tilde{G}_{1,2}$ (关于 x 是 $\mathbb{C}^r$ - 光滑, 关于 μ 是 $\mathbb{C}^{r-2}$ - 光滑) 满足

$$\tilde{G}(0,0,\mu) = 0, \qquad \tilde{G}'_x(0,0,\mu) = 0,$$

$$\tilde{G}''_{xx}(0,0,\mu) = 0, \quad \tilde{G}'''_{xxx}(0,0,\mu) = 0,$$

即 $\tilde{G} = o(R^3)$, 其中 $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

定理 11.1 如果 (11.5.3) 中第一个 Lyapunov 量 L_1 为负, 则对小 $\mu \leqslant 0$, 平衡态 O 稳定并且在原点某邻域 U 内的所有轨线都趋于 O. 当 $\mu > 0$ 时平衡态变成不稳定, 并出现直径为 $\sim \sqrt{\mu}$ 的稳定周期轨道 (见图 11.5.1)使得 U 中所有轨线除了 O 都趋于它.

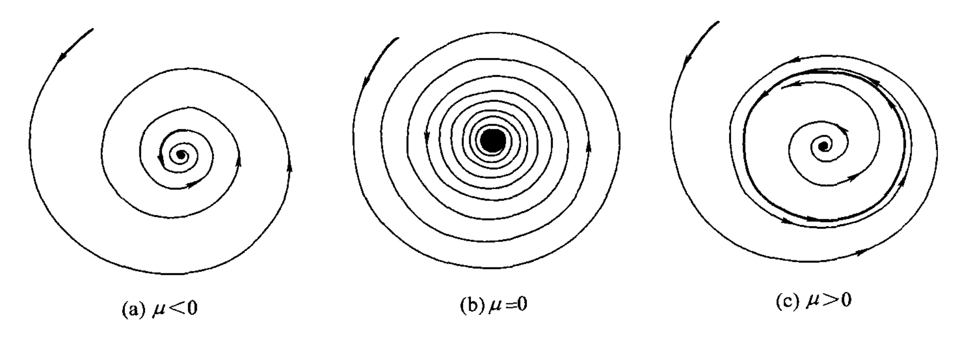


图 11.5.1 在原点的稳定焦点通过超临界 ($L_1 < 0$) Andronov-Hopf 分支软性失去稳定性.

如果第一个 Lyapunov 量 L_1 为正, 则对小 $\mu \geqslant 0$, 平衡态 O 不稳定并且任何其它轨线都离开原点的小邻域 U. 当 $\mu < 0$ 时, 平衡态稳定. 它的吸引盆是由直径为 $\sim \sqrt{-\mu}$ 的不稳定周期轨道界定, 这个周期轨道在 $\mu = 0$ 时收缩到 O(见图 11.5.2).

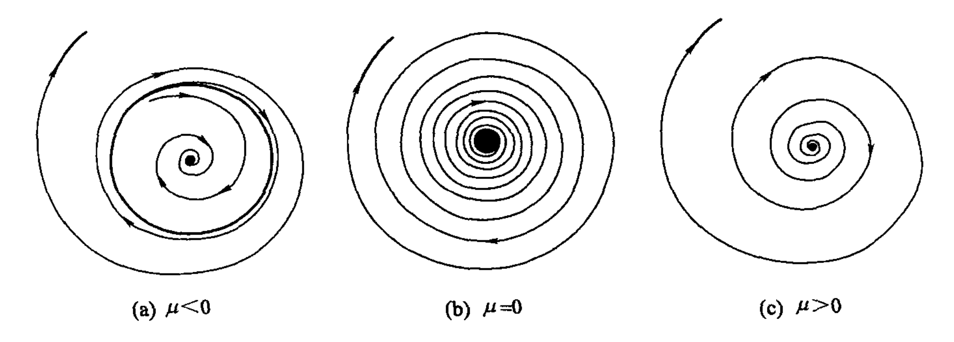


图 11.5.2 在原点的稳定焦点通过亚临界 ($L_1 > 0$) Andronov-Hopf 分支刚性失去稳定性.

证明 将系统 (11.5.3) 写为极坐标形式

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(\mu + L_1 R^2) + \Phi_1(R, \varphi, \mu), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2 + \Phi_2(R, \varphi, \mu),\end{aligned} \tag{11.5.4}$$

其中 $\Phi_1 = o(R^3), \Phi_2 = o(R^2)$. 定理的论断对截断系统

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(\mu + L_1 R^2), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2\end{aligned} \tag{11.5.5}$$

可平凡地验证.

事实上, 这里轨线的性态完全由第一个方程

$$\dot{R} = R(\mu + L_1 R^2) \tag{11.5.6}$$

确定. 特别地, 方程 (11.5.6) 具有正 R 的平衡态对应于系统 (11.5.5) 的周期轨道. 容易求得 (11.5.6) 的平衡态, 即 $\mu L_1 < 0$ 时的 $R = 0$ 和 $R = \pm\sqrt{-\dfrac{\mu}{L_1}}$. 如果 $L_1 < 0$ 则平衡态 $R = \sqrt{-\dfrac{\mu}{L_1}}$ 稳定, $L_1 > 0$ 时它不稳定.

对一般情形, 回忆 $\omega(\mu) > 0$. 因此 (11.5.4) 中的 $\dot{\varphi}$ 对小的 R 不为零. 从而, 任何异于点 O 的轨线必须与射线 $\Re : \varphi = 0,\ R > 0$ 相交. φ 转动一周后, 轨线必须与射线 $\Re$ 再次相交, 等等, 直到它离开原点的邻域. 因此, 只需考虑沿着系统的轨线将射线 $\Re$ 映为它自己的映射, 见图 11.5.3.

为了计算这个映射, 将 (11.5.4) 中第一个方程与第二个方程相除得

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{R(\mu + L_1 R^2) + \Phi_1(R, \varphi, \mu)}{\omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2 + \Phi_2(R, \varphi, \mu)} = \frac{R(\mu + L_1 R^2)}{\omega(\mu)} + o(R^3). \tag{11.5.7}$$

我们求方程 (11.5.7) 在 $\varphi = 0$ 从点 $R = R_0$ 开始的解. 将它展成 R_0 的 Taylor 级数

$$R(\varphi) = \alpha_1(\varphi)R_0 + \alpha_2(\varphi)R_0^2 + \alpha_3(\varphi)R_0^3 + \cdots \tag{11.5.8}$$

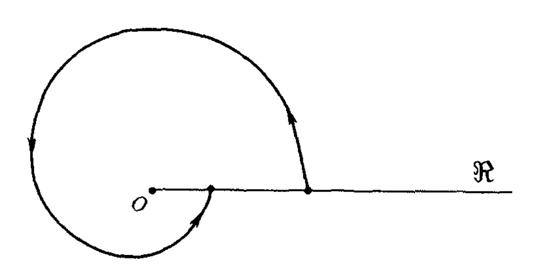


图 11.5.3　从原点出发的射线 $\Re$ 的映射.

(由于在 $R_0=0$ 有 $R(\varphi)\equiv 0$, 展开式从线性项开始). 由于 $R(0)=R_0$, 故

$$\alpha_1(0)=1, \quad \alpha_2(0)=0, \quad \alpha_3(0)=0. \tag{11.5.9}$$

将 (11.5.8) 代入 (11.5.7), 并令同类项相等得

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{d\varphi}&=\frac{\mu\alpha_1}{\omega(\mu)},\\ \frac{d\alpha_2}{d\varphi}&=\frac{\mu\alpha_2}{\omega(\mu)},\\ \frac{d\alpha_3}{d\varphi}&=\frac{\mu\alpha_3+L_1\alpha_1^3}{\omega(\mu)}.\end{aligned} \tag{11.5.10}$$

积分这个系统并考虑到初始条件 (11.5.9), 我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_1(\varphi)&=e^{\mu\varphi/\omega(\mu)},\\ \alpha_2(\varphi)&=0,\\ \alpha_3(\varphi)&=\frac{L_1e^{\mu\varphi/\omega(\mu)}\left(e^{2\mu\varphi/\omega(\mu)}-1\right)}{2\mu}\end{aligned}$$

以及

$$R(\varphi)=e^{\mu\varphi/\omega(\mu)}R_0+L_1e^{\mu\varphi/\omega(\mu)}\frac{e^{2\mu\varphi/\omega(\mu)}-1}{2\mu}R_0^3+\cdots.$$

令 $\varphi=2\pi$, 我们得到将射线 $\Re$ 映到它自己的映射的表达式: $R\equiv R(0)\mapsto R(2\pi)\equiv\bar{R}$:

$$\bar{R}=e^{2\pi\mu/\omega(\mu)}R+\frac{2\pi}{\omega(0)}L_1R^3+o(R^3). \tag{11.5.11}$$

所得映射 (11.5.11) 的非平凡不动点的方程

$$\frac{\left(e^{2\pi\mu/\omega(\mu)}-1\right)\omega(0)}{2\pi}+L_1R^2+o(R^2)=0 \tag{11.5.12}$$

可容易求解 (注意到, 直到主项它与 (11.5.6) 的非平凡平衡态的方程重合). 由此得知当 $L_1\mu \geqslant 0$, 映射 (11.5.11) 有单个不动点 $R=0$, 当 $L_1\mu<0$, 还出现平衡态 $R=\sqrt{-\frac{\mu}{L_1}}+o(\sqrt{|\mu|})$, 它是从前面的不动点分支出的 (回忆映射仅对 $R\geqslant 0$ 定义, 不包括它的负根). 由 (11.5.11), 我们得到非平凡不动点乘子的下面表达式

$$\rho(\mu)=1-\frac{4\pi\mu}{\omega(0)}+o(\mu).$$

注意到, 如果 $L_1<0$ 则不动点稳定, 否则不稳定. 这就证明了定理 11.1 的论断.

注 定理 11.1 是由 Andronov 和 Leontovich 通过构造和研究映射证明的, 而没有明显地应用规范形理论. 图 11.5.1 和图 11.5.2 是从 Andronov,Vitt 以及 Khaikin 的《振动理论》中拷贝过来的, 那里他们阐述了软性生成和刚性生成自激振动的现象 (见 14 章).

接下来我们研究高维系统 (11.5.1) 的分支. 如果 $L_1<0$ (图 11.5.4), 则当 $\mu\leqslant 0$ 时平衡态 O 稳定 (当 $\mu<0$ 时是粗焦点, 当 $\mu=0$ 时是弱焦点), 它吸引原点小邻域内的所有轨线. 当 $\mu>0$ 时点 O 变成具有二维不稳定流形和 m 维稳定流形的鞍 – 焦点. 不稳定流形的边是稳定周期轨道, 它现在吸引除了在 O 的稳定流形上的轨线以外的所有轨线. 定理 11.1 中计算的周期轨道的一个乘子是 $\rho_0(\mu)=1-\frac{4\pi\mu}{\omega(0)}+o(\mu)$. 为了求其它的乘子, 我们注意, 由于周期轨道位于中心流形 $y=0$ 上, y – 变量的变分方程是 (见 (11.5.1)) :

$$\frac{\partial\dot{y}}{\partial y_0}=(A+F(x,0,\varepsilon))\frac{\partial y}{\partial y_0}.$$

由于 F 的绝对值很小, 因此由这个方程的时间 τ 移位接近于 $e^{A\tau}$ (其中 τ 是极限环的周期). 故对应于 y – 变量的乘子接近于 $e^{\lambda_j\tau}$ $(j=1,\cdots,m)$, 其中诸 λ_j 是矩阵 A 的特征值. 由于 $\tau=\frac{2\pi}{\omega(0)}+\cdots$, 我们有下面的乘子公式

$$\rho_j(\mu)=e^{2\pi\lambda_j/\omega(0)}(1+\cdots),\quad j=1,\cdots,m.$$

最接近于单位圆的乘子 ρ_0 是实数, 故对所有充分小的 μ, 周期轨道是结点 (即对应的 Poincaré 映射的不动点是稳定结点).

如果 $L_1>0$, 相图如图 11.5.5 所示. 其中当 $\mu<0$ 时存在稳定平衡态 O(焦点) 和鞍点周期轨道, 后者的 m 维稳定流形是 O 的吸引盆的边界. 当 μ 增加时环向 O 收缩, 并在 $\mu=0$ 坍缩到 O. 当 μ 增加而通过零时平衡态 O 变成鞍 – 焦点.

我们已经看到, 横截于稳定性边界 $\mathfrak{M}$ 的单参数族的分支依赖于第一个 Lyapunov 量的符号而有完全不同的发展. 如果在 $\varepsilon=0$ 量 L_1 为零, 不在万不得已我们不考虑

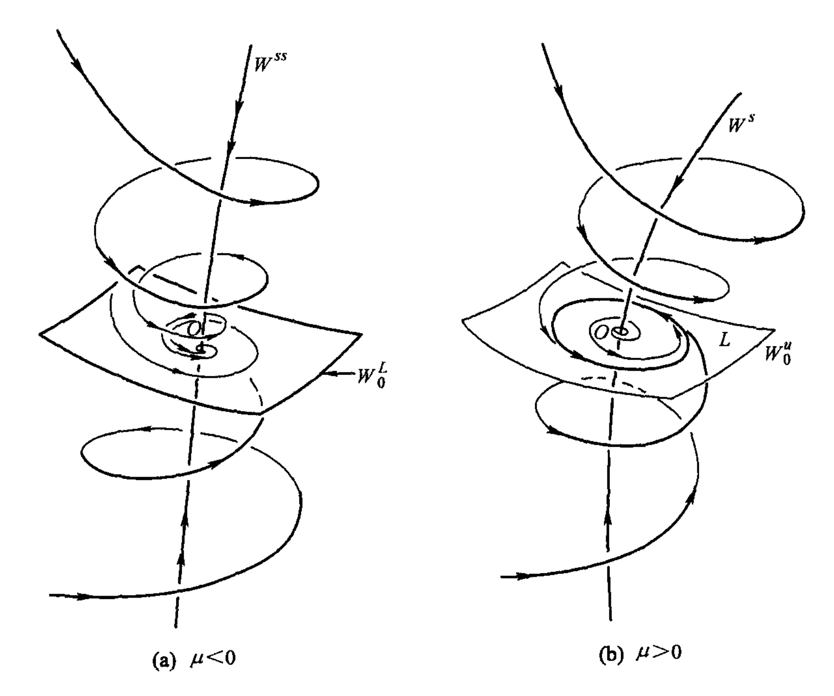


图 11.5.4 $\mathbb{R}^3$ 中超临界 Andronov-Hopf 分支. (a) 中的稳定焦点 (主流形 W^L 是二维的) 变成 (b) 中的鞍 - 焦点. 稳定周期轨道是不稳定流形 W_0^u 的边.

双参数族. 为了探究这个情况, 我们将系统在中心流形上化为直到 5 阶项的规范形:[5]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda(\varepsilon)x_1 - \omega(\varepsilon)x_2 + (L_1(\varepsilon)x_1 - \Omega_1(\varepsilon)x_2)(x_1^2 + x_2^2)\\&\quad + (L_2x_1 - \Omega_2x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2 + o(x^5),\\\dot{x}_2 &= \omega(\varepsilon)x_1 + \lambda(\varepsilon)x_2 + (\Omega_1(\varepsilon)x_1 + L_1(\varepsilon)x_2)(x_1^2 + x_2^2)\\&\quad + (\Omega_2x_1 + L_2x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2 + o(x^5),\end{aligned}$$

其中 $L_1(\varepsilon), \Omega_1(\varepsilon)$ 是 $\mathbb{C}^{r-3}$ 类函数, $L_1(0) = 0$. 考虑由条件

$$\lambda(\varepsilon) = 0, \quad L_1(\varepsilon) = 0$$

定义的曲面 $\mathfrak{M}'$. 如果

$$\text{秩}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\lambda_0}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial\lambda_0}{\partial\varepsilon_p} \\ \dfrac{\partial L_1}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial L_1}{\partial\varepsilon_p} \end{pmatrix}_{\varepsilon=0} = 2,$$

则 $\mathfrak{M}'$ 是余维 2 的 $\mathbb{C}^{r-3}$ – 光滑曲面.

[5] 假设这个系统充分光滑, 例如 $r \geqslant 5$.

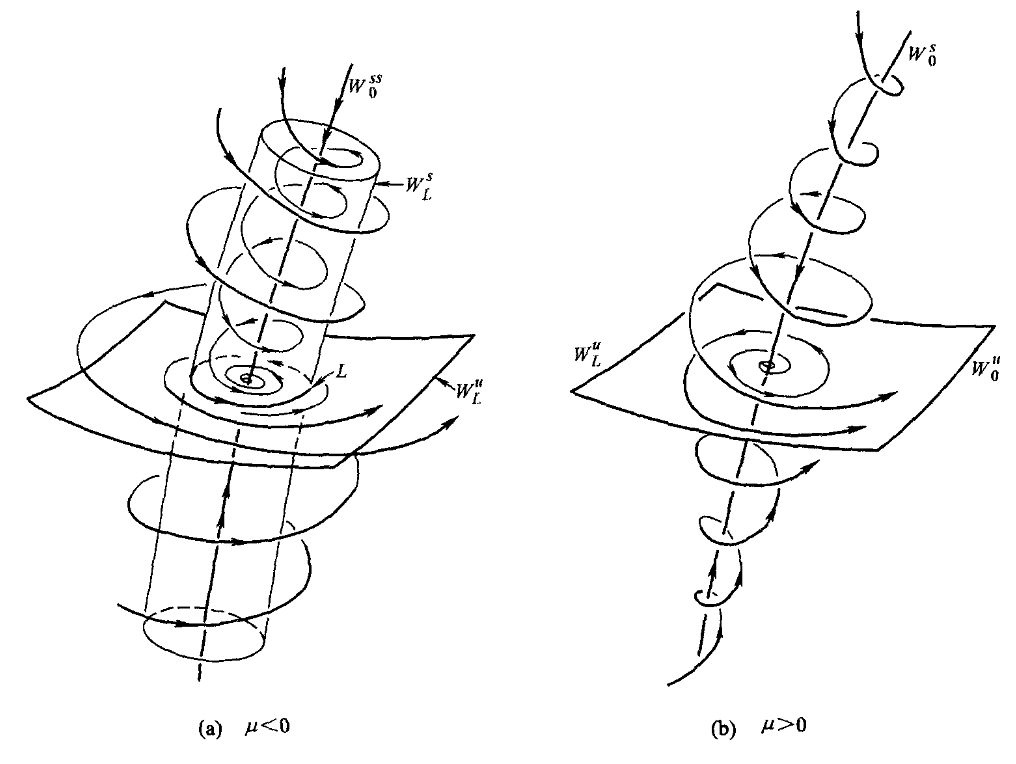


图 11.5.5 亚临界 Andronov-Hopf 分支. (a) 稳定焦点的吸引盆是由鞍点周期轨道的稳定流形所界定. (b) 周期轨道在 $\mu=0$ 缩小到稳定焦点, 后者变成鞍 – 焦点 (1,2).

选择 $\lambda(\varepsilon)$ 和 $L_1(\varepsilon)$ 作为控制参数 μ_0 和 μ_1, 与 $\mathfrak{M}'$ 横截的双参数族写为形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu_0 x_1 - \omega(\mu)x_2 + (\mu_1 x_1 - \Omega_1(\mu)x_2)(x_1^2+x_2^2)\\ &\quad +(L_2x_1 - \Omega_2 x_2)(x_1^2+x_2^2)^2 + o(x^5),\\ \dot{x}_2 &= \omega(\mu)x_1 + \mu_0 x_2 + (\Omega_1(\mu)x_1 + \mu_1 x_2)(x_1^2+x_2^2)\\ &\quad +(\Omega_2 x_1 + L_2 x_2)(x_1^2+x_2^2)^2 + o(x^5),\end{aligned}$$

或者在极坐标下为

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(\mu_0 + \mu_1 R^2 + L_2 R^4) + \Phi_1(R,\varphi,\mu),\\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2 + \Omega_2 R^4 + \Phi_2(R,\varphi,\mu),\end{aligned} \tag{11.5.13}$$

其中 $\Phi_1 = o(R^5)$ 且 $\Phi_2 = o(R^4)$.

注意到 $\dot{\varphi}$ 对小 R 不为零. 因此, 原点附近的动力学由沿着系统轨线将射线: $\Re: \varphi=0, R\geqslant 0$ 映为它自己的映射确定. 这个映射的计算与上面定理 11.1 证明中的方法相同, 即利用将系统 (11.5.13) 的解 $R(\varphi)$ 展开成关于初始条件的 Taylor 级数:

$$R(\varphi) = \alpha_1(\varphi)R_0 + \alpha_2(\varphi)R_0^2 + \alpha_3(\varphi)R_0^3 + \alpha_4(\varphi)R_0^4 + \alpha_5(\varphi)R_0^5 + \cdots.$$

略去细节最后得到

$$\bar{R} = R + \frac{2\pi}{\omega(\mu)} R(\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 R^2 + L_2 R^4) + o(R^5), \tag{11.5.14}$$

其中

$$\hat{\mu}_0 = (e^{2\pi\mu_0/\omega(\mu)} - 1)\frac{\omega(\mu)}{2\pi} = \mu_0 + o(\mu_0),$$

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \left(\mu_1 - \frac{\Omega_1(\mu)}{\omega(\mu)}\mu_0\right) e^{2\pi\mu_0/\omega(\mu)} (e^{4\pi\mu_0/\omega(\mu)} - 1)\frac{\omega(\mu)}{4\pi\mu_0} \\ &= \mu_1 - \frac{\Omega_1(0)}{\omega(0)}\mu_0 + o(\mu_0) + o(\mu_1).\end{aligned}$$

由于映射 (11.5.14) 的右端是单调增加函数, 对这个映射的研究化为对它的不动点的研究. 它们可视为方程

$$R(\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 R^2 + L_2 R^4) + o(R^5) = 0$$

的根. 注意, 由于这个映射是对 $R \geqslant 0$ 定义的, 我们只需寻找非负根: $R = 0$ 对应于平衡态, 正根对应于系统 (11.5.13) 的周期轨道. 由于我们已经在上一节研究了这个类型的方程 (方程 (11.4.12)), 当分析在零 Lyapunov 量情形从倍周期分支出现周期 2 轨道时, 我们可以简单地重述它的主要结果.

系统可产生不多于两个的极限环. 如果 $L_2 < 0$ (见图 11.5.6), 则对 $\mu_0 > 0$ 存在单个极限环; 在由射线 $\mu_0 = 0, \mu_1 > 0$ 和曲线 $\mathcal{L} : \mu_0 = \dfrac{\mu_1^2}{4|L_2|} + o(\mu_1^2)$ 所围的扇形 D_2 内存在两个极限环: 一个稳定, 另一个不稳定, 它们在曲线 $\mathcal{L}$ 上合并形成一个半稳定环; 在 $\mathcal{L}$ 与射线 $\mu_0 = 0, \mu_1 < 0$ 之间的区域 D_0 内不存在周期轨道. 对情形 $L_2 > 0$, 类似的分支如图 11.5.7 所示.

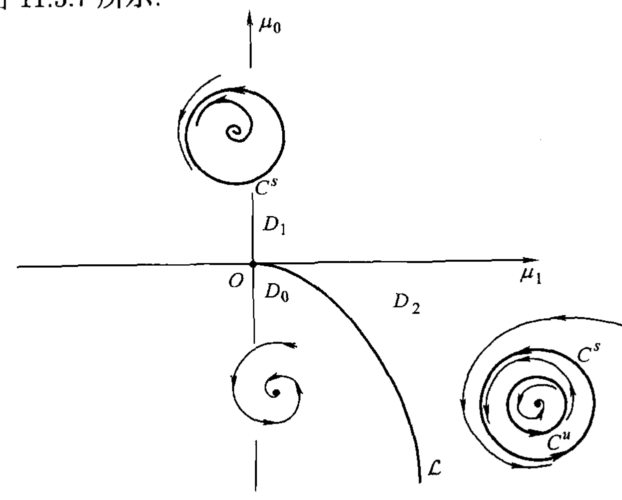


图 11.5.6 在 $L_1 = 0, L_2 < 0$ 情形时的分支开折. 曲线 $\mathcal{L}$ 对应于两个环的存在性.

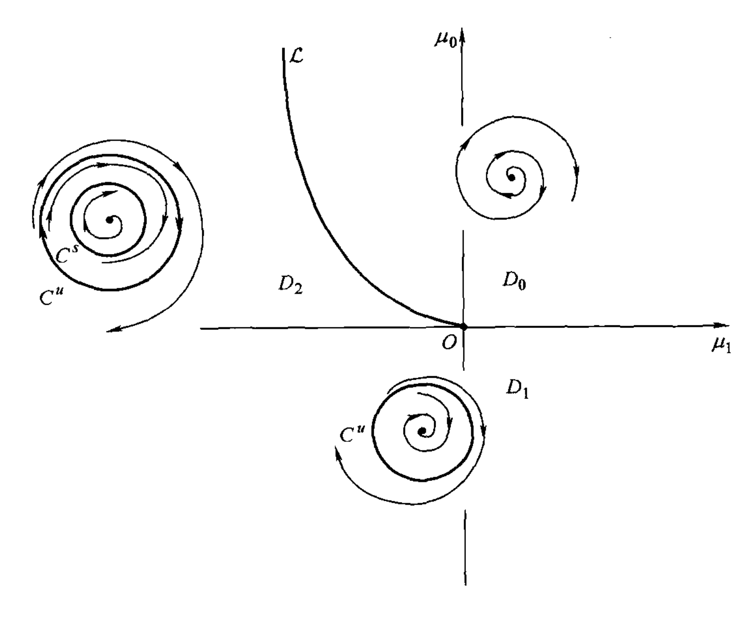


图 11.5.7 在 $L_1 = 0$, $L_2 > 0$ 情形时的分支开折.

现在设前面 $(k-1)$ 个 Lyapunov 量在 $\varepsilon = 0$ 时等于零 (所考虑的系统的光滑性假设不低于 $2k+1$). 于是, 在一般位置情形, 曲面 $\mathfrak{M}'$ (它对应的平衡态有一对纯虚特征值以及前面 $(k-1)$ 个 Lyapunov 量等于零) 是参数空间中通过点 $\varepsilon = 0$ 的余维 k 的 $\mathbb{C}^{2k-1}$ – 光滑曲面. 在这种情形下所有横截族依赖于 k 个控制参数 $\mu_0, \cdots, \mu_{k-1}$ 并且在极坐标下可写为下面形式:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R(\mu_0 + \cdots + \mu_{k-1}R^{2k-2} + L_k R^{2k}) + o(R^{2k+1}), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2 + \cdots + \Omega_k(\mu)R^{2k} + o(R^{2k}). \end{aligned} \tag{11.5.15}$$

对这个族的分析也可以化为将射线 $\varphi = 0, R \geqslant 0$ 映为它自己的映射的研究. 我们可以证明这个映射有形式

$$\bar{R} = R + \frac{2\pi}{\omega(\mu)} R(\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 R^2 + \cdots + \hat{\mu}_{k-1}R^{2k-2} + L_k R^{2k}) + o(R^{2k+1}), \tag{11.5.16}$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0 &= \mu_0 + o(\mu_0), \\ \hat{\mu}_1 &= \mu_1 - \hat{\Omega}_1\mu_0 + o(\mu_0) + o(\mu_1), \\ &\vdots \\ \hat{\mu}_i &= \mu_i - \hat{\Omega}_1\mu_{i-1} - \cdots - \hat{\Omega}_i\mu_0 + o(\mu_0) + \cdots + o(\mu_i), \\ &\vdots \\ \hat{\mu}_{k-1} &= \mu_{k-1} - \hat{\Omega}_1\mu_{k-2} - \cdots - \hat{\Omega}_{k-1}\mu_0 + o(\mu_0) + \cdots + o(\mu_{k-1}), \end{aligned}$$

并且量 $\hat{\Omega}_i$ 是 $\Omega_1(0),\cdots,\Omega_i(0)$ 和 $\omega(0)$ 的函数:

$$\hat{\Omega}_1=\frac{\Omega_1(0)}{\omega(0)},$$
$$\hat{\Omega}_2=\frac{\Omega_2(0)}{\omega(0)}-\frac{\Omega_1^2(0)}{\omega^2(0)},$$
$$\vdots\quad.$$

在上一节我们已经将由具有乘子 -1 的不动点生成周期 2 轨道的问题化为类似于映射 (11.5.16) 的映射 (11.4.17) 的研究. 因此在这种情形的分支图与具有 $(k-1)$ 个零 Lyapunov 量的倍周期分支的分支图相同: 这是由平面 $\mu_0=0$, 在其上原点的平衡态失去它的稳定性, 以及对应于正 u 的多项式 $\hat{\mu}_0+\cdots+\hat{\mu}_{k-1}u^{k-1}+L_ku^k$ 的重根的半曲面 (s 重正根对应于 s 重极限环) 的并组成.

注意到映射 (11.5.16) 可有不多于 k 个的正不动点 (包括重次), 因此具有一对纯虚特征指数和前面 $(k-1)$ 个 Lyapunov 量等于零的平衡态可以产生最多 k 个极限环. 此外, 参数空间的区域可以按系统有从 0 到 k 个极限环确定. 它们都围绕原点, 使得不稳定环位于任何两个相继的稳定极限环之间. 最外面的极限环的稳定性由第 k 个 Lyapunov 量的符号确定: 如果 $L_k<0$ 那么它稳定, 否则不稳定.

这个理论属于 Andronov 和 Leontovich, 他们分析了平面情形. 稍后 Hopf 从不同观点研究了具有一对纯虚特征指数的平衡态的族. 他的结果用当代的方法可表述如下: 考虑二维系统[6] 的单参数族

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\lambda(\mu)x_1-\omega(\mu)x_2+G_1(x_1,x_2,\mu),\\ \dot{x}_2&=\omega(\mu)x_1+\lambda(\mu)x_2+G_2(x_1,x_2,\mu),\end{aligned}\tag{11.5.17}$$

其中 $G_{1,2}$ 是满足 $G=o(R)$ 和 $G'_\mu=o(R)$, $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ 的 $\mathbb{C}^r$ $(r\geqslant 1)$ 类函数.

定理 11.2 设

$$\lambda(0)=0,\quad \lambda'(0)\neq 0,\quad \omega(0)\neq 0.$$

那么在扩展相空间 (相空间与参数空间的直积) 的原点附近存在唯一确定的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑不变曲面 $\mu=\psi(x)$, $\psi(0)=0$, 使得对给定的 μ, 它与平面 $\mu=$ 常数的每一个交是由系统 (11.5.17) 位于原点领域内的闭轨线集所组成.

证明 系统 (11.5.17) 在极坐标下写为

$$\dot{R}=\lambda(\mu)R+\Phi_1(R,\varphi,\mu),$$
$$\dot{\varphi}=\omega(\mu)+\Phi_2(R,\varphi,\mu),$$

[6] Hopf 事实上考虑了高维情形. 但应用中心流形定理, 我们就可考虑限制在二维情形.

其中 $\Phi_1 = o(R)$, $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} = o(R)$ 且 $\Phi_2 = o(1)$. 沿着系统的轨线, 射线 $\varphi = 0, R \geqslant 0$ 的映射有形式

$$\bar{R} = e^{2\pi\lambda(\mu)/\omega(\mu)} R + o(R). \tag{11.5.18}$$

这个映射的不动点是函数

$$\Psi(R,\mu) \equiv e^{2\pi\lambda(\mu)/\omega(\mu)} - 1 + \frac{o(R)}{R} \tag{11.5.19}$$

的零点. 偶 $(R = 0, \mu = 0)$ 满足这个方程. 因为

$$\frac{\partial \Psi(0,0)}{\partial \mu} = \frac{2\pi\lambda'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

我们可以对 (11.5.19) 应用隐函数定理. 因此在半平面 $(\mu, R \geqslant 0)$ 上存在唯一确定的光滑曲线 $\mu = \Psi(R)$, 对每个给定的 μ, 它由映射 (11.5.18) 的不动点组成. 由于系统 (11.5.17) 的周期轨道对应于映射 (11.5.18) 的不动点, 在扩展空间 (μ, x_1, x_2) 内存在曲面 $\mu = \psi(x)$, 它被系统的闭轨线所充满. 这与定理的论断一致 (验证曲面在 $x = 0$ 的光滑性需要另外的计算, 我们在这里就省略了).

注意, 上面定理本身并不揭示关于系统 (11.5.17) 动力学的多少信息. 从定理立刻得知的信息仅仅是, 在 $\mu = 0$ 的小邻域内或在 $\mu = 0$ 时系统存在周期轨道. 但对任何固定的 μ 关于周期轨道的个数定理没有说.

例如, 假设定理条件满足, 可能发生不变曲面由方程 $\mu = 0$ 给出. 这意味着在原点附近所有的轨线都是闭的, 即在原点的平衡态是中心, 但在 $\mu \neq 0$ 系统没有围绕原点的小闭轨道. 因此, 平衡态这时可能仅仅失去稳定性而没有产生极限环, 例如在方程 $\ddot{x} + \mu\dot{x} + x + x^3 = 0$ 中.

11.6 不变环面的产生

考虑关于变量 $x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 0)$ 以及参数 $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ $(p \geqslant 1)$ 是 $\mathbb{C}^r$ $(r \geqslant 3)$ 类的映射族. 设映射在 $\varepsilon = 0$ 有不动点 O, 它有一对复共轭乘子, 其绝对值等于 1:

$$\rho_{1,2} = e^{\pm i\omega_0},$$

这里我们假设 $0 < \omega_0 < \pi$ (其它乘子假设位于单位圆内). 这样的不动点对 $\varepsilon \neq 0$ 也保持. 我们也将假设对所有 ε 不动点在原点. 最靠近单位圆的一对乘子是

$$\rho_{1,2}(\varepsilon) = \rho(\varepsilon) e^{\pm i\omega(\varepsilon)}, \tag{11.6.1}$$

其中 $\rho(\varepsilon)$ 和 $\omega(\varepsilon)$ 是满足

$$\rho(0) = 1, 0 < \omega(0) < \pi$$

的 ε 的 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 函数. 由于我们不想考虑更困难的强共振问题, 故假设 $\omega(0) \neq \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$.

由约化定理, 在不动点附近映射可以写为形式

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \rho(\varepsilon)(x_1\cos\omega(\varepsilon) - x_2\sin\omega(\varepsilon)) + G_1(x_1, x_2, \varepsilon),\\ \bar{x}_2 &= \rho(\varepsilon)(x_1\sin\omega(\varepsilon) + x_2\cos\omega(\varepsilon)) + G_2(x_1, x_2, \varepsilon),\\ \bar{y} &= [A + F(x, y, \varepsilon)]y,\end{aligned} \tag{11.6.2}$$

其中 F 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 光滑函数, $G_{1,2}$ 是 $\mathbb{C}^r$ 类的, 且

$$F(0,0,0) = 0,$$

$$G(0,0,0) = 0,$$

$$G'_x(0,0,0) = 0,$$

这里为了避免混乱我们将 G_i 都写为 G.

假设在 $\varepsilon = 0$ 映射化为直到三次项的规范形 (见 10.6 节). 此外, 我们可以验证对所有小 ε, 二次项都是非共振项, 因此它们可以用关于 x 是多项式关于 ε 是 $\mathbb{C}^{r-2}$ – 光滑的变换消去. 于是在中心流形上这个映射可以写为形式

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \rho(\varepsilon)(x_1\cos\omega(\varepsilon) - x_2\sin\omega(\varepsilon))\\ &\quad + (\alpha x_1 - \beta x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{G}_1(x_1, x_2, \varepsilon),\\ \bar{x}_2 &= \rho(\varepsilon)(x_1\sin\omega(\varepsilon) + x_2\cos\omega(\varepsilon))\\ &\quad + (\beta x_1 + \alpha x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{G}_2(x_1, x_2, \varepsilon),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{G}_{1,2}$ 是 x 的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑函数, 是 ε 的 $\mathbb{C}^{r-2}$ – 光滑函数, 且满足

$$\tilde{G}(0,0,\varepsilon) = 0, \qquad \tilde{G}''_{xx}(0,0,\varepsilon) = 0,$$

$$\tilde{G}'_x(0,0,\varepsilon) = 0, \qquad \tilde{G}'''_{xxx}(0,0,0) = 0.$$

由于对小的 ε 和 R ($R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$), $\tilde{G}'''_{xxx}$ 也小, 因而得知

$$\tilde{G}''_{xx} = o(R), \quad \tilde{G}'_x = o(R^2), \quad \tilde{G} = o(R^3). \tag{11.6.3}$$

为了将映射写为极坐标形式, 我们用公式 $\bar{R} = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}$ 和 $\bar{\varphi} = \operatorname{Im}\ln(\bar{x}_1 + i\bar{x}_2)$ 得到

$$\begin{aligned}\bar{R}^2 = {}& \frac{\rho^2(x_1^2 + x_2^2)[1 + 2(\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega)(x_1^2 + x_2^2)}{\rho}\\ & + 2\rho^{-1}(x_1(\tilde{F}_1\cos\omega + \tilde{F}_2\sin\omega)\\ & + x_2(\tilde{F}_2\cos\omega - \tilde{F}_1\sin\omega))/(x_1^2 + x_2^2) + \cdots],\\ \bar{\varphi} = {}& \operatorname{Im}\ln(x_1 + ix_2) + \omega + \operatorname{Im}\ln[1 + \rho^{-1}e^{-i\omega}(\alpha + i\beta)(x_1^2 + x_2^2)\\ & + \rho^{-1}e^{-i\omega}(\tilde{F}_1 + i\tilde{F}_2)/(x_1 + ix_2)],\end{aligned}$$

以及

$$\bar{R} = \rho(\varepsilon)R + L_1R^3 + \tilde{\Phi}_1(R,\varphi,\varepsilon),$$
$$\bar{\varphi} = \varphi + \omega(\varepsilon) + \Omega_1R^2 + \tilde{\Phi}_2(R,\varphi,\varepsilon), \tag{11.6.4}$$

其中 $L_1 = (\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega)$ 是第一个 Lyapunov 量, $\Omega_1 = \dfrac{\beta\cos\omega - \alpha\sin\omega}{\rho}$, 以及

$$\tilde{\Phi}_1(R,\varphi,\varepsilon) = \tilde{F}_1\cos(\omega+\varphi) + \tilde{F}_2\sin(\omega+\varphi) + \cdots = o(R^3),$$
$$\tilde{\Phi}_2(R,\varphi,\varepsilon) = \frac{\rho^{-1}(\tilde{F}_2\cos(\omega+\varphi) - \tilde{F}_1\sin(\omega+\varphi))}{R} + \cdots = o(R^2), \tag{11.6.5}$$

其中省略号表示高阶项.

在参数空间内不动点的稳定性区域边界 $\mathfrak{M}$ 由方程 $\rho(\varepsilon) = 0$ 定义: $\rho(\varepsilon) < 0$ 时不动点 O 稳定, $\rho(\varepsilon) > 0$ 时不稳定. 如果向量 $\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_1}, \cdots, \dfrac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_p}\right)_{\varepsilon=0}$ 的分量至少有一个不为零, 则对小 ε, 边界 $\mathfrak{M}$ 是余维 1 的 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 光滑曲面. 选择差 $\rho(\varepsilon) - 1$ 作为控制参数 μ. 因此与 $\mathfrak{M}$ 横截的单参数族可表示为形式

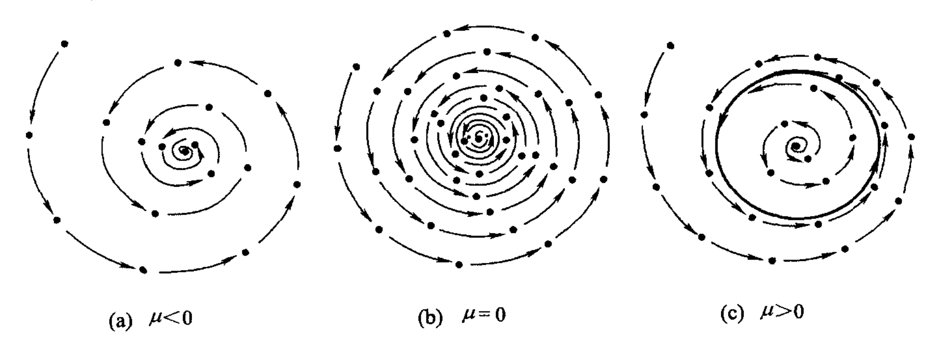
$$\bar{R} = R + R(\mu + L_1R^2) + \tilde{\Phi}_1(R,\varphi,\mu),$$
$$\bar{\varphi} = \varphi + \omega(\mu) + \Omega_1R^2 + \tilde{\Phi}_2(R,\varphi,\mu). \tag{11.6.6}$$

定理 11.3 设 $L_1 < 0$. 则对所有小的 $\mu \leqslant 0$, 映射 (11.6.6) 的不动点 O 稳定, 它吸引在 O 的小邻域内的所有轨线.

在 $\mu > 0$, 从 O 分支出的光滑不变闭曲线

$$R = \sqrt{\left|\frac{\mu}{L_1}\right|}\psi(\varphi,\mu), \quad \psi_{\mu\to 0} \to 1 \tag{11.6.7}$$

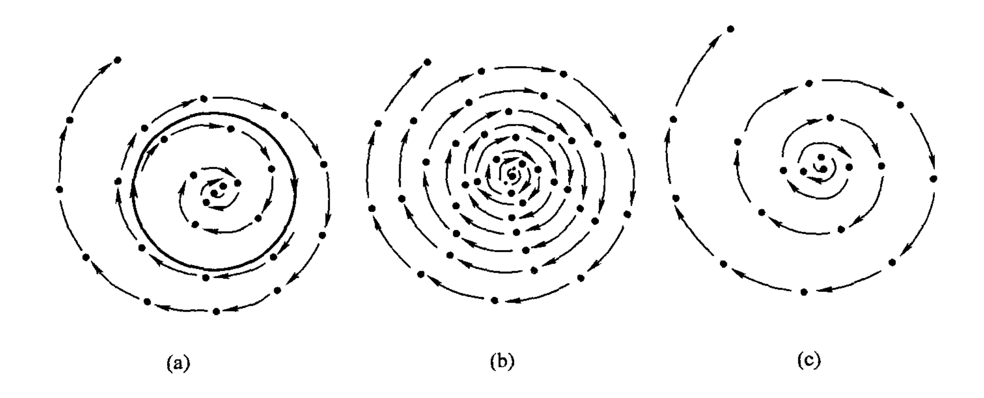
吸引所有 (除了 O) 邻近的轨线 (见图 11.6.1).



(a) $\mu<0$　(b) $\mu=0$　(c) $\mu>0$

图 11.6.1 不变圆周的软产生.

如果第一个 Lyapunov 量 $L_1 > 0$, 则对充分小的 $\mu \geqslant 0$, 映射 (11.6.6) 的不动点不稳定. 当 $\mu < 0$ 时不动点稳定; 它的吸引盆是不稳定光滑不变曲线 (11.6.7) 的内部区域. 当 $\mu \to -0$ 时这条曲线坍缩到不动点 (见图 11.6.2).



(a)　(b)　(c)

图 11.6.2　稳定不动点刚性失去稳定性.

证明　首先注意, 应用 (11.6.6) 的逆映射以代替原来的映射就可把 $L_1 > 0$ 的情形化为 $L_1 < 0$ 的情形. 因此, 我们只需考虑情形 $L_1 < 0$. 对 $\mu \leqslant 0$ 时的不动点的稳定性立刻由下面事实得知: 对 $\mu \leqslant 0$ 时 $\bar{R} < R$, 即 $V \equiv R$ 是 Lyapunov 函数. 因此, 需要分析的是 $\mu > 0$ 的情形.

考虑由

$$\frac{2}{3}\sqrt{\left|\frac{\mu}{L_1}\right|} \equiv R_1 \leqslant R \leqslant R_2 \equiv \frac{3}{2}\sqrt{\left|\frac{\mu}{L_1}\right|}$$

定义的环域 $\mathcal{A}$. 注意到给定原点的充分小邻域, 对所有充分小 μ, 从这个环域外部出发的轨线经有限次迭代必须进入它: 由 (11.6.6) 得知, 当 $R > R_2$ 时 $\bar{R} < R$, 当 $0 < R < R_1$ 时 $\bar{R} > R$. 为了完成定理的证明, 我们需要对映射 (11.6.6) 在环域 $\mathcal{A}$ 内应用 4.2 节的环域原理.

为此作尺度化 $R \to R\sqrt{\left|\frac{\mu}{L_1}\right|}$. 在这个尺度化变量下, 环域由不等式

$$\frac{2}{3} \leqslant R \leqslant \frac{3}{2} \tag{11.6.8}$$

定义, 映射取形式

$$\begin{aligned}
\bar{R} &= R + \mu R(1 - R^2) + \Phi_1(R, \varphi, \mu), \\
\bar{\varphi} &= \varphi + \omega(\mu) - \frac{\mu\Omega_1 R^2}{L_1} + \Phi_2(R, \varphi, \mu),
\end{aligned} \tag{11.6.9}$$

其中

$$\Phi_1 = \frac{\tilde{\Phi}_1\left(R\sqrt{\left|\frac{\mu}{L_1}\right|}, \varphi, \mu\right)}{\sqrt{\left|\frac{\mu}{L_1}\right|}},$$

$$\Phi_2 = \tilde{\Phi}_2\left(R\sqrt{\left|\frac{\mu}{L_1}\right|}, \varphi, \mu\right). \tag{11.6.10}$$

从公式 (11.6.10), (11.6.5) 和 (11.6.3) 我们可以看到

$$\Phi_{1,2} = o(\mu). \tag{11.6.11}$$

如果如 4.2 节我们记

$$\bar{R} = f(R, \varphi),$$

$$\bar{\varphi} = g(R, \varphi),$$

则环域内映射 (11.6.9) 满足下面的关系

$$\|(g'_\varphi)^{-1}\|_\circ = 1 + o(\mu),$$

$$\|g'_R\|_\circ = O(\mu),$$

$$\|f'_R\|_\circ = 1 - \frac{\mu}{3} + o(\mu),$$

$$\|f'_\varphi\|_\circ = o(\mu),$$

其中 $\|\cdot\|_\circ \equiv \sup\|\cdot\|$. 注意到对充分小 μ, 下面的不等式成立

$$\sqrt[r+1]{(\|f'_R\|_\circ + \|g'_R\|_\circ \|f'_\varphi (g'_\varphi)^{-1}\|_\circ) \cdot \|(g'_\varphi)^{-1}\|_\circ^r}$$

$$+\sqrt{\|(g'_\varphi)^{-1}\|_\circ \|g'_R\|_\circ \|f'_\varphi (g'_\varphi)^{-1}\|_\circ} < 1. \tag{11.6.12}$$

由环域原理 (定理 4.2 和定理 4.5) 得知, 存在光滑稳定不变曲线 C, 它有形式

$$R = \psi(\varphi, \mu).$$

从 $\mathcal{A}$ 出发的所有轨线都收敛于它.

由环域原理的证明得知, 曲线 C 是任意初始曲线 $R =$ 常数, 例如 $R = 1$ 的迭代所得的曲线序列的极限. 对任何小 $\delta > 0$, 由 (11.6.9) 我们看到, 只要 μ 足够地小, 这条曲线的所有迭代位于环域 $|R-1| \leqslant \delta$ 之内, 事实上, 如果 μ 充分小, 则对 $R = 1+\delta$, 我们有

$$\bar{R} = 1 + \delta - \mu\delta(1+\delta)(2+\delta) + o(\mu) < 1 + \delta,$$

对 $R=1-\delta$, 有

$$\bar{R}=1-\delta+\mu\delta(1-\delta)(2-\delta)+o(\mu)<1-\delta.$$

因此, 极限曲线 C 也位于这个环域的内部. 由于当 $\mu\to 0$ 时 δ 可使得任意小, 我们得到 $\mu\to 0$ 时 $\psi(\varphi,\mu)\to 1$. 证明完毕.

注 由于不变曲线的光滑性一般不超过映射自身的光滑性, (11.6.7) 中的函数 ψ 关于 φ 仅 $\mathbb{C}^r$ – 光滑, 关于 μ 是 $\mathbb{C}^{r-2}$ – 光滑. 事实上, 关于参数失去的光滑性仅仅由于将原映射化为 (11.6.6) 时失去的光滑性. 用更仔细的规范形约化, 关于参数的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑性可得到恢复. 这些光滑性结果仅对 μ 的非零值考虑 (在 $\mu=0$ 对映射 (11.6.9) 不能应用环域原理). 但是, 我们可以证明定义不变曲线的方程 (11.6.7) 的右端对所有 $L_1\mu\leqslant 0$ 关于 φ 和 $\sqrt{\mu}$ 是充分光滑的. 例如, 我们验证 ψ 关于 φ 的所有导数当 $\mu\to 0$ 时都趋于零. 事实上, 注意到由曲线 C 的不变性得知, 如果 $R=\psi(\varphi,\mu)$, 则 $\bar{R}=\psi(\bar{\varphi},\mu)$. 微分这个等式并应用 (11.6.9) 我们得到

$$\bar{u}=\frac{(1+\mu(1-3R^2)+\Phi'_{1R})u+\Phi'_{1\varphi}}{1+\Phi'_{\varphi}-\left(\dfrac{2\mu\Omega_1 R}{L_1}-\Phi'_{2R}\right)u},\tag{11.6.13}$$

其中 $u\equiv\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ 且 $\bar{u}=u(\bar{\varphi})$. (11.6.13) 中的右端是令 $R=\psi(\varphi,\mu)$ 计算的. 方程 (11.6.13) 以及 (11.6.9) 中的第二个方程可以作为将柱面 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^1$ 映到它自身的映射 $(u,\varphi)\mapsto(\bar{u},\bar{\varphi})$ 来处理. 考虑到 $\mu\to 0$ 时 $R=\psi(\varphi,\mu)\to 1$, 我们可以把 (11.6.13) 重写为形式

$$\bar{u}=(1-2\mu)u+o(\mu).\tag{11.6.14}$$

注意到 (11.6.14) 将环域

$$|u|\leqslant\delta$$

映到它自己, 其中 δ 由于 μ 的小而可取得任意小. 导数 $u=\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ 可看作这个映射的不变曲线. 由环域原理的证明得知, 这条曲线是任何曲线 $u=$ 常数的迭代的极限. 由于圆周 $u=0$ 的所有迭代位于环域 $|u|\leqslant\delta$ 内, 这个极限曲线也必须位于这个环域内. 因此得知, 当 $\mu\to 0$ 时 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\to 0$, 即在 $\mu=0$, ψ 是 φ 的光滑函数.

微分 (11.6.13), 如在 (11.6.14) 中, 我们得到二阶导数 $\bar{u}^{(2)}=\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$ 满足类似于 (11.6.14) 的关系式

$$\bar{u}^{(2)}=(1-2\mu)u^{(2)}+o(\mu).$$

重复上面的论述, 我们得知对所有 $\mu\geqslant 0$, 二阶导数存在且连续. 重复这个过程我们得到所有关于 φ 的导数.

上面的定理涉及中心流形上的映射. 重建原映射 (11.6.2) 的轨线性态相对比较简单. 这里, 如果 $L_1 < 0$, 则当 $\mu \leqslant 0$ 时不动点稳定. 当 $\mu > 0$ 时它变成具有 m 维稳定流形 (由 $x = 0$ 定义) 和二维不稳定流形的鞍 - 焦点, 不稳定流形是平面 $y = 0$ 被稳定不变曲线 C 所围的部分组成.

如果 $L_1 > 0$, 则当 $\mu \geqslant 0$ 时不动点为上面类型的鞍 - 焦点, 但它的不稳定流形是整个平面 $y = 0$. 一旦进入区域 $\mu < 0$ 时, 不动点变成稳定. 这时从不动点分支出鞍点不变曲线 C, 它的不稳定流形 W_C^u 是 $(m+1)$ 维, 由在不变曲线上点描绘的层面 $x =$ 常数所组成. 稳定流形 W_C^s 将点 O 的吸引盆隔离开: 从 W_C^s 内部区域出发的所有轨线都趋于 O, 从 W_C^s 外部出发的所有轨线都离开原点的邻域.

如果映射 (11.6.2) 是自治微分方程系统的 Poincaré 映射, 则不变曲线对应于二维光滑不变环面 (见图 11.6.3). 如果 $L_1 < 0$ 则它稳定, 或者, 当 $L_1 > 0$ 时它是具有三维不稳定流形和 $(m+2)$ 维稳定流形的鞍点. 回忆由 3.4 节, 环面上的运动由 Poincaré 旋转数确定: 如果旋转数 ν 是无理数, 则环面上的轨线是频率比为 ν 的拟周期轨线; 反之, 如果旋转数是有理数, 则环面上存在共振周期轨道.

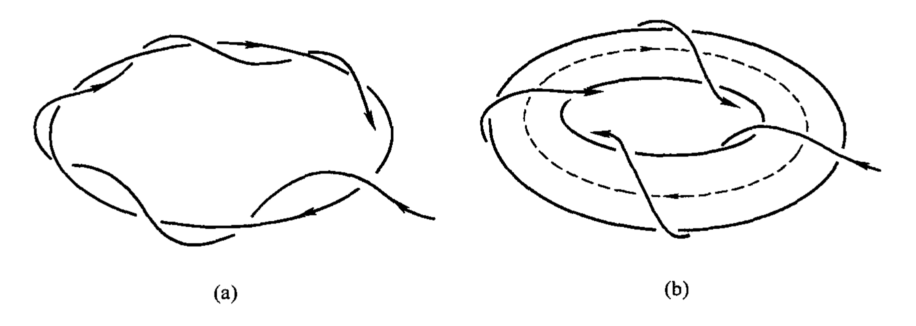


图 11.6.3 (a) 不变环面的产生: $\mathbb{R}^3$ 中的环失去它的外形. (b) 不稳定环是环体内的虚线.

我们将环面上的分支研究推迟到下一节, 而首先考虑如果第一个 Lyapunov 量 L_1 等于零将发生什么情况.

设 (11.6.1) 中的 $\omega(0)$ 不等于 $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}$. 于是化为规范形并计算到 5 次项以后, 映射在极坐标下写为形式

$$
\begin{aligned}
\bar{R} &= R + R(\mu_0 + \mu_1 R^2 + L_2 R^4) + \tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \mu), \\
\bar{\varphi} &= \varphi + \omega(\mu) + \Omega_1(\mu) R^2 + \Omega_2 R^4 + \tilde{\Phi}_2(R, \varphi, \mu).
\end{aligned}
\tag{11.6.15}
$$

其中, $\tilde{\Phi}_1 = o(R^5)$, $\tilde{\Phi}_2 = o(R^4)$, $L_2 \neq 0$ 是第二个 Lyapunov 量, 控制参数是 $\mu_0 = \rho(\varepsilon) - 1$ 和 $\mu_1 = L_1(\varepsilon)$.

定理 11.4 设 $L_2 < 0$. 则由

$$\mu_0 = -\mu_1^2/4|L_2| \pm o(\mu_1^2), \quad \mu_1 \geqslant 0$$

定义的一对曲线 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 可在参数平面内确定, 使得在曲线 $\mathcal{L}_1$ 和射线 $\mu_0 = 0, \mu_1 \leqslant 0$ 之间的区域 D_0 内 (见图 11.6.4), 在原点的不动点 O 稳定, 它吸引它的某邻域内的所有轨线. 在区域 $D_1 : \mu_0 > 0$ 内, 不动点不稳定, 所有轨线都趋于围绕原点的 $\mathbb{C}^r$ - 光滑不变闭曲线 C^s. 在曲线 $\mathcal{L}_2$ 与射线 $\mu_0 = 0, \mu_1 \geqslant 0$ 之间的区域 D_2 内, 不动点变成稳定, 除了 C^s 以外还产生不稳定 $\mathbb{C}^r$ - 光滑不变闭曲线 C^u, 它将 O 的吸引盆和 C^s 分开.

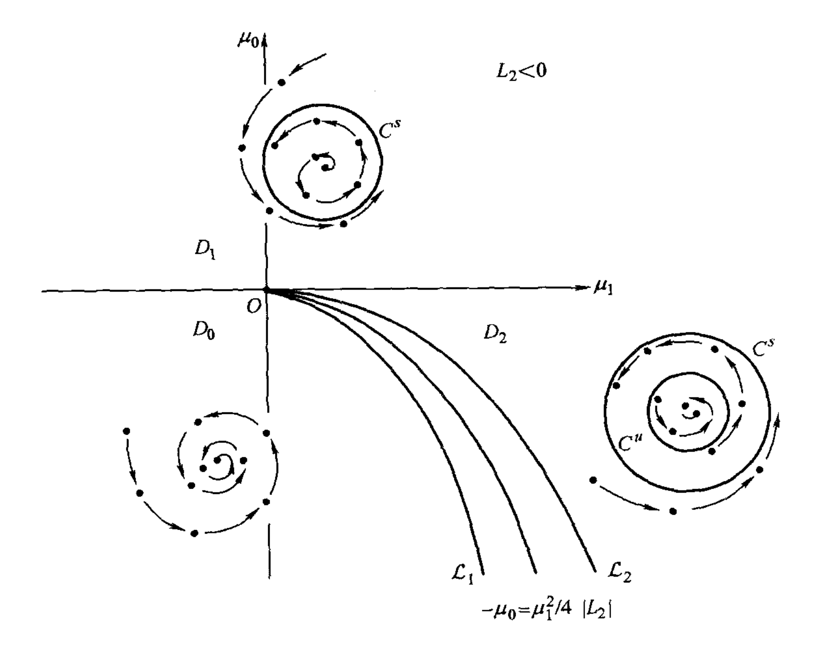


图 11.6.4 对 $L_2 < 0$ 的分支开折.

在情形 $L_2 > 0$, 参数平面内存在分别由

$$\mu_0 = \mu_1^2/4|L_2| \pm o(\mu_1^2), \quad \mu_1 \leqslant 0$$

定义的曲线 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$, 使得在曲线 $\mathcal{L}_1$ 和射线 $\mu_0 = 0, \mu_1 \geqslant 0$ 之间的区域 D_0 内 (见图 11.6.5), 不动点不稳定, 它排斥从原点小邻域内出发的所有邻近轨线. 在区域 $D_1 : \mu_0 < 0$ 内, 不动点稳定, 但它的吸引盆是由不稳定 $\mathbb{C}^r$ - 光滑不变闭曲线 C^u 所界定. 在由 $\mathcal{L}_2$ 和射线 $\mu_0 = 0, \mu_1 \leqslant 0$ 作为边界的区域 D_2 内, 不动点失去它的稳定性变成不稳定. 从它分支出稳定的 $\mathbb{C}^r$ - 光滑不变曲线, 后者现在吸引由 C^u 所围区域内的所有轨线.

为了避免冗长的计算我们在这里叙述一个证明概要. 仅考虑 $L_2 < 0$ 的情形 (因为 $L_2 > 0$ 的情形可用映射 (11.6.15) 的逆代替而化为上面的情形). 首先注意到定理

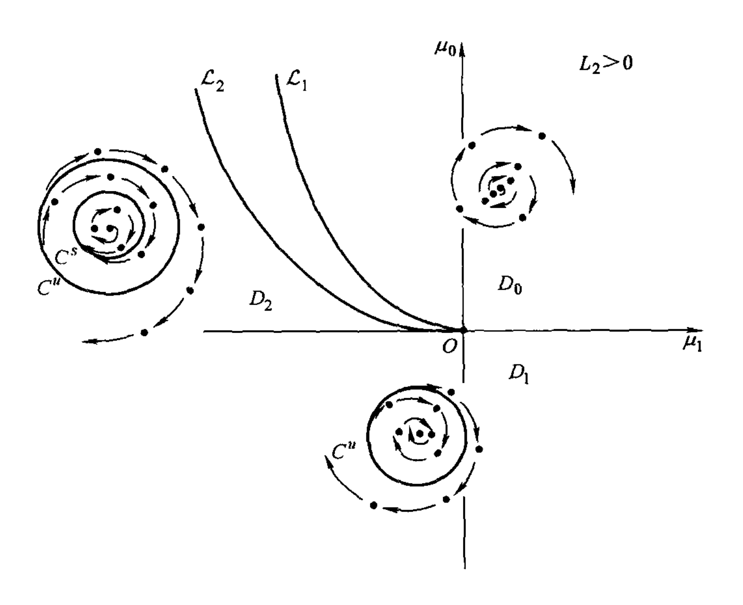


图 11.6.5 对 $L_2 > 0$ 的分支开折.

的论断对截断映射

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R + R(\mu_0 + \mu_1 R^2 + L_2 R^4),\\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega(\mu) + \Omega_1(\mu)R^2 + \Omega_2 R^4\end{aligned} \tag{11.6.16}$$

可容易地进行验证. 其中不变曲线是圆周 $R =$ 常数, 并且问题化为求方程

$$\mu_0 + \mu_1 R^2 + L_2 R^4 = 0$$

的正根. 如果 $\mu_0 > 0$, 这个方程有一个正根

$$R_s^2 = \left(\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0}\right) \Big/ 2|L_2|,$$

若 $\mu_0 < 0$ 以及 $\mu_1 < 2\sqrt{L_2\mu_0}$ 则没有正根, 若 $0 > \mu_0 > -\mu_1^2/4|L_2|$ 且 $\mu_1 > 0$, 则有两个正根

$$R_s^2 = \left(\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0}\right) \Big/ 2|L_2|,$$

$$R_u^2 = \left(\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0}\right) \Big/ 2|L_2|.$$

对映射 (11.6.15) 两条曲线 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 重合 ($\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$), 并由方程

$$\mu = -\mu_1^2/4|L_2|, \quad \mu_1 \geqslant 0$$

定义. 在曲线 $\mathcal{L}$ 的下方, 映射没有不变曲线. 在 $\mu_0 = 0$ 的上方, 它仅有一条不变曲线 $R = R_s$, 在 $\mathcal{L}$ 与射线 $\mu_0 = 0, \mu_1 \geqslant 0$ 之间, 映射有两条不变曲线 $R = R_s$ 和 $R = R_u$.

在 $R = R_s$ 我们容易推得

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial R} = 1 - 2R_s^2\sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0} < 1,$$

在 $R = R_u$ 得

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial R} = 1 + 2R_u^2\sqrt{\mu_1^2 + 4|L_2|\mu_0} > 1,$$

即不变圆周 $R = R_s$ 稳定, 不变曲线 $R = R_u$ 不稳定. 在曲线 $\mathcal{L}$ 上截断映射 (11.6.16) 有半稳定不变圆周 $R^2 = \mu_1/2|L_2|$.

对原始映射 (11.6.15) 我们在参数平面上可以按这样的方式排列曲线 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ ($\mathcal{L}_1$ 在 $\mathcal{L}$ 稍上, $\mathcal{L}_2$ 在 $\mathcal{L}$ 稍下), 使得对所有充分小 μ, 取这些曲线之间的扇形的外部, 原点附近轨线的性态继承截断映射 (11.6.16) 轨线的性态. 选择曲线 $\mathcal{L}_1$ 使得对充分小 $\mu \in D_0$ 和小 R, (11.6.15) 中的 $\bar{R}$ 值严格小于 R. 这意味着 R 是原点邻域内映射的 Lyapunov 函数, 因此每一条轨线都收敛于稳定不动点. 用我们已经证明定理 11.3 的同样方法, 可以验证对区域 $D_1 : \mu_0 > 0$, 如果我们用小环域 $\mathcal{A}$ 围绕圆周 $R = R_s$, 则对所有小 μ 从原点小邻域内出发的轨线将向 $\mathcal{A}$ 收敛, 于是对映射在 $\mathcal{A}$ 上的限制可应用环域原理. 由此得知 $\mathcal{A}$ 包含吸引原点附近所有轨线的光滑不变曲线. 至于对曲线 $\mathcal{L}_2$, 可以选择它使得在区域 D_2 内, 如果我们分别用两个狭窄的环域 $\mathcal{A}_s$ 和 $\mathcal{A}_u$ 围绕圆周 $R = R_s$ 和 $R = R_u$, 则从相平面中 $\mathcal{A}_u$ 外面出发的所有轨线将向 $\mathcal{A}_s$ 移动. 从相平面里面部分出发的轨线将趋于不动点 (见图 11.6.6). 因为环域原理在这里也适用于映射在 $\mathcal{A}_s$ 上的限制, 由此得知在 $\mathcal{A}_s$ 内稳定不变闭曲线的存在性. 用类似的理由考虑逆映射, 可证明在 $\mathcal{A}_u$ 内部的不稳定不变闭曲线的存在性, 它将稳定不变曲线的吸引盆和不动点分开.

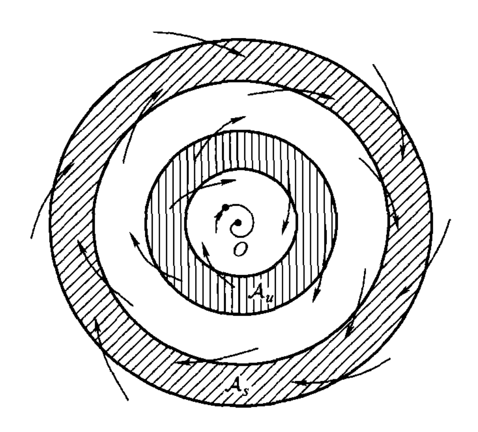


图 11.6.6 在 $\mu \in D_2$ 时, 里面的环不稳定, 外面的环稳定.

定理 11.4 本质上显示在由 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 界定的狭窄扇形外, 分支性态与平衡态的性态没有什么不同 (见 11.5 节): 不动点对应于平衡态, 不变曲线对应于周期轨道. 但

是, 这里从区域 D_2 到区域 D_0 的转移出现更加复杂的情况. 在平衡态情形, 区域 D_2 和 D_0 是由直线分开, 在这条直线上稳定和不稳定周期轨道重合形成半稳定环. 在不变闭曲线情形, 对应于半稳定不变闭曲线的直线的存在性只在非常退化的情形下才有可能 (例如, 当 $\bar{R}$ 的值不依赖于 φ 时, 如在截断映射 (11.6.16) 的情形). 在一般情形, 不变闭曲线不与半稳定不变闭曲线重合, 而以它们的破裂代之. 它们的破裂可以伴随包含无穷多个不同周期的不稳定 (鞍点) 周期轨道的非平凡集的出现. 更多细节见 [37].

11.7 伴随产生不变环面的共振周期轨道分支

在这一节我们继续研究周期轨道的一对复共轭乘子穿过单位圆

$$\rho_{1,2} = \rho(\varepsilon)e^{\pm i\omega(\varepsilon)} \tag{11.7.1}$$

的分支, 其中 $\rho(0) = 1$ 且 $0 < \omega(0) < \pi$. 我们不考虑强共振, 即 $\omega(0) \neq 2\pi/3,\ \pi/2$.

在上一节我们已经建立了当第一个 Lyapunov 量不为零时, 通过稳定性边界 $\mathfrak{M}$: $\rho(\varepsilon) = 0$ 时会伴随出现二维不变环面 (相应的 Poincaré 映射对应出现不变闭曲线). 如果我们对在环面上轨线的性态不感兴趣, 我们可把注意力限制在对与 $\mathfrak{M}$ 横截的单参数族的研究上. 这时 11.6 节的定理 11.4 给出分支结构的完全描述. 为了研究环面上自身的分支, 我们需要研究双参数族. 第一个控制参数仍是 $\mu = \rho(\varepsilon) - 1$. 作为第二个独立控制参数我们选择 $\omega(\varepsilon)$, 即乘子 (11.7.1) 的辐角. 在中心流形上的 Poincaré 映射在极坐标下写为形式

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R + R(\mu + L_1 R^2) + \tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \mu, \omega),\\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega + \Omega_1 R^2 + \tilde{\Phi}_1(R, \varphi, \mu, \omega)\end{aligned} \tag{11.7.2}$$

[见 (11.6.4). 形式上我们已经推导了与曲面 $\mathfrak{M}': \rho(\varepsilon) = 1, \omega(\varepsilon) = \omega(0)$ 横截的余维 2 族]. 在不变曲线 $R = \sqrt{\mu}\psi(\varphi, \mu, \omega)$ 上映射有形式

$$\bar{\varphi} = \varphi + \omega + \Omega_1 \mu \psi^2(\varphi, \mu, \omega) + \tilde{\Phi}_2(\sqrt{\mu}\psi(\varphi, \mu, \omega), \varphi, \mu, \omega). \tag{11.7.3}$$

由环域原理得知 (见定理 11.4 证明) 对 $\mu > 0$, 函数 ψ 光滑依赖于 ω. 此外, 正如我们已经对 ψ 关于 φ 的导数所作的, 可以验证当 $\mu \to 0$ 时 ψ 关于 ω 的导数趋于零. 由此得知对所有 $\mu \geqslant 0$, ψ 是 ω 的光滑函数.

映射 (11.7.3) 在 $\mu = 0$ 表示以常数角 ω 的旋转, 它的旋转数等于 $\dfrac{\omega}{2\pi}$. 因此, 如果我们选取两个不同值 $\omega = \omega_1$ 和 $\omega = \omega_2$, 则由旋转数关于参数的连续依赖性, 当 μ 小时映射 (11.7.3) 的旋转数 ν 在 $\omega = \omega_1$ 接近于 $\dfrac{\omega_1}{2\pi}$, 在 $\omega = \omega_2$ 接近于 $\dfrac{\omega_2}{2\pi}$.

由于导数 $\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\omega}$ 等于 $1 + O(\mu) > 0$, 当 ω 增加时 $\bar{\varphi}$ 单调增加. 因此, 对每一个固定的小 μ, 当 ω 从 ω_1 变化到 ω_2 时旋转数 ν 单调地变化, 假设所有值都是从接近 $\dfrac{\omega_1}{2\pi}$

的那些值到接近 $\frac{\omega_2}{2\pi}$ 的那些值变化. 因此, 如同周期轨道问题外加一个周期强迫小扰动 (4.4 节), 对区间 $\left[\frac{\omega_1}{2\pi}, \frac{\omega_2}{2\pi}\right]$ 中的每一个有理数 $\nu = \frac{M}{N}$, 我们有 (见图 11.7.1) 从点 $(\mu = 0, \omega = \frac{2\pi M}{N})$ 出发的共振区域. 每一个共振区域对应于环面上具有频率 $M : N$ 的周期轨线的存在性. 如果 ν 是所给区间内的无理数, 则存在从点 $(\mu = 0, \omega = 2\pi\nu)$ 出发的 Lipschitz 曲线 $\omega = h(\mu)$, 它对应于具有频率比 ν 的拟周期机制.

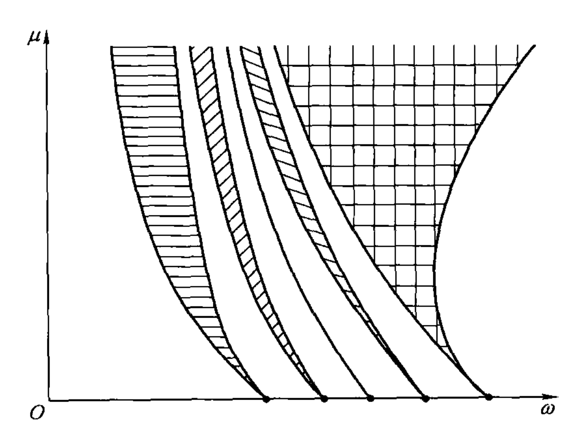


图 11.7.1 μ 对频率 ω 的图像说明从 ω 的有理值出发的共振楔.

当 μ 足够小时我们详细考虑在共振区域内会出现什么情况. 选择某个 $\omega_0 = \frac{2\pi M}{N}$ 并将映射化为直到 $N-1$ 次项的规范形. 假设 μ 值小且 ω 接近于 ω_0, 我们可以推导类似于公式 (10.4.19) 的表达式:

$$\bar{w} = (1+\mu)e^{i\omega}\left(w\left(1 + \sum_{p\geqslant 1}^{2p\leqslant N-2} C'_{p+1,p}|w|^{2p}\right) + C'_{0,N-1}(w^*)^{N-1}\right) + o(|w|^{N-1}), \tag{11.7.4}$$

其中 $w = x_1 + ix_2$. 在极坐标下上面映射可写为

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1+\mu)(R + L_1R^3 + \cdots + L_PR^{2P+1} + AR^{N-1}\cos(N\varphi+\alpha)) + o(R^{N-1}),\\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega + \Omega_1R^2 + \cdots + \Omega_pR^{2P} - AR^{N-2}\sin(N\varphi+\alpha) + o(R^{N-2}),\end{aligned} \tag{11.7.5}$$

其中 $C'_{0,N-1} = Ae^{i\alpha}$, P 是不超过 $\left[\left(\frac{N}{2}\right) - 1\right]$ 的最大整数, L_i 和 Ω_i 是 μ 和 ω 的光滑函数.

定理 11.5 设 $L_1 \neq 0$ 和 $A \neq 0$. 则对小的 μ 对应于旋转数 $\frac{M}{N}$ 的共振区域的形状是宽为 $|\mu|^{(N-2)/2}$ 阶的楔形, 它在点 $(\mu = 0, \omega = \omega_0)$ 与直线 $\omega = \omega_0 + \frac{\mu\Omega_1}{L_1}$ 相切. 如果 μ 充分地小, 则映射在楔内恰有两条周期为 N 的轨道: 一条是鞍点型, 另一条当 $L_1 < 0$ 时稳定, 或者 $L_1 > 0$ 时不稳定 ($N = 5$ 时, 见图 11.7.2(a), 11.7.3(a)).

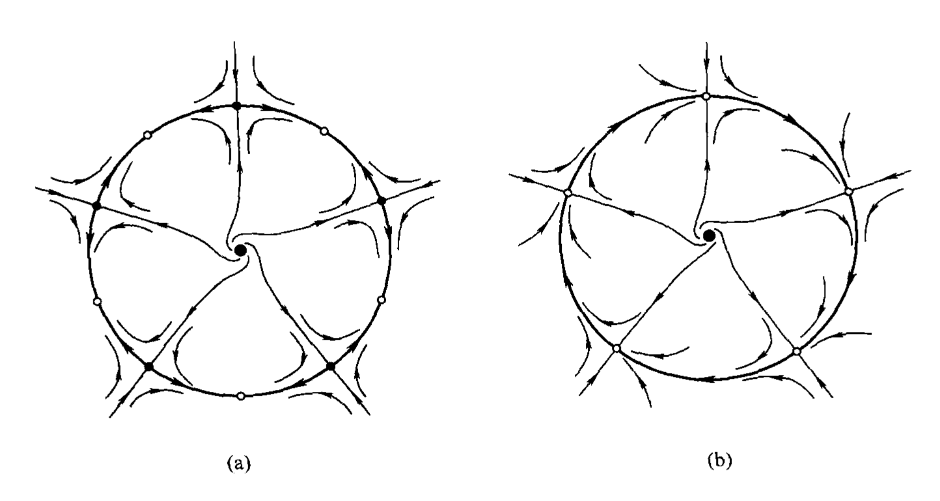


图 11.7.2 稳定共振环面上有 5 对周期轨道的例子. 当周期轨道成对重合并消失时环面变成非共振.

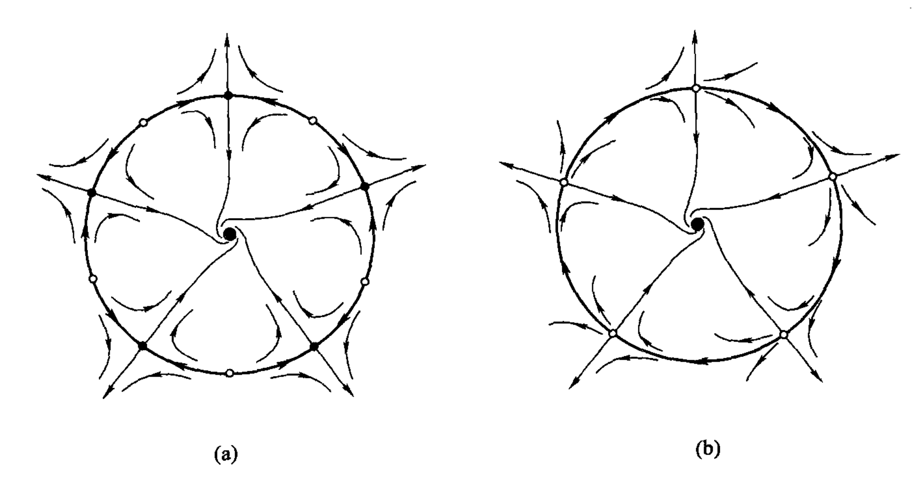


图 11.7.3 在共振区域内 (a) 和在它的边界上 (b) 有 5 对周期轨道的不稳定环面的例子.

证明 为确定起见, 假设第一个 Lyapunov 量 L_1 是负的. 于是当 $\mu > 0$ 时存在不变曲线. 与点 $(\mu = 0, \omega = \omega_0)$ 连接的共振区域对应于周期 N 的周期轨道. 为了求这些轨道, 让我们推导映射 (11.7.5) 的 N 次迭代

$$\bar{R} = (1+\mu)^N (R + \tilde{L}_1 R^3 + \cdots + \tilde{L}_P R^{2P+1} + NAR^{N-1}\cos(N\varphi+\alpha)) + o(R^{N-1}),$$
$$\bar{\varphi} = \varphi + N\omega + \tilde{\Omega}_1 R^2 + \cdots + \tilde{\Omega}_P R^{2P} - NAR^{N-2}\sin(N\varphi+\alpha) + o(R^{N-2}), \tag{11.7.6}$$

其中 $o(R^{N-1})$ 和 $o(R^{N-2})$ 分别表示当 $\mu \to 0, \omega \to \omega_0$ 和 $R \to 0$ 时趋于零的速度快于 R^{N-1} 和 R^{N-2} 的项, $\tilde{L}_i$ 和 $\tilde{\Omega}_i$ 分别表示 $\{L_1, \cdots, L_i\}$ 和 $\{\Omega_1, \cdots, \Omega_i\}$ 的某函数.

特别地,

$$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1(1+(1+\mu)^2+\cdots+(1+\mu)^{2(N-1)}) = N\Omega_1(1+O(\mu)),$$
$$\tilde{L}_1 = L_1(1+(1+\mu)^2+\cdots+(1+\mu)^{2(N-1)}) = NL_1(1+O(\mu)) < 0.$$

映射 (11.7.6) 的不动点由条件

$$\bar{R} = R, \tag{11.7.7}$$
$$\bar{\varphi} = \varphi \quad \mathrm{mod}\ 2\pi \tag{11.7.8}$$

确定. 由 (11.7.6) 我们求得下面定义不动点坐标的方程:

$$R = \Psi(\mu,\omega) + \frac{A}{2|L_1|}\left(\sqrt{\frac{\mu}{|L_1|}}\right)^{N-3}\cos(N\varphi+\alpha) + o(\mu^{(N-3)/2}),$$

其中 $\Psi = \sqrt{\dfrac{\mu}{|L_1|}} + o(\sqrt{\mu})$ 不依赖于 φ. 将这个表达式代入 (11.7.8), 我们得到

$$\begin{aligned} &N\omega + \tilde{\Omega}_1\Psi^2 + \cdots + \tilde{\Omega}_P\Psi^{2P} \\ &= \frac{NA}{|L_1|}\left(\sqrt{\frac{\mu}{|L_1|}}\right)^{N-2}(\Omega_1\cos(N\varphi+\alpha) + L_1\sin(N\varphi+\alpha)) + o(\mu^{(N-2)/2})\ \mathrm{mod}\ 2\pi. \end{aligned}$$

由于 ω 接近于 ω_0, 可得知 $N\omega$ 接近于 $2\pi M$, 因此最后一个方程可写为

$$\delta = D\mu^{(N-2)/2}\sin(N\varphi+\gamma) + o(\mu^{(N-2)/2}), \tag{11.7.9}$$

其中

$$\begin{aligned} &D = \frac{A\sqrt{L_1^2+\Omega_1^2}}{|L_1|^{N/2}}, \quad \gamma = \alpha + \pi - \arctan\left|\frac{\Omega_1}{L_1}\right|, \\ &\delta = \omega - \frac{2\pi M}{N} + \frac{(\tilde{\Omega}_1\Psi^2+\cdots+\tilde{\Omega}_P\Psi^{2P})}{N} = \omega - \omega_0 + \frac{\mu\Omega_1}{|L_1|} + o(\mu). \end{aligned} \tag{11.7.10}$$

由于由假设 $A \neq 0$, (11.7.9) 中的 D 不为零. 在这个假设下, 如果 μ 充分小, 则方程 (11.7.10) 容易分析. 事实上, 对小的 μ 这个方程的右端在区间 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 内恰有 N 个极大点和 N 个极小点. 因此这个方程不可能有多于 $2N$ 个根. 另一方面, 这个方程定义映射 (11.7.5) 的周期 N 轨道: 每一个这样的轨道恰好给出方程 (11.7.9) 的 N 个根. 由此得知根的个数必须是 N 的倍数. 因此, 或者方程没有根 (这时值 δ 大于右端的极大值或者小于右端的极小值), 或者如果 δ 在极大值和极小值之间, 则方程有 $2N$ 个根; 或者如果 δ 等于极大值或极小值, 则它有 N 个根 (右端所有极大 (极小) 值在这个临界情形下都相等).

令 δ 等于 (11.7.9) 右端的极大值然后再等于它的极小值, 我们得到当 (μ, ω) 属于某曲线 K_1 和 K_2

$$\delta = \pm D\mu^{(N-2)/2} + o(\mu^{(N-2)/2}) \tag{11.7.11}$$

时出现临界情形. 由 (11.7.10) 得知这两条曲线都切于直线 $\omega = \omega_0 - \frac{\mu\Omega_1}{|L_1|}$. 它们界定宽为 $2D\mu^{(N-2)/2}$ 阶的楔.

对在这个楔外的参数值方程 (11.7.9) 没有解, 但在楔的内部它恰有 $2N$ 个解:

$$N\varphi + \gamma = 2\pi n + \arcsin\left(\frac{\delta}{D\mu^{(N-2)/2}}\right) + \cdots \tag{11.7.12}$$

和

$$N\varphi + \gamma = 2\pi n + \pi - \arcsin\left(\frac{\delta}{D\mu^{(N-2)/2}}\right) + \cdots \tag{11.7.13}$$

(其中 $n = 0, \cdots, N-1$). 这些解对应映射 (11.7.6) 的不动点. 由于映射 (11.7.6) 的 N 个不动点对应一条周期 N 的轨道, 可得知在楔内映射恰有两条周期 N 的轨道: 一条由公式 (11.7.12) 定义, 另一条由 (11.7.13) 定义.

微分 (11.7.6), 我们得到这些轨道的乘子:

$$\rho_1 = 1 - 2\mu N + o(\mu) < 1,$$

$$\rho_2 = 1 - \frac{AN^2}{|L_1|}\left(\sqrt{\frac{\mu}{|L_1|}}\right)^{N-2} \sqrt{L_1^2 + \Omega_1^2}\cos(N\varphi + \gamma) + o\left(\mu^{(N-2)/2}\right).$$

注意轨线 (11.7.12) 稳定, 而轨线 (11.7.13) 是鞍点型的.

我们已经得到了定理 11.5 论述的完全对应. 情形 $L_1 > 0$ 可用类似方法考虑. 证明完毕.

注意, 出现在共振楔 (有时候称 "Arnold 舌") 内部的鞍点和结点位于不变曲线上 ($L_1 < 0$ 时稳定, $L_1 > 0$ 时不稳定). 由于仅有的可通过鞍点的稳定不变曲线是它的不稳定流形, 又由于仅有的可通过鞍点的不稳定曲线是它的稳定流形, 因此在共振区域内不变曲线是终止在结点的鞍点分界线 (若 $L_1 < 0$ 则是不稳定分界线, $L_1 > 0$ 则是稳定分界线) 的并.[7]

在界定共振楔的曲线 (11.7.11) 上, 鞍点和不稳定周期轨道结合. 这时每一个鞍 - 结点的分界线 ($L_1 > 0$ 时吸引, $L_1 < 0$ 时排斥) 趋于邻近的鞍 - 结点, 它们一起组成不变曲线, 如图 11.7.2 和图 11.7.3 所示. 离开共振楔所有的鞍 - 结点消失, 不变曲线保持但旋转数不再等于 $2\pi M/N$.

在共振楔内部所有在不变环面上的轨线趋于稳定周期轨道, 这意味着这里的控制机制是周期的. 在共振楔的外部, 在环面上建立的或者是拟周期机制或者是周期非常长的周期机制. 两者 "在实际上" 是不可区分的. 因此, 穿过共振楔的边界可解

[7]注意, 在每个结点附近不变曲线与它的主流形重合. 由此得知, 一般来讲, 不变曲线具有有限光滑性.

释为从同步机制向“拍频”调制过渡. 这个现象的解释首先由 Andronov 和 Vitt 在“平均法”的框架下给出, 他们是在研究与探测在外力作用下的 van der Pol 方程

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+\omega_0^2x=\mu A\sin\omega t$$

的同步区域密切相关的问题时提出的, 其中 $\mu \ll 1$ 以及 $\omega_0-\omega\sim\mu$ (详情见 12.1 节).

当 μ 在共振区域内增加时, 其它具有相同旋转数 M/N 的周期轨道可能也会出现. 在某些情况下, 共振区域的边界在某些点可能失去光滑性, 如图 11.7.4 显示的例子: 这里共振区域是由两个区域 D_1 和 D_2 的并组成, 它们分别对应于环面上存在一对和两对周期轨道. 图 11.7.4 中的点 C_1 和 C_2 对应尖分支. 在对应于存在一对鞍 - 结点周期轨道的点 S 处, 共振区域的边界是不光滑的.

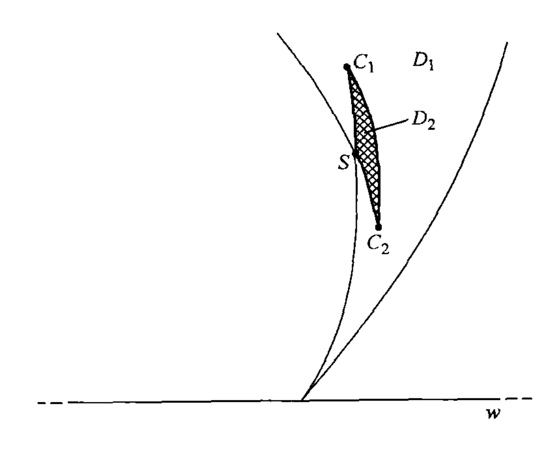


图 11.7.4　远离临界阈值的共振区域边界附近周期轨道的稳定性区域的局部结构概图.

当 μ 小时定理 11.5 阻止了上述性态. 但是, 越过了极端临界性的值定理不再成立, 这时不同共振区域的情况是不同的. 此外, 当旋转数的分母 N 增加 (即当旋转数的值趋于无理数) 时它可趋于零.

事实上, 通过给定的分支从光滑映射不动点可产生的周期轨道的数目没有公共的上界. 如果映射的光滑次数 r 有限, 这个上界估计的不存在性是显然的, 因为由上一个定理的证明得知要估计在共振区域 $\nu=M/N$ 内周期轨道的数目, 映射必须化为含有直到 $(N-1)$ 阶项的规范形. 在这种情形下映射的光滑性必须不小于 $(N-1)$. 因此, 如果光滑性有限我们只能估计有限个共振区域.

对无穷光滑映射, 下面的定理给出类似的结果.

定理 11.6　设光滑环域映射具有光滑不变曲线, 且设在不变曲线上的旋转数是无理数. 则任意小的光滑扰动可产生无穷多条周期轨道.

证明　在环域上引入角变量 φ 和径向变量 R 作为坐标. 我们总可以选择坐标

使得不变曲线变成圆周 $R=1$, 因此映射取形式

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1-R)F(R,\varphi),\\ \bar{\varphi} &= \varphi+g(\varphi)+(1-R)G(R,\varphi) \mod 2\pi.\end{aligned} \tag{11.7.14}$$

将这个映射嵌入族

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1-R)F(R,\varphi),\\ \bar{\varphi} &= \delta+\varphi+g(\varphi)+(1-R)G(R,\varphi) \mod 2\pi,\end{aligned} \tag{11.7.15}$$

其中 δ 是小参数. 由于圆周 $R=1$ 对所有 δ 保持不变, 映射在其上有形式

$$\bar{\varphi} = \delta+\varphi+g(\varphi) \mod 2\pi. \tag{11.7.16}$$

由于在 $\delta=0$ 旋转数是无理数, 又因为 $\partial\bar{\varphi}/\partial\varphi>0$, 故 (见 4.4 节) 在 $\delta=0$ 映射 (11.7.16) 的旋转数 ν 是 δ 的严格单调函数. 这意味着当 δ 变化时值 $\nu(\delta)$ 取接近于 $\nu(0)$ 的所有值.

选择 δ 足够地小使得旋转数 $\nu(\delta)$ 是无理数, 且不能用"短"有理数很好地近似. 我们将利用由 Hermann [68] 证明的下面结果:

如果圆周映射的旋转数是无理数且不被有理数很好地近似, 那么存在光滑的变量变换将映射变为旋转一个常数角度的映射:

$$\bar{\varphi} = \varphi+2\pi\nu \mod 2\pi.$$

如果对映射 (11.7.15) 的 φ 变量作了这样的变换 (不对 R 进行), 则在新变量下这个映射取形式

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1-R)\tilde{F}(R,\varphi),\\ \bar{\varphi} &= 2\pi\nu+\varphi+(1-R)\tilde{G}(R,\varphi) \mod 2\pi.\end{aligned} \tag{11.7.17}$$

因此, 通过对原映射 (11.7.14) 的小扰动, 我们可以将不变圆周的映射变换成 (在某些新变量下) 一个常数角度的旋转. 如果我们在 (11.7.17) 中改变一点点 ν 值使得它变成有理数 $\nu=\dfrac{M}{N}$, 则在圆周 $R=1$ 上映射变成

$$\bar{\varphi} = \varphi+\frac{2\pi M}{N} \mod 2\pi,$$

这个映射的 N 次迭代是

$$\bar{\varphi} = \varphi+2\pi M \mod 2\pi.$$

这一个恰好是恒同映射, 所有点都是它的不动点, 即我们在这里有无穷多个周期轨道. 回忆 (11.7.17) 是原映射的小扰动, 定理得证.

注意到如果圆周映射的 N 次迭代是恒同映射, 则在圆周上的所有点是乘子等于 1 的结构不稳定点. 此外, 每一点的所有 Lyapunov 量等于零. 这是一个无穷退化的情形. 我们在 11.3 节已经看到为了研究前面 $k-1$ 个 Lyapunov 量为零的结构不稳定周期轨道的分支, 必须至少考虑 k - 参数族. 现在清楚的是为了在这种情形下研究分支, 我们必须引入无穷多个参数. 此外, 由定理 11.5 的证明看到这样的映射可用具有无理数旋转数的任意圆周映射的小扰动来得到. 因此, 我们可以得出结论, 用具有周期轨线分支的有限个参数的映射的完全描述去接近具无理数旋转数的圆周映射是不现实的.

因此, 产生不变环面的分支与上几节讨论的其它分支有着很大的不同. 这里, 通过分支点的有限参数族的任意小变化总可以改变分支集合的结构. 此外, 增加控制参数的个数仅使得分支有更高的退化性: 在双参数族中这样的退化点是在共振区域边界上的尖点和 "破裂" 点 (见图 11.7.4). 在三维参数族中它们是燕尾等等.

最后, 我们指出, 在由平衡态产生环的分支与由周期轨道产生二维不变环面的分支之间有着明显的类似. 我们甚至可以进一步想象接下来的从二维环面产生三维环面分支, 从三维环面产生四维环面等等. 原则上具有稳定平衡态的动力系统可发展如下: 当参数变化时通过超临界 ($L_1 < 0$) Andronov-Hopf 分支平衡态失去它的稳定性, 使得从它分支出稳定周期轨道, 即驻定机制由周期机制代替. 接下来当参数进一步变化时, 周期轨道再次失去它的稳定性并出现二频率机制 (二维环面上的拟周期轨线), 接着轮到它再失去并转变它的稳定性而过渡到三频率机制, 等等. 不久前这样的复杂动力学中的相继发展景象 (Landau-Hopf 景象) 作为湍流发展的可能机制被提出来, 其中适当发展的湍流过程解释为具有独立频率的偌大集合的拟周期运动. 但是, 这样的分支序列事实上是远非典型的. 这种稀有情况可用在不同分支道路中涉及的平衡态或者周期轨道总表示为 "孤立" 的单个轨线来解释. 这不再是不变环面的情形. 例如在共振区域内环面上至少存在两个周期轨道, 一个鞍点型和一个稳定轨道. 因此, 我们必须有某些附加的特殊条件使得它们可同时分支产生出一个三维环面.

实际上, 类似的分支链通常终止于二 (少数是三) 频率机制, 当参数变化时它转变成具有连续频率谱的混沌机制. 在相空间这种混沌情况是通过下面几个步骤产生 [7]: Poincaré 映射的不变曲线首先变成不光滑, 然后 "消失"(见图 11.7.5, 其中不变曲线的消失伴随着同宿轨线的出现, 即鞍点周期轨道的稳定和不稳定流形的相交). 一旦不变曲线消失, 在相空间中它的位置被含有可数多条旋转数在某个区间内的周期轨道的非平凡集填补. 在参数平面中这出现在这样的区域内部, 那里共振区域彼此交叠, 如图 11.7.6 所示. 注意, 在非共振或者弱共振情形, 共振区域的交叠出现在极端临界性的有限个值上, 即远离原来的环面分支. 另一方面, 共振区域的交叠可出现在刚刚环面分支以后的强共振 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ 和 $\omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$ 附近, 即共振区域甚至可对任意小的 μ 就开始交叠.

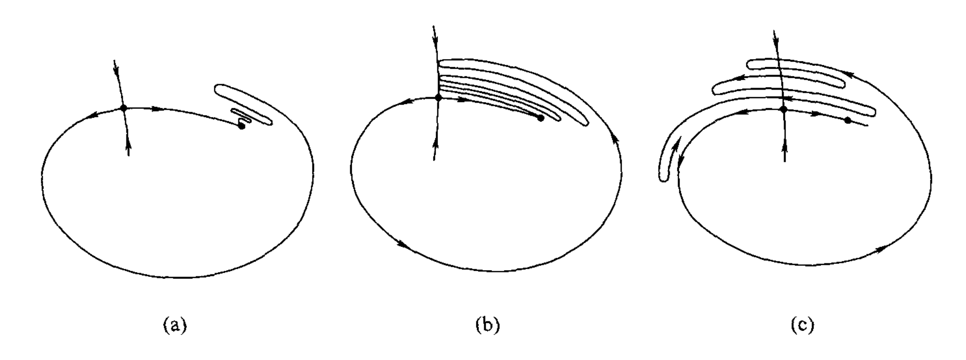


图 11.7.5 二维环面由于失去光滑性而分裂的典型景象.

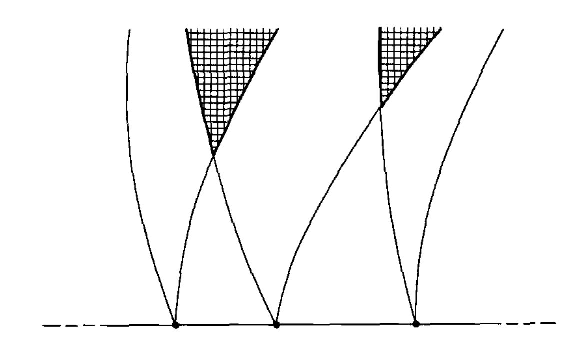


图 11.7.6 当 μ 增加到有限值时, 图 11.7.1 中的共振区域可交叠.

第 12 章　鞍 – 结点平衡态和周期轨道消失时的大范围分支

我们已经注意到, 自治系统中周期轨道失去稳定性的问题不可能总化为 Poincaré 映射不动点的分支研究. 也可能在稳定性边界上周期轨道并不存在, 因此 Poincaré 映射在临界参数值没有定义.

为了研究这样的分支, 我们应该了解当接近稳定性边界时周期轨道变化的极限集的结构. 特别, 这样的极限集可以是鞍点的或鞍 – 结点平衡态的同宿回路. 在另一个分支景象中 (称为 "蓝天突变") 周期轨道趋于由鞍 – 结点周期轨道的同宿轨道组成的集合. 这一章我们考虑鞍 – 结点平衡态和周期轨道消失时相应的同宿分支. 注意, 我们并不将我们的注意力仅限于周期轨道稳定性边界的问题, 也将考虑二维不变环面和 Klein 瓶的产生, 以及简短地讨论它们通向混沌的道路.

12.1　鞍 – 结点平衡态的同宿回路分支

考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ 中 $\mathbb{C}^r$ $(r \geqslant 2)$ – 光滑动力系统的单参数族. 假设当参数为零时系统在原点有非粗平衡态, 它的一个特征指数等于零, 其余 n 个指数位于虚轴的左边. 我们还假设平衡态是简单鞍 – 结点, 即第一个 Lyapunov 量 l_2 不为零 (见 11.2 节). 不失一般性, 假设 $l_2 > 0$.

我们还假设这个族与具有简单鞍 – 结点的系统的曲面横截相交. 因此在原点附近这个系统可写为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu + l_2 x^2 + G(x, \mu),\\ \dot{y} &= [A + h(x, y, \mu)]y\end{aligned} \tag{12.1.1}$$

(见 11.2 节公式 (11.2.2) 和 (11.2.12)), 其中 μ 是数量参数, $x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^n$. $G = o(x^2)$ 关于 x 是 $\mathbb{C}^r$ 类的, 关于 μ 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ 类的, h 是在 $(x=0, y=0, \mu=0)$ 为零的 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 光滑函数, 矩阵 A 的特征值严格位于虚轴的左边.

从 11.2 节回忆, 在 $\mu = 0$ 系统 (12.1.1) 的原点邻域被用方程 $x = 0$ 局部定义的非主流形 W^{ss} 划分为两个区域: 结点区域和鞍点区域. 在结点区域内的所有轨线当 $t \to +\infty$ 时都收敛于点 O. 在鞍点区域内的所有轨线除了一个以外当 $t \to \pm\infty$ 时都离开原点的邻域. 当 $t \to -\infty$ 时进入 O 的这单条轨线是不稳定分界线 Γ. 当 t 增加时 Γ 也离开 O 的邻域.

假设当 t 进一步增加时, 分界线 Γ 从结点区域回到鞍 – 结点 O 的邻域, 如图 12.1.1 (b) 所示.

由我们的假设得知, Γ 双向渐近趋于 O, 即当 $t \to \pm\infty$ 时趋于 O. 换句话说, 轨线 Γ **同宿**于 O. 并 $\Gamma \bigcup O$ 是闭曲线, 称它为鞍 – 结点**同宿回路**.

我们将在下面证明, 可以选择同宿回路的小邻域 V, 使得对所有小的 μ, V 中点的向前轨线将永远停留在那里. 此外, 在 $\mu = 0$, V 中的所有轨线当 t 增加时都进入结点区域, 且在极限 $t \to +\infty$ 时它们都收敛于鞍 – 结点.

当 $\mu < 0$ 时, 鞍 – 结点分解为鞍点 $O_1\,(x = x^+(\mu), y = 0)$ 和结点 $O_2\,(x = x^-(\mu), y = 0)$, 其中 $x^\pm \sim \pm\sqrt{\dfrac{|\mu|}{l_2}}$ (见 11.2 节). 鞍点的稳定不变流形 $W^s_{O_1}$ 由方程 $x = x^+$ 局部定义. 不稳定流形 $W^u_{O_1}$ 由方程 $y = 0$ 局部定义. 点 O_1 将不稳定流形分为两条分界线, 一条整个地位于原点的邻域内 (它是连接点 O_1 和 O_2 的轴 $y = 0$ 的线段). 另一条分界线从这个邻域跑出. 由关于参数的连续依赖性, 分界线沿着回路 Γ 从结点 O_2 这一边回到原点. 显然 V 中的所有轨线除了在鞍点 O_1 的稳定流形 $W^s_{O_1}$ 中的轨线以外都收敛于 O_2, 如图 12.1.1(a) 所示. $\mu > 0$ 时的轨线性态由下面定理描述.

定理 12.1 具有同宿回路的鞍 – 结点平衡态的消失导致产生周期为 $\sim \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu l_2}}$ 的稳定周期轨道 L_μ, 它吸引 V 中的所有轨线 (见图 12.1.1(c)).

证明 我们构造两个与系统轨线横截的截面 (图 12.1.2)

$$S_0 : x = -d, \quad \|y\| \leqslant d$$

和

$$S_1 : x = d, \quad \|y\| \leqslant d,$$

其中 d 选择适当小, 使得在 $\mu = 0$, 回到点 O 的分界线 Γ 与 S_0 相交 (这总可以办到, 因为 Γ 进入 O 时与轴 $y = 0$ 相切).

由连续性, 所有从 S_1 上充分接近 Γ 与 S_1 的交点 $M_1\ (x = d, y = 0)$ 处出发的轨线回到原点的邻域, 并在点 $M_0 = \Gamma \bigcap S_0$ 附近与 S_0 相遇. 选择小 $\delta > 0$, 并构造由从 S_1 上满足 $|y| \leqslant \delta$ 的点出发并终止于 S_0 的轨线段组成的管子 V_1. 考虑由 V_1 和被

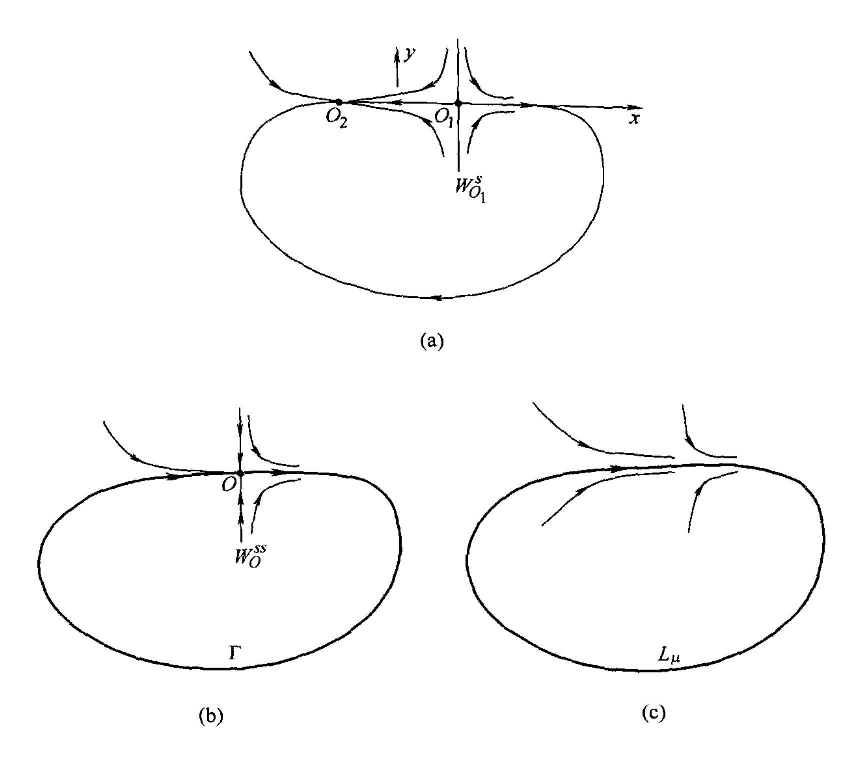


图 12.1.1　具有同宿轨线的鞍 - 结点平衡态的分支次序: (a) 在分支前, (b) 在分支上, (c) 在分支后.

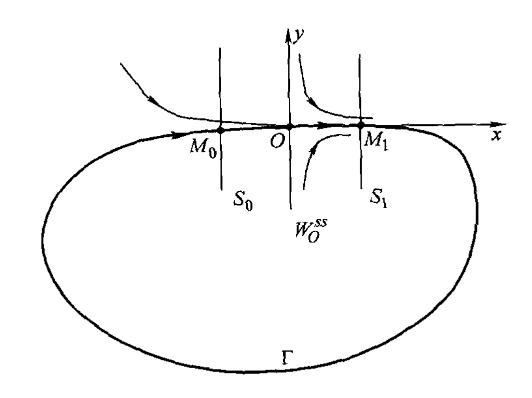


图 12.1.2　在鞍 - 结点平衡态 O 附近选择两个与同宿回路 Γ 横截的截面 S_0 和 S_1.

曲面 $S_0,S_1 \bigcap\{\|y\| \leqslant \delta\}$ 以及 $\left\{|x| \leqslant d, \|y\| = d - \dfrac{(x+d)(d-\delta)}{2d}\right\}$ 围成的锥台 V_0 组成的集合 V, 如图 12.1.3 所示. 我们假设引入的 y 坐标使得 (12.1.1) 中的矩阵 A 是 Jordan 型, 此外, 对角线以外的元素如果存在则都充分小. 如果 d 小, 则 (12.1.1) 中的函数 h 在 V_0 的其它处也充分小. 因此对 V_0 中的轨线下面的估计成立:

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\| \leqslant -\lambda\|y(t)\|, \tag{12.1.2}$$

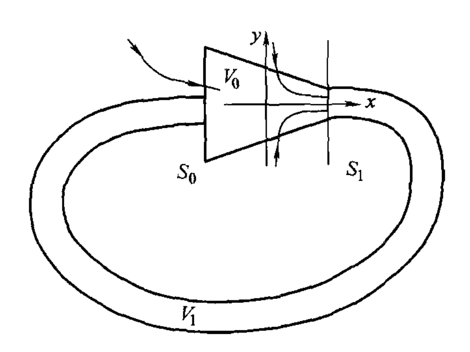


图 12.1.3 由于沿着 W^{ss}(y – 方向) 强压缩, 对所有小 μ, 鞍 – 结点附近的轨线离开通过截面 S_1 的锥台 V_0. 因此, V_0 和管子 V_1(由从 S_1 开始的整个轨道段组成) 的并界定从附近开始的所有向前半轨道.

其中 $0<\lambda<\max|\operatorname{Re}\lambda_j|$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值 (见定理 2.4). 应用 (12.1.2) 可以证明如果 δ 足够小, 则对所有小 μ, 系统 (12.1.1) 的向量场在 V_0 的边界上的每一点处或者指向 V_0 的内部, 或者 (在 S_1 上) 指向 V_1 的内部. 由于 V_1 由整条轨线组成, 系统的向量场与 V_1 的边界处处相切. 于是, 在边界的每一点向量场或者与边界相切地接触, 或者指向 V 的内部. 因此所有从 V 附近出发的轨线必须进入 V 而永不离开它.

$\dot{x}$ 的值对 $\mu>0$ 在 V_0 内无处为零. 因此从 S_0 开始的任何轨线当时间增加时必须到达 S_1. 然后将进入管子 V_1 并回到 V_0. 由此得知映射 $T:S_0\to S_0$ 对所有小 $\mu>0$ 有定义: 这个映射是沿着系统轨线的映射 $T_0:S_0\to S_1$ 和 $T_1:S_1\to S_0$ 这两个映射的叠加. 我们将称 T_0 为**局部** (直通) **映射**, T_1 为**大范围映射**.

设 y_0 为 S_0 上的坐标, y_1 为 S_1 上的坐标. 显然大范围映射对所有 (不必是正的) 小 μ 有定义. 由于从 S_1 到 S_0 的飞行时间有限, T_1y_1 关于 y_1 的导数对所有小 μ 都保持有界.

我们证明局部映射是压缩映射, 且当 $\mu\to0$ 时这个压缩变得无限强. 设 $\{x(t;\mu), y(t;y_0,\mu)\}$ 是系统 (12.1.1) 在 $t=0$ 时通过 S_0 上的点 $(x=-d,y_0)$ 的轨线. 注意由于 (12.1.1) 中的 $\dot{x}$ 不依赖于 y, 可得知 $x(t,\mu)$ 也不依赖于 y_0. 因此由条件

$$x(t^*;\mu)=d \tag{12.1.3}$$

定义的从 S_0 到 S_1 的飞行时间 t^* 仅是 μ 的函数. 在 $\mu=0$, 任何从 S_0 出发的轨线都趋于鞍 – 结点, 即它停留在 V_0 内无限长时间. 因此, 当 $\mu\to+0$ 时 $t^*(\mu)$ 趋于无穷.

为了对 t^* 得到更精确的估计, 我们指出由 (12.1.1) 和 (12.1.3) 得

$$t^*=\int_{-d}^{+d}\frac{dx}{\mu+l_2x^2+o(x^2)},$$

由此得

$$t^*(\mu) = \frac{\pi}{\sqrt{\mu l_2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right). \tag{12.1.4}$$

映射 T_0 由公式

$$T_0 : y \mapsto y(t^*(\mu); y_0, \mu) \tag{12.1.5}$$

定义.

我们证明

$$\left\|\frac{\partial y}{\partial y_0}\right\| \leqslant e^{-\lambda t^*}. \tag{12.1.6}$$

事实上, 微分 (12.1.1) 我们得到

$$\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y_0} = [A + h(x(t), y(t), \mu) + h'_y(x(t), y(t), \mu)y(t)]\frac{\partial y(t)}{\partial y_0}.$$

由于 h 和 $h'_y y$ 在 V_0 内各处都小, 又因为 A 为非对角线元素都很小的 Jordan 形, 我们有类似于 (12.1.2) 的估计:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial y}{\partial y_0}\right\| \leqslant -\lambda\left\|\frac{\partial y}{\partial y_0}\right\|.$$

积分最后这个不等式得到

$$\left\|\frac{\partial y}{\partial y_0}\right\| \leqslant e^{-\lambda t}\left\|\frac{\partial y}{\partial y_0}\right\|_{t=0},$$

或者, 由于 $(\partial y/\partial y_0)|_{t=0}$ 是恒同矩阵, 我们有

$$\left\|\frac{\partial y}{\partial y_0}\right\| \leqslant e^{-\lambda t}.$$

利用变换 $t = t^*(\mu)$, 得到映射 (12.1.5) 的不等式 (12.1.6). 由于 $\mu \to 0$ 时 $t^* \to \infty$, 这个不等式意味着当 μ 小时映射 T_0 是强压缩.

由于局部映射的压缩性可使得任意强而大范围映射的导数有界, 叠加映射 $T = T_0 \circ T_1$ 对所有小的 μ 也继承了局部映射的压缩. 于是由 Banach 压缩映射原理 (3.15 节) 得知, 映射 T 在 S_0 上有唯一稳定不动点. 由于这个映射是沿着系统轨线定义的, 故系统在 V 中有稳定周期轨道, 它吸引 V 中的所有轨线. 这个轨道的周期是两个时间的相加: 从 S_0 到 S_1 局部转移的 "停留" 时间 t^* 和从 S_1 到 S_0 的飞行时间. 后者对所有小 μ 总是有限. 现在由 (12.1.4) 得知稳定周期轨道的周期以阶 $\sim \pi/\sqrt{\mu l_2}$ 渐近地增加. 这就完成了证明.

定理 12.1 的证明也可以用到退化鞍 – 结点的情形:[1] 事实上在证明中我们没有地方用到 $l_2 \neq 0$. 仅仅用到一个重要性质, 那就是当趋于稳定性边界时从一个截面

[1] 在包含的所依赖的参数不是一个而是多个的这种情形下, 环周期的渐近关系式是不同的.

到另一个截面的转移时间无限地增加，而这可从在边界自身上所有从 S_0 开始的轨线都收敛于鞍－结点，因此停留在 V_0 内的时间必须无限长这事实得知. 具有同宿回路的退化鞍－结点的分支图与它对局部分支 (例如在情形 $l_4 \neq 0$ 时，这是**燕尾**，如图 11.2.14 所示) 的相同，那里稳定周期轨道出现在区域 D_0 内.

鞍－结点同宿回路的极限环分支首先是由 Andronov 和 Vitt 在他们研究具有小周期外力在 1:1 共振的 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t \tag{12.1.7}$$

时发现的，其中 $\mu \ll 1$ 且 $|\omega_0 - \omega| \sim \mu$ (在 $\mu = 0$ 这个方程描述频率为 ω_0 的调和振子，在零频率去谐，这正是 1:1 共振). 在极坐标 $(R\cos\varphi = \omega_0 x, R\sin\varphi = \dot{x})$ 下方程 (12.1.7) 有形式

$$\begin{aligned}
\dot{R} &= \mu \sin\varphi \left(A \sin\omega t - R\left(1 - \frac{R^2\cos^2\varphi}{\omega_0^2}\right)\sin\varphi \right), \\
\dot{\varphi} &= -\omega_0 + \mu\cos\varphi\left(\frac{A}{R}\sin\omega t - \left(1 - \frac{R^2\cos^2\varphi}{\omega_0^2}\right)\sin\varphi\right).
\end{aligned}$$

令 $\Phi = \varphi + \omega t$. 再作时间变量变换 $t \to \dfrac{t}{\mu}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\dot{R} &= \frac{A}{2}\cos\left(\Phi - \frac{2\omega t}{\mu}\right) - \frac{A}{2}\cos\Phi \\
&\quad - R\left(1 - \frac{R^2}{\omega_0^2}\cos^2\left(\Phi - \frac{\omega t}{\mu}\right)\right)\sin^2\left(\Phi - \frac{\omega t}{\mu}\right), \\
\dot{\Phi} &= -\delta + \frac{A}{2R}\sin\Phi - \frac{A}{2R}\sin\left(\Phi - \frac{2\omega t}{\mu}\right) \\
&\quad - \left(1 - \frac{R^2}{\omega_0^2}\cos^2\left(\Phi - \frac{\omega t}{\mu}\right)\right)\sin\left(\Phi - \frac{\omega t}{\mu}\right)\cos\left(\Phi - \frac{\omega t}{\mu}\right),
\end{aligned} \tag{12.1.8}$$

其中 $\delta = \dfrac{\omega_0 - \omega}{\mu}$ 是由小参数标准化的去谐频率.

Andronov 和 Vitt 分析了平均系统

$$\begin{aligned}
\dot{R} &= -\frac{A}{2}\cos\Phi - \frac{R}{2}\left(1 - \frac{R^2}{4\omega_0^2}\right), \\
\dot{\Phi} &= -\delta + \frac{A}{2R}\sin\Phi,
\end{aligned} \tag{12.1.9}$$

这个系统是由 (12.1.8) 用它们的平均量代替 (频率 $\geqslant \dfrac{\omega}{\mu}$ 的) 快振动项得到的. 当 $A = 0$ 时这个系统容易分析：它有在原点的排斥平衡态，并且所有轨线都趋于稳定极限环 $R = 2\omega_0$；在 $\delta = 0$ 极限环退化为单个由平衡态稠密充满的不变圆周. 对小 $A > 0$，排斥平衡态保持，但在这个圆周上所有其它点中只有两点保持：它们是鞍点

和结点, 两者都存在于区域 $D: 4|\delta|\omega_0 < A$ 内. 由展为 A 的幂级数, 可以证明对小的 A 系统仍有围绕原点的不变曲线: 在共振区域 D 之外不变曲线是极限环, 在 D 内它由走向稳定结点的鞍点分界线连接所组成. 在区域 D 的边界上系统有具有分界线回路的鞍 – 结点.

借助于原来变量 $\varphi = \Phi - \omega t$, Φ 的驻定值 (系统 (12.1.9) 的平衡态) 对应于与外力频率相同的振动机制. Φ 的周期振动 ((12.1.9) 中的极限环) 对应于二频率机制. 因此, 从鞍 – 结点同宿回路的极限环的上述分支景象刻画了方程 (12.1.7) 中从同步化到拍频调制的对应路径.

这个分支对二阶系统的推广是由 Andronov 和 Leontovich 研究的. 他们的证明本质上用到平面系统的特征. 我们对定理 12.1 的证明接近于 L.Shilnikov 在 [130] 中对高维情形的建议, 其差别是我们将在原点附近的系统化为形式 (12.1.1) 从而简化了计算.

注意定理 12.1 对分界线进入结点区域的边缘, 即 $\Gamma \subset W^{ss}$ 时仍成立. 但是, 在这种情形下完全的分支分析要求额外的控制参数. 其方法介绍如下. 我们建立联边同宿回路 Γ 的截面 S_0, 即我们定义 $S_0 = \left\{\|y\| = d, |x| \leqslant \dfrac{d}{2}\right\}$, 如图 12.1.4 所示. 在分支点, 分界线 Γ 交 S_0 于某点 $M_0 \in W^{ss}$. 因此, 对任何附近的系统, 大范围映射 T_1 是由从 $S_1: \{x = d, \|y\| \leqslant \delta\}$ 开始并在 M_0 附近与 S_0 相交的轨线定义. 设 ε 是截面 S_0 上点 $M_\varepsilon = T_1(y_1 = 0)$ 的 x – 坐标. 我们将 ε 作为额外的分支参数处理. 显然在 $\mu = 0$, 当鞍 – 结点仍存在时, 点 M_ε 是分界线 Γ 与 S_0 的交点. 因此, $\varepsilon = 0$ 对应于联边同宿回路; 在 $\varepsilon < 0$ 分界线进入结点区域且一般的同宿回路保持, 如图 12.1.5 所示.

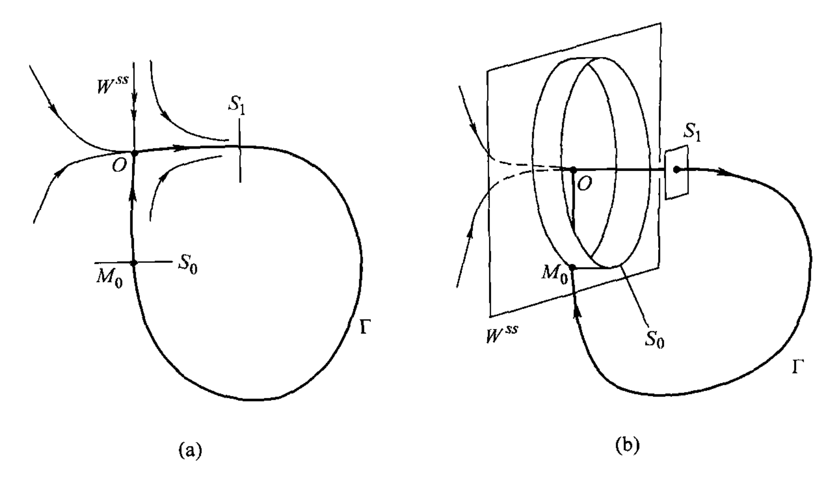


图 12.1.4 (a) 二维情形和 (b) 高维情形中非横截同宿回路 Γ 的截面的选择.

如前, 参数 μ 控制鞍 – 结点 O 的局部分支: $\mu > 0$ 时它消失, 但在 $\mu < 0$ 它分解为鞍点 $O_1(\mu, \varepsilon)$ 和结点 $O_2(\mu, \varepsilon)$.

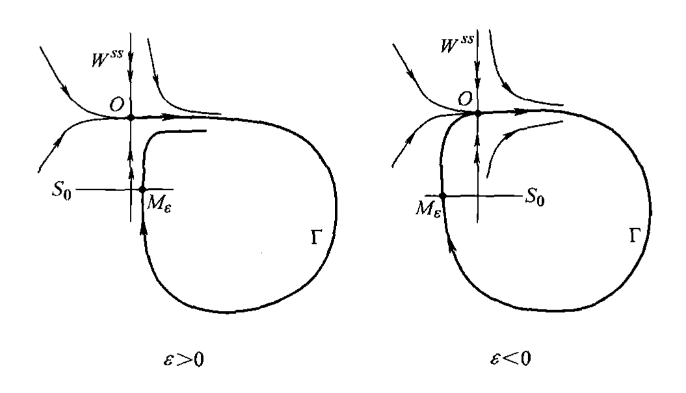


图 12.1.5 在联边分支前 ($\varepsilon < 0$) 和后 ($\varepsilon > 0$) 的不稳定分界线的性态.

如同在定理 12.1, 容易构造联边同宿回路 $\Gamma \bigcup O$ 的小邻域 V, 使得对所有小 μ 和 ε, V 内任何点的向前轨线以后仍停留在那里.

定理 12.2 (Lukyanov [88]) 在 (ε, μ) - 平面的区域 $\mu < 0$ 内, 存在对应有鞍点 O_1 同宿回路的曲线 $\varepsilon = h_{\text{hom}}(\mu) \sim \sqrt{\dfrac{|\mu|}{l_2}}$. 在区域 $\{\mu > 0\} \bigcup \{\varepsilon > h_{\text{hom}}(\mu)\}$ 内, 系统有唯一稳定周期轨道 L. 当 $t \to +\infty$ 时, V 中不趋于平衡点的轨线趋于 L (见图 12.1.6 中的分支图).

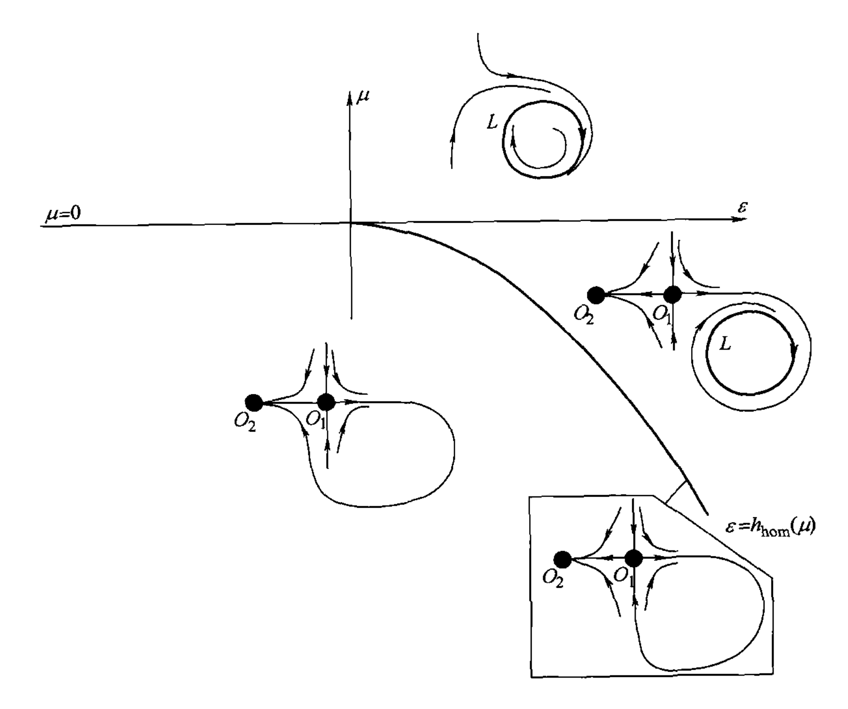


图 12.1.6 鞍 - 结点平衡态的联边同宿回路的分支图.

证明 如在定理 12.1, 这个问题可化为对映射 $T = T_1 \circ T_0$ 的研究, 其中 $T_1 : S_1 \to S_0$ 是大范围映射, T_0 是局部映射. 对 $\mu > 0$, 映射 T_0 对 S_0 上的所有点都有定义. 容易看到, 对 $\mu \leqslant 0$, 局部映射对 $x > x^+(\mu, \varepsilon)$ 有定义 (从 $x = x^+$ 开始的轨线位于 O_1 的稳定流形内, 从 $x < x^+$ 开始的轨线趋于 O_2. 回忆 $x^+(\mu, \varepsilon)$ 是鞍点 O_1 的坐标).

我们证明映射 T_0 是强压缩. 事实上, 将系统 (12.1.1) 表示为形式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A + h(x, y, \mu, \varepsilon)}{g(x, \mu, \varepsilon)} y. \tag{12.1.10}$$

其中我们记

$$\dot{x} = g(x, \mu, \varepsilon). \tag{12.1.11}$$

显然, 对 $\mu > 0$ 或 $x > x^+$ 有 $g > 0$, 因此 (12.1.10) 在我们感兴趣的区域内有定义. 设 $y(x; x_0, y_0, \mu, \varepsilon)$ 是 (12.1.10) 在 $x = x_0$ 从 $y = y_0$ 开始的轨线. 必须证明在 $x = d$ 有 $\dfrac{\partial y}{\partial(x_0, y_0)}$ 很小, 只要 μ 和 x_0 都很小.

记 $u = \dfrac{\partial y}{\partial(x_0, y_0)}$. 微分 (12.1.10), 我们得到

$$\frac{du}{dx} = \frac{A + h + h'_y y}{g} u,$$

或者

$$\frac{d}{dx}\|u\| \leqslant -\frac{\lambda}{g}\|u\|$$

(我们利用了 A 的谱位于虚轴的左边以及 h 和 y 都很小的事实). 最后

$$\|u\| \leqslant e^{-\lambda \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{g(s,\mu,\varepsilon)}} = e^{-\lambda t^*(x_0, x; \mu, \varepsilon)},$$

其中 t^* 是 (12.1.11) 中从 x_0 到 x 的飞行时间. 对固定的 $x = d$, 这个时间显然当 $\mu \to 0, x_0 \to 0$ 时趋于无穷. 因此, $\dfrac{\partial y}{\partial(x_0, y_0)} \to 0$. 这意味着 T_0 事实上是强压缩.

如前, 由于映射 T_0 是强压缩, 映射 $T = T_1 \circ T_0$ 也是强压缩. 当 $\mu > 0$ 时, 映射 T 在 S_0 处处有定义. 因此, 由压缩映射原理得知映射 T 有唯一稳定不动点. 映射 T 的这个不动点对应系统的周期轨道, 这对情形 $\mu > 0$ 给出了定理. 当 $\mu \leqslant 0$ 时, T 的定义域由曲面 $\Sigma : \{x = x^+\}$ 界定, 即由鞍点 O_1 的稳定流形 ($\mu = 0$ 时鞍 – 结点 O 的强稳定流形) 界定. 当点 $M \in S_0$ 从 $x > x^+$ 这边趋于 Σ 时, 像 TM 趋于点 M_ε (O_1 的分界线与 S_0 的交点). 因此, 由连续性, 我们可以假设曲面 Σ 在映射 T 作用下的像是单个点 M_ε.

这个情况完全类似于我们已经研究过的鞍点同宿回路, 它将在 13.4 节详细考虑. 那里 (引理 13.4) 我们证明所考虑的一类压缩映射有稳定不动点, 当且仅当定义域边

界的像的单个点位于定义域内. 因此我们的系统有稳定周期轨道当且仅当点 M_ε 位于区域 $x > x^+$ 内.

我们已经找到稳定周期轨道的存在性区域是由条件 $\varepsilon > x^+(\mu,\varepsilon)$ 给出, 显然它可重写为形式 $\varepsilon > h_{\text{hom}}(\mu)$, 其中光滑函数 h_{hom} 有如 $\sqrt{\frac{|\mu|}{l_2}}$ 的渐近性. 区域的边界对应于 Σ 上的点 M_ε, 即对应于 O_1 的同宿回路. 证明完毕.

注 这个论断在退化鞍 – 结点的联边同宿回路情形也成立 (要作明显修改). 在这种情形下 μ 是参数向量 (向量维数等于零 Lyapunov 量的个数加 1), 额外的分支参数 ε 的引入如前. 当鞍 – 结点消失 (按我们的记号 $\mu \in D_0$) 或者当 $\mu \notin D_0$, $\varepsilon > h_{\text{hom}}(\mu)$ 时稳定周期轨道存在. 这里, 曲面 $\varepsilon = h_{\text{hom}}(\mu)$ 对应于 "边界" 鞍点平衡态 O_1 的同宿回路, 如图 12.1.7 所示.

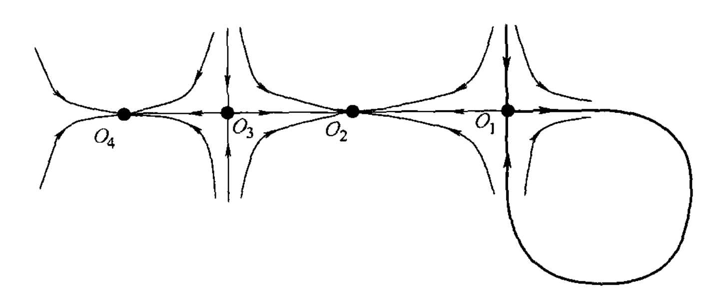


图 12.1.7 由退化鞍 – 结点联边同宿回路分支产生的周期轨道的稳定性区域的边界对应于 "边界" 鞍点平衡态 O_1 的同宿回路.

12.2 不变环面的生成

考虑在 $\mu = 0$ 有鞍 – 结点周期轨道 L 的 n 维 $\mathbb{C}^r$ – 光滑 $(r \geqslant 2)$ 的单参数系统族. 假设 μ 是局部分支的控制参数. 因此 (回忆图 11.3.7), 对 $\mu < 0$, 存在稳定周期轨道和鞍点周期轨道, 它们在 $\mu = 0$ 合并为一条轨道 L. 局部不稳定集 $W^u_{L,\text{loc}}$ 同胚于半柱面 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$. 轨道 L 也有强稳定流形 W^{ss}_L, 它将 L 的邻域划分为鞍点区域和结点区域. 当 $\mu > 0$ 时鞍 – 结点消失, 所有轨道都离开它的小邻域. 注意当 $\mu \to +0$ 时通过该邻域所需的时间趋于无穷.

我们固定的假设是在 $\mu = 0$, **所有在 W^u_L 内的轨线都回到结点区域,**[2] **且当 $t \to +\infty$ 时趋于 L.**

因此, W^u_L 是紧集 (由定义它包含 L). 设 U 是 W^u_L 的小邻域. 显然在 $\mu = 0$, 所有在 U 中的轨线当 $t \to +\infty$ 时趋于 L. 当 $\mu < 0$ 时, U 中的轨线趋于当 L 分裂时出现的稳定周期轨道之一. 我们感兴趣的问题是当 $\mu > 0$ 时在 U 中将发生什么?

[2] 特别地, $W^u_L \bigcap W^{ss}_L = \varnothing$.

正如我们已经指出过的, 这种性质的问题早在 20 世纪 20 年代已经出现, 它与从同步机制过渡到调制现象相联系. 这个分支的严格研究早先出于 [3], 其中假设具有鞍 – 结点的动力系统或者是非自治系统但周期地依赖于时间, 或者是自治系统但具有大范围截面 (至少在所考虑的相空间那部分). 因此, 问题化为在截面上单参数 $\mathbb{C}^r$ – 微分同胚 ($r \geqslant 2$) 族的研究, 它在 $\mu = 0$ 有鞍 – 结点不动点 O, 使得鞍 – 结点的不稳定集中的所有轨道当迭代次数趋于 $+\infty$ 时都回到鞍 – 结点 (见图 12.2.1(a) 和 (b)).

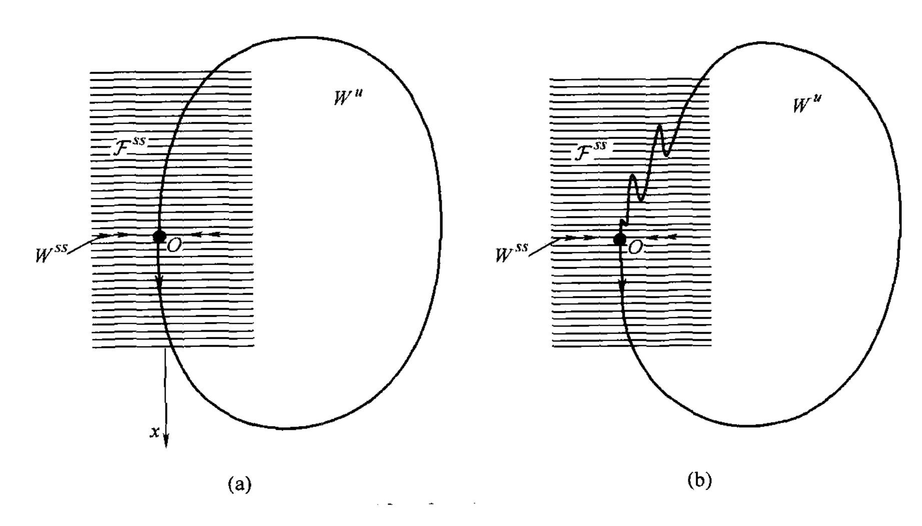


图 12.2.1 鞍 – 结点不动点的不稳定流形 W^u 可以是光滑曲线 (a), 或者是不光滑曲线 (b). 在后一情形, 当在 W^u 上的点从结点区域到达 O 时切向量振动而没有极限.

回忆鞍 – 结点不动点或者周期轨道有一个乘子等于 $+1$, 其它乘子位于单位圆内. 不动点附近的微分同胚 (Poincaré 映射) 可以表示为标准形式:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= [A + h(x, y, \mu)]y, \\ \bar{x} &= x + g(x, \mu), \end{aligned} \tag{12.2.1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^{n-2}$, A 是矩阵, 它的特征值严格位于单位圆内, 且

$$h(0,0,0) = 0, \quad g(0,0) = 0, \quad g'_x(0, \mu) = 0.$$

这里中心流形 W^C 由方程 $y = 0$ 定义. 曲面 $\{x = 常数\}$ 是强稳定不变叶层 $\mathcal{F}^{ss}$ 的叶片. 特别地, $x = 0$ 是 O 的强稳定流形的方程. 在 $\mu = 0$, 函数 g (W^C 上映射的非线性部分) 在 $x = 0$ 有严格极值. 更确切地说, 我们假设它是极小的, 即当 $x \neq 0$ 时 $g(x, 0) > 0$. 因此, 在截面上的鞍点区域对应于 $x > 0$, 结点区域对应于 $x < 0$. 由于 $\mu > 0$ 时鞍 – 结点消失, 故对所有充分小 x 和所有小正数 μ 有 $g(x, \mu) > 0$.

若 $g''_{xx}(0,0)\neq 0$, 则鞍 – 结点是**简单的**. 在这种情形下 (12.2.1) 的第二个方程可写为形式

$$\bar{x}=x+\mu+l_2x^2+\cdots, \tag{12.2.2}$$

其中 $l_2=\dfrac{g''(0)}{2}\neq 0>0$.

由假设, 大范围不稳定流形 W_O^u 回到结点区域, 即它组成闭不变曲线. 这条曲线处处光滑, 除了可能在点 O 以外. 事实上, 由于在结点区域沿着 x – 方向的压缩率小于指数, 它比 y – 方向的压缩弱得多. 因此, 任何与强稳定叶层横截的曲线段, 当向前迭代在它趋于点 O 时变成与 $y=0$ 相切. 同时, 如果不变曲线在某一点切于强稳定叶层的叶片, 则它将在这点的所有向前迭代处切于叶层 (因为叶层是不变的). 因此, 任意接近 O 时, 不变曲线上有点其曲线的切线与 $\{y=0\}$ 之间的交角保持有界且异于零.

因此,

大范围不稳定流形 W^u 处处光滑 (包括 O), 如果它在结点区域与强稳定叶层横截, 如图 12.2.1 (a) 所示, 以及它在 O 不光滑, 如果它在某轨道上的点处与强稳定叶层相切, 如图 12.2.1(b) 所示.

特别地, 光滑情形对应于具有鞍 – 结点平衡点的同宿回路的自治系统的时间 – 周期小扰动 (见上一节). 事实上, 对沿着自治系统轨道的常数时间的移位映射, 平衡点变成鞍 – 结点不动点, 同宿回路变成光滑闭不变曲线, 但是, W^u 与 $\mathcal{F}^{ss}_{\rm loc}$ 的横截性显然在小光滑扰动下得到保持.

非光滑情形出现在, 例如, 当 W_O^u 接触强稳定流形 W_O^{ss} 时, 如图 12.2.2 所示. 后者可依次通过对具有鞍 – 结点联边同宿回路的系统的时间 – 周期的小扰动来得到 (见上一节). 一般地, W^u 关于 $\mathcal{F}^{ss}_{\rm loc}$ 的非横截性在小光滑扰动下也得到保持 (就是说, 如果 W^u 与 $\mathcal{F}^{ss}_{\rm loc}$ 对应的叶片之间的切触是二次的).

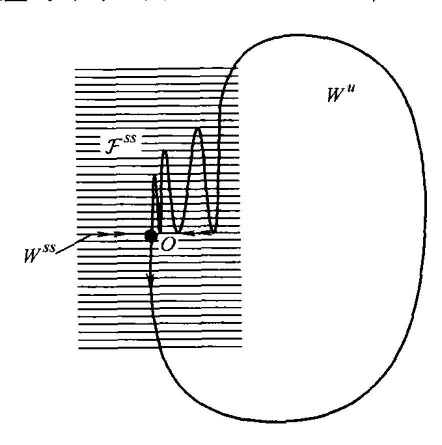


图 12.2.2 鞍 – 结点不动点的不稳定和强稳定流形的非横截切触可由具有鞍 – 结点平衡态联边同宿回路的系统的时间 – 周期小扰动得到, 如图 12.1.4 所示.

在截面上 Poincaré映射的闭不变曲线 W_O^u 是二维不变环面 W_L^u 与截面交点的轨迹. 如果不变曲线光滑, 则环面光滑, 否则它不光滑. 如果原来的非自治系统没有大范围截面, 则如我们在下面将讨论的, W_L^u 的其它形状也有可能. 例如, 它可能是光滑或不光滑的 Klein 瓶 [6].

定理 12.3 (Afraimovich-Shilnikov [3, 6]) 如果在 $\mu=0$ 鞍 – 结点的大范围不稳定集 L 是光滑紧流形 (环面或者 Klein 瓶), 那么光滑闭吸引不变流形 $\mathcal{T}_\mu$ (分别为环面或者 Klein 瓶) 对所有小 μ 都存在.

不变流形连续依赖于 μ. 当 $\mu=0$ 时, 它与 W_L^u 重合. 当 $\mu<0$ 时, 它是鞍点周期轨道 $L^-(\mu)$ 的不稳定流形和稳定周期轨道 $L^+(\mu)$ 的并 (其中 $L^\pm(\mu)$ 是鞍 – 结点分支出来的周期轨道[3]). 在环面情形, 对 $\mu>0$, 在 $\mathcal{T}_\mu$ 上 Poincaré 旋转数当 $\mu\to+0$ 时趋于零. 因此, 在 μ 轴上存在无穷多个 (当 $\mu\to+0$ 时实践中是不能区别的) 共振区域, 它们对应于 $\mathcal{T}_\mu$ 上具有有理数旋转数的周期轨道, 以及 μ 的无理数值的无穷集 (典型的 Cantor 集), 对此 $\mathcal{T}_\mu$ 上的运动是拟周期的.

在证明定理 12.3 之前, 让我们更详细地研究 W_L^u 的大范围结构. 在 L 的小邻域内引入法坐标 (见 3.10 节), 使得在 L 附近, 系统取形式

$$\dot{y}=\mathcal{A}(\mu)y+H(x,y,\varphi;\mu), \tag{12.2.3}$$

$$\dot{x}=G(x,y,\varphi;\mu), \quad \dot{\varphi}=1, \tag{12.2.4}$$

其中 H 和 G 以及它们关于 (x,y) 的一阶导数在 $(y=0,x=0,\mu=0)$ 等于零. 矩阵 $\mathcal{A}$ 的特征值严格位于虚轴的左边. 这里 $\varphi\in[0,1]$ 是角变量, 曲面 $\varphi=0$ 和 $\varphi=1$ 假设是按某个对合黏合, 即改变向量 y 的几个分量的符号 (适当选取这个对合使得系统的线性部分与 φ 无关, 而不失光滑性; 详情见 3.11 节).

我们还假设中心流形 W^C 已经局部直化, 故它有形式 $\{y=0\}$. 相应地,

$$H|_{y=0}\equiv 0. \tag{12.2.5}$$

接下来, 我们直化强稳定不变叶层. 叶层的叶片是 $\{x=Q(y;\varphi,x',\mu),\ \varphi=常数\}$, 其中 x' 是叶片与中心流形的交点坐标; Q 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 函数 (它关于 y 是 $\mathbb{C}^r$ – 光滑的). 直化是通过坐标变换 $x\mapsto x'$ 来得到, 它将不变叶层变为形式 $\{x=常数,\ \varphi=常数\}$. 因此, 方程 (12.2.4) 变成与 y 无关, 系统变成

$$\dot{y}=\mathcal{A}(\mu)y+H(x,y,\varphi;\mu), \tag{12.2.6}$$

$$\dot{x}=G(x,\varphi;\mu), \quad \dot{\varphi}=1. \tag{12.2.7}$$

由构造, 新函数 G 在 $\{y=0\}$ 与原来函数重合且仍是 $\mathbb{C}^r$ – 函数.

[3] 如果鞍 – 结点不是简单的, 那么当 $\mu<0$ 时可有多个鞍点和稳定周期轨道. 在这种情形下 $\mathcal{T}_\mu$ 是所有周期轨道和它们的不稳定流形的并.

在新坐标下, 强稳定不变流形 W_L^{ss} 是曲面 $\{x=0\}$, 结点区域 U_- 现在对应于小的负 x, 鞍点区域 U_+ 对应于小的正 x.

我们已经叙述过不变叶层是 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 光滑的. 此外, 可以证明, 对鞍 – 结点情形, 叶层实际上是处处 $\mathbb{C}^r$ – 光滑, 除了对 $\mu=0$ 在 W_L^{ss} 上时 [140]. 将 (12.2.4) 化为 (12.2.7) 的坐标变换有相同的光滑性.

选择小正数 d^+ 和 d^-. 考虑流的两个截面 (它们都是 $(n-1)$ 维环体) $S_0:\{x=-d^-\}$ 和 $S_1:\{x=d^+\}$. 由假设, 在 $\mu=0$ (因此, 在所有小 μ), W_L^u 上的轨线在有限时间内回到结点区域 $U_-=\{x<0\}$. 因此, 流定义微分同胚 T_1 (**大范围映射**), 它将交线 $l^-:\{y=0\}=W_L^u\bigcap S_1$ 的小邻域映为 S_0. 这个映射有形式

$$
\begin{aligned}
y_0 &= p(\varphi_1, y_1; \mu), \\
\varphi_0 &= q(\varphi_1, y_1; \mu) \quad \bmod 1,
\end{aligned} \tag{12.2.8}
$$

其中在 S_0 和 S_1 上的坐标分别记为 (φ_0, y_0) 和 (φ_1, y_1). 两个 $\mathbb{C}^r$ – 光滑函数 p 和 $q(\bmod 1)$ 关于 φ 是周期为 1 的周期函数.

闭曲线

$$
l^+ = T_1 l^- : \{y_0 = p(\varphi_1, 0; 0), \varphi_0 = q(\varphi_1, 0; 0) \mod 1\}
$$

是 W_L^u 和 S_0 的交线. 注意, 函数 q 可以写为形式

$$
q(\varphi, y; \mu) = m\varphi + q_0(\varphi, y; \mu), \tag{12.2.9}
$$

其中 q_0 是 φ 的周期函数. 整数 m 定义在 S_0 内 l^+ 的同伦类 (m 的符号确定 l^+ 关于 l^- 的定向). 如果相空间的维数 n 大于 3, 则 S_0 至少是三维而整数 m 可以是任意值. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 截面 S_0 是二维环域. 由于 l^+ 不能有自交点, 可得知只在这种情形下才有可能 $m=1$ 和 $m=0$ (如果 $m=-1$, 则 W_L^u 是 Klein 瓶, 故在 $\mathbb{R}^3$ 中这种情形不可能出现).

注意, 集合 W_L^u 的结构完全决定于 W_L^u 与 L 从结点区域这边的连接方式. 由于交线 $l^+=W_L^u\bigcap S_0$ 是 S_0 中的 $|m|$ 圈曲线, 在 $m\neq 0$, $W_L^u\bigcap U_-$ 与任何 $\{\varphi=\text{常数}\}$ 类型截面的交是由在点 $\{x=0, y=0\}=L_0\bigcap\{\varphi=\text{常数}\}$ 黏合的 $|m|$ 片组成, 如图 12.2.3 所示. 在 $m=0$ 这个交是凝聚在 $\{x=0, y=0\}$ 的圆周序列, 见图 12.4.1. 因此, 对应不同 m 值的, W_L^u 的样本彼此互相不同胚. 此外, 在 $|m|\neq 1$, 对 L 上的任何点, 它在 W_L^u 中的小邻域不同胚于圆盘, 即在这种情形下 W_L^u 不是流形.

我们将在 12.4 节研究与 "蓝天突变" 问题相关的 $m=0$ 的情形. 在情形 $|m|\geqslant 2$, 当鞍 – 结点消失时产生无穷多个鞍点周期轨道 (见定理 12.5), 此外, 这里甚至可能产生双曲吸引子 (见 [139]), 我们在本书中不准备讨论这类分支.

如果 $m=\pm 1$, 则 W_L^u 是流形. 如果 $m=1$, 它同胚于环面; 如果 $m=-1$, 那它同胚于 Klein 瓶. 正如已经指出的, 这个流形可以光滑也可以不光滑, 取决于 W_L^u 与

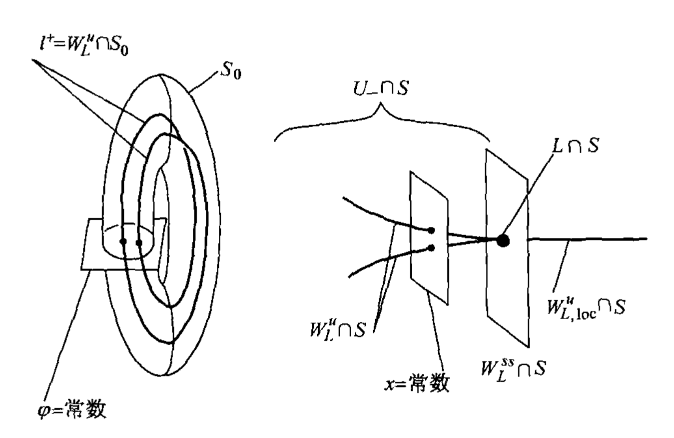


图 12.2.3　鞍 – 结点周期轨道 L 的不稳定流形 W_L^u 与类环体截面 S_0 的交在情形 $m=2$ 时的结构. 交的迹线是绕两圈的曲线 l^+. 因此, 它与 S_0 中的每个等位面 $\varphi=$ 常数, 以及截面 $S:\{\varphi=0\}$ 中的每个等位面 $x=$ 常数至少有两个交点.

强稳定叶层 $\mathcal{F}^{ss}$ 是否处处横截相交. 当 $\dot{x}$ 和 $\dot{\varphi}$ 与 y 无关时 (见 (12.2.7)), $\mathcal{F}^{ss}$ 在截面 S_0 上的叶片是 (超) 平面 $\varphi_0=$ 常数. 交 $l^+=W_L^u\bigcap S_0$ 表示为 $\{y_0=p(\varphi_1,0,0),\varphi_0=q(\varphi_1,0,0)\}$, 其中 (p,q) 是大范围映射 $T_1:S_1\to S_0$ 的右端 (见 (12.2.8)). 因此, W_L^u 与 $\mathcal{F}^{ss}$ 的横截性成立, 当且仅当

$$\left.\frac{\partial q}{\partial\varphi}\right|_{y=0,\mu=0}\neq 0. \tag{12.2.10}$$

这个不等式以及要求 $|m|=1$ 是定理 12.3 中条件的解析形式.

这个定理的证明基于将问题化为圆周的某个映射 (下面称为 "本质映射") 的研究. 事实上, 这个约化是在与 m 的值或 W_L^u 的光滑性无关的情况下进行的, 我们的下面两节就以此为基础.

正如在 12.5 节解释的, 我们可以在 (12.2.7) 中假设

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\varphi}\right|_{\mu=0}\equiv 0. \tag{12.2.11}$$

换句话说, 在 $\mu=0$, 方程 (12.2.7) 的右端可以 (用适当的变量变换) 使得与 φ 无关, 因此它可取下面的自治形式

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\tilde{g}(x),\\ \dot{\varphi}&=1,\end{aligned} \tag{12.2.12}$$

其中 $\tilde{g}(0)=0$, $\tilde{g}'(0)=0$. 如果 $x\neq 0$, 则 $\tilde{g}(x)>0$. 注意, 函数 $\tilde{g}(x)$ 由中心流形上的 Poincaré 映射的非线性部分 $g(x,0)$ **唯一确定**[见 (12.2.1)]. 在 [140] 中已经证明, 将系统 (12.2.7) 化为在 $\mu=0$ 的自治形式 (12.2.12) 的变换在 $x\neq 0$ 是 $\mathbb{C}^r$ 的. 因此, 经过

这个变换以后, 系统 (12.2.6) 和 (12.2.7) 在 $x \neq 0$ 是 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑的, 但任何两个与 $\{x=0\}$ 不相交的截面之间的流映射仍是 $\mathbb{C}^r$ - 光滑的.

一旦我们固定坐标使得系统在中心流形上当 $\mu=0$ 时取自治形式 (12.2.12), 我们就可以定义**本质映射**

$$\varphi \mapsto f(\varphi) \equiv m\varphi + q_0(\varphi, 0; 0). \tag{12.2.13}$$

由构造, 这个映射求得如下: 应用映射 T_1 到局部不稳定流形 $W^u_{\text{loc}} = W^C \bigcap U_+$ 与截面 S_1 的交线, 然后沿着强稳定叶层的叶片将像投影到中心流形上. 这个投影是在 S_0 上作的, 它位于叶层唯一确定的结点区域内 (见第 5 章). 因此, 一旦截面 S_0 和 S_1 选定, 本质映射就唯一确定, 中心流形上的按模的坐标变换保持系统自治 (中心流形在结点区域不唯一, 但不同中心流形上的系统按它们沿着强稳定不变叶层的投影是光滑共轭的. 因此, 另一个中心流形的选择等价于在所给的流形上的坐标变换).

事实上, 保持系统在 $\mu=0$ 为 (12.2.12) 的形式的坐标变换集是相当少的. 因为新坐标 φ 必须满足 $\dfrac{d}{dt}(\varphi_{\text{new}} - \varphi) = 0$, 因此差 $\varphi_{\text{new}} - \varphi$ 沿着系统的轨线必须是常数. 特别地,它在 L 上为常数. 现在由于中心流形上的任何轨道当 $t \to +\infty$ 或 $t \to -\infty$ 时都趋于 L, 由此得知在 W^C 上处处有 $\varphi_{\text{new}} - \varphi =$ 常数. 此外, 由于 (12.2.12) 中的 x 方程必须保持自治, 我们可以证明只有变量 x 的自治变换 (与 φ 无关) 被允许. 事实上, 首先考虑在 $\varphi=0$ 是恒同的变换. 由定义, 它不改变局部截面 $S:\{\varphi=0\}$ 上的 Poincaré 映射. 因此, 由嵌入流的唯一性 (引理 12.4), 如果这样的变换保持系统自治, 它不可能改变右端 $\tilde{g}$. 由此得知, 如果在 $\varphi=0$, $x_{\text{new}} \equiv x$, 则 x_{new} 的时间发展和 x 的时间发展由相同方程控制, 由此立刻得知在这种情形下, 对所有 φ 有 $x_{\text{new}} \equiv x$. 由于任意变换是自治变换和我们刚刚考虑的一类变换的叠加, 这就证明了我们的论断.

于是, 仅有可能的坐标变换是

$$\varphi \mapsto \varphi + \text{常数}, \quad x \mapsto X(x). \tag{12.2.14}$$

对本质映射, x 的这个变换的作用分别等价于从截面 S_0 到 $x = X^{-1}(-d^-)$ 和 S_1 到 $x = X^{-1}(d^+)$ 的移位. 由于 x 的发展是自治的, 从截面 $\{x = \text{常数}\}$ 到这个形式的另一个截面的飞行时间只依赖于截面的位置, 并不依赖于在截面上的初始点. 因此, S_0 或者 S_1 的任何移位分别等价于 φ_0 或 φ_1 的刚体旋转. 最后我们得到

引理 12.1 本质映射由系统在 $\mu=0$, 按任意附加常数取模和原点的移位唯一确定:

$$f(\varphi) \to c_0 + f(\varphi + c_1).$$

本质映射提供关于大范围鞍 - 结点分支的大部分信息. 如我们已经指出的, 它的度 m 确定 W^u_L 的拓扑类型. 如果 $|m|=1$, 则 W^u_L 光滑当且仅当 $f(\varphi)$ 没有临界点 (见 (12.2.10) 和 (12.2.13)). 下面 (定理 12.4), 我们将给出**约化定理**的确切阐述:

当 $\mu \to +0$ 时 $U(W_L^u)$ 中的分支遵循一维映射族

$$\bar{\varphi} = \omega(\mu) + f(\varphi) \tag{12.2.15}$$

中的分支, 其中 $\mu \to +0$ 时 $\omega(\mu) \to +\infty$.

[151] 明显应用了上面约化原理的 $|m| = 1$ 情形. [97] 中较早的研究本质上基于同一思想.

对所有小 $\mu > 0$, 考虑系统在截面 S_1 上由轨线定义的 Poincaré 映射 $T = T_0 \circ T_1$. 其中 T_1 是由 (12.2.8) 定义的大范围映射, $T_0 : S_0 \to S_1$ 是对 $\mu > 0$ 在 L 附近局部定义的直通映射.

如同在上一节中, 对 $\mu > 0$ 在 U 中轨线的性态由映射 T 的性态完全确定.

由于对 $\dot{x}$ 和 $\dot{\varphi}$ 的方程 (12.2.7) 与 y 无关, 局部的直通映射 $T_0 : (y_0, \varphi_0) \mapsto (y_1, \varphi_1)$ (对某 $\mathbb{C}^r$ – 函数 Y) 写为形式

$$\begin{aligned} y_1 &= Y(\varphi_0, y_0, \mu), \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + \tau(\varphi_0, \mu) \mod 1. \end{aligned} \tag{12.2.16}$$

τ 是从 S_0 到 S_1 的**飞行时间**函数. 它是 φ_0 的光滑周期函数. 显然当 $\mu \to +0$ 时 $\tau(\varphi_0, \mu) \to \infty$.

引理 12.2 如果在 $\mu = 0$, (12.2.11) 满足, 则当 $\mu \to +0$ 时 $\partial\tau/\partial\varphi$ 在 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 拓扑下一致地趋于零.

在十分一般的条件下, 这个引理在 [140] 中有证明, 由此几乎立刻得到下面的基本定理 12.4. 证明基于冗长的计算, 我们在这里就省略了. 在某些附加的假设下类似论断的简单证明在 12.5 节给出. 就是说, 假设系统关于所有变量和 μ 充分光滑, 以及鞍 – 结点 L 是简单的. 此外, 代替证明所有导数都趋于零, 仅需证明足够多的导数为零. 当然, 所有这些并不表示严格的限制.

记 $\omega(\mu) = \tau(0, \mu)$, 由引理 12.2 我们得到

$$\tau(\varphi_0, \mu) = \omega(\mu) + o(1). \tag{12.2.17}$$

如果鞍 – 结点是简单的, 则

$$\omega(\mu) \sim \frac{\pi}{\sqrt{\mu l_2}}. \tag{12.2.18}$$

还得注意, 由于 (12.2.3) 中的矩阵 $\mathcal{A}(\mu)$ 的特征值严格位于虚轴的左边, 又因为由 (12.2.5), 对某 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 函数 $\tilde{h}$ 有 $\dot{y} = (\mathcal{A} + \tilde{h})y$, 容易证明对某正 λ 有

$$\|Y\|_{\mathbb{C}^{r-1}} \leqslant O(e^{-\lambda\omega}). \tag{12.2.19}$$

事实上, 可以证明 [140]

$$\|Y\|_{\mathbb{C}^r} \to 0 \quad 当 \quad \mu \to 0. \tag{12.2.20}$$

结合公式 (12.2.8), (12.2.9), (12.2.10), (12.2.16), (12.2.17) 和 (12.2.20) 得到下面的结果 [140].

定理 12.4 (约化原理) Poincaré 映射 $T = T_0 \circ T_1$ 写为

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \psi(\varphi, y; \mu),\\ \bar{\varphi} &= \omega + f(\varphi) + \xi(\varphi, y; \mu) \mod 1,\end{aligned} \tag{12.2.21}$$

其中当 $\mu \to +0$ 时 $\omega(\mu) \to \infty$, 以及 ψ, ξ(和它们的所有导数) 趋于零.

由这个定理立刻得知, 如果本质映射 (12.2.15) 在某个 ω^* 有粗稳定 (不稳定) 周期轨道, 则存在凝聚于 +0 的 μ 值的区间序列 δ_k, 使得差 $(\omega(\mu) - k)$ 在 $\mu \in \delta_k$ 保持接近于 ω^*, 以及在 $\mu \in \delta_k$ 对所有充分大的 k, 系统分别有粗稳定周期轨道或者鞍点周期轨道.

事实上, 定理 12.4 对光滑依赖于 μ 的系统也成立: 在这种情形下我们假设 **(12.2.3) 和 (12.2.4) 的右端关于相变量** (y, z, φ) **的一阶导数对所有变量和** μ **是** $\mathbb{C}^{r-1}$ – **光滑的**.

我们也假设 L 附近的局部 Poincaré 映射单调地依赖于 μ, 即在 (12.2.1)[4]中

$$g'_\mu(0; 0) > 0. \tag{12.2.22}$$

在这种情形下可以证明

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mu} \neq 0, \tag{12.2.23}$$

即 ω 可视为新参数, 于是 μ 可考虑为 ω 的函数, 当 $\omega \to \infty$ 时它趋于零. 可以证明 μ 关于 ω 的所有导数也趋于零. 当重新叙述 τ'_φ 关于 ω 和 φ_0 的导数时, 引理 12.1 仍成立. 定理 12.4 提供的结论完全相同, 即 “所有导数” 现在也包括关于 ω 的导数 (见 [140]).

注意, 上面将飞行时间作为新参数的方法仅在低次光滑时才有必要: 在证明引理 12.3 时对应的情形是高次光滑性 (且鞍 – 结点是简单的), 我们证明任意多个关于 μ 本身的导数为零.

现在, 定理 12.3 立刻由公式 (12.2.21) 得到: 由定理的条件我们有 $|m| = 1$ 和 $f'(\varphi) \neq 0$, 故映射 $\varphi \mapsto \omega + f(\varphi) + \xi(\varphi, 0; \mu)$ 是微分同胚, 且容易看出, 环域原理 (4.2 节) 在此可应用. 因此对映射 T, 吸引 S_1 中所有轨道的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑闭不变曲线

$$y = \eta(\varphi; \mu) \tag{12.2.24}$$

的存在唯一性对任何 $\mu > 0$ 被建立. 由于这个映射被所考虑的系统的轨道定义, 这就证明了定理.

[4] 当鞍 – 结点是简单时, (12.2.22) 刚好是单参数族在所考虑的具有鞍 – 结点的系统的分支曲面的横截性条件, 它允许在 $W^C_{\rm loc}$ 上的 Poincaré 映射可写为 (12.2.2) 的形式.

由环域原理, 不变曲线连续依赖于 μ (或者当系统关于 μ 光滑时光滑依赖于 μ). 固定 $\nu=\omega(\mu) \bmod 1$ 的任何值使得 $\omega=\nu+k$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $\mu\to+0$ 时 $k\to\infty$, 则当 $k\to\infty$ 时映射 (12.2.21)(按光滑拓扑) 有极限

$$\begin{aligned}&\bar{y}=0,\\&\bar{\varphi}=\nu+f(\varphi)\quad \bmod 1.\end{aligned}\tag{12.2.25}$$

因此, 映射 T 的不变曲线以映射 (12.2.25) 的不变曲线 $\{y=0\}$ 为极限, 即 (12.2.24) 中的函数 η(及其所有导数) 当 $\mu\to+0$ 时为零.

在不变曲线上, 映射 T 可表示为

$$\bar{\varphi}=\omega(\mu)\pm\varphi+f_0(\varphi)+f_1(\varphi;\mu)\quad \bmod 1,\tag{12.2.26}$$

其中 "+" (可定向情形) 对应于环面, "−" (不可定向情形) 对应于 Klein 瓶. f_0 和 f_1 是 φ 的周期函数, 且当 $\mu\to+0$ 时 f_1 和它的所有导数趋于零. 如果系统光滑依赖于 μ (以及单调性条件 (12.2.22) 成立), 则由 (12.2.23) 得知这个映射 (当提升到 $\mathbb{R}^1$ 时) 关于 μ 是严格单调的.

因此, 在可定向情形, 环面上的 Poincaré 旋转数单调依赖于 μ(见 4.4 节). 典型地, 每一个有理旋转数对应于 μ 值的一个区间 (共振区域). 在最简单的情形下, 在共振区域内环面上只存在两个周期轨道, 一个稳定, 另一个不稳定 (例如, 如果 $f_0(\varphi)=\sin\varphi$, 则可能只有两个不动点). 在不变曲线上的不稳定周期轨道是环域 (环体)S_1 的映射 T 的鞍点轨道, 不变曲线是这个鞍点周期轨道的不稳定流形的闭包. 一般地, 对不同的函数 f_0, 在共振区域内可能有任意多个周期轨道 (环面上具有相同个数的稳定轨道和鞍点轨道). 在这种情形下, 不变曲线是所有鞍点周期轨道的不稳定流形的闭包.

共振区域的边界对应于在不变圆周上稳定和不稳定周期轨道的接合, 即对应于我们在这里考虑的相同类型的鞍 – 结点分支. 此外, 如果周期轨道多于两个, 鞍 – 结点分支可能在共振区域内的参数值处发生. 由 Poincaré 映射 (12.2.26) 在不变曲线上的结构得知,

如果本质映射

$$\bar{\varphi}=\nu+\varphi+f_0(\varphi)$$

中的某个值 ν^* 对应于余维 1 分支 (简单鞍 – 结点), 那么存在序列 $\mu_k\to+0$, 使得 $\omega(\mu_k)-k\to\nu^*$, 以及映射 (12.2.26) 在 $\mu=\mu_k$ 对所有充分大的 k 产生相同的分支.

我们现在考虑当 W^u_L 不光滑时会发生什么问题. 这个问题首先由 [3] 研究, 那里发现**不变流形的破裂可能由于在这样的分支开始出现混沌**. 特别地, 在非光滑情形, 当鞍 – 结点消失时产生无穷多个鞍点周期轨道的充分条件 (所谓 "大叶" 和 "小叶"

条件) 由 [3] 给出. 后来的研究显示这些条件可进一步精简, 因此对它们可重新叙述如下.

回忆在光滑情形, 流形 W_L^u 与强稳定叶层 $\mathcal{F}^{ss}$ 横截相交, 每一个叶片与 W_L^u 只有一个交点. 在一般的非光滑情形, 有些叶片有一侧与 W_L^u 相切. 因此, 在结点区域必须有叶片, 那里每一个叶片与 W_L^u 有几个交点.

定义 12.1 集合 W_L^u 满足 (精制的) 大叶条件, 如果 $\mathcal{F}^{ss}$ 的每个叶片在结点区域与 W_L^u 至少相交两次 (图 12.2.4).

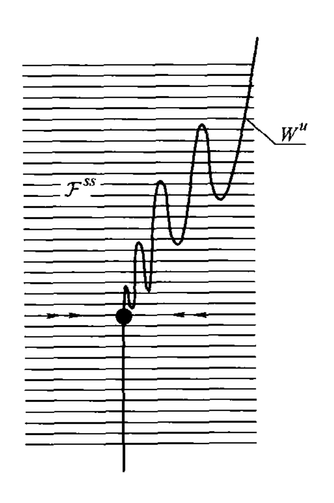


图 12.2.4 大叶条件的几何解释 —— 强稳定叶层 $\mathcal{F}^{ss}$ 的每个叶片通过与 W^u 的切割不少于两点.

借助于本质映射, 这个条件转化为对 $\bar{\varphi}$ 的任何值, 映射

$$\bar{\varphi} = f(\varphi)$$

至少有两个原像的存在性条件.

下面的结果是 [3] 中对应定理的加强形式.

定理 12.5 如果大叶条件满足, 那么对所有小 $\mu > 0$, 系统有无穷多个鞍点周期轨道.

注意这个定理的成立与 W_L^u 的拓扑结构类型无关 (即与本质映射的度数 m 无关). 显然, 当 $|m| > 2$ 时大叶条件总满足, 因此鞍 - 结点的消失在这种情形下总导致混沌. 因而, 在这一章的余下部分我们将集中研究 $m = 1, 0, -1$ 的情形.

小叶条件原来是在 W_L^u 是环面 $(m = 1)$ 时引入的, 但对 $m = 0$ 和 $m = -1$ 也有意义. 借助于本质映射, 小叶条件满足, 如果

存在 φ_1 和 φ_2 使得

$$f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$$

以及

$$\max_{\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]}|f(\varphi)-f(\varphi_1)|>|\varphi_2-\varphi_1|$$

(见图 12.2.5).

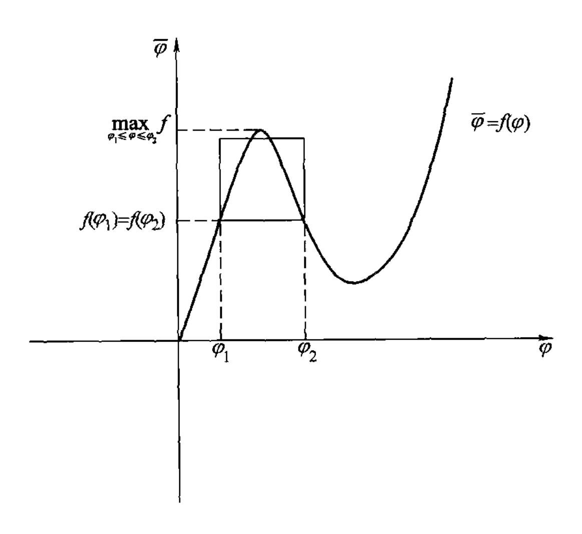


图 12.2.5 满足小叶条件的 $f(\varphi)$ 的形式.

定理 12.6 如果小叶条件满足, 则在 μ – 轴上存在凝聚在 $\mu=+0$ 的区间序列 Δ_i, 使得对任何 $\mu\in\Delta_i$ 系统有无穷多个鞍点周期轨道.

注意, 在有大叶条件下过渡到混沌和没有它时过渡到混沌的区别是: 在后一情形混沌动力学的区间 Δ_i, 原则上与系统仅有有限个鞍点和稳定周期轨道的区间相互交替 [151]. 按照约化原理 (定理 12.4), 如果在 ω 的某区间内, 本质映射

$$\bar{\varphi}=\omega+f(\varphi)$$

只有有限个周期轨道, 这种情况就会出现.

例如, 如果 $f(\varphi)=\varphi+\dfrac{C}{2\pi}\sin 2\pi\varphi$, 那么流形 W^u_L 当 $C\geqslant 1$ 时不光滑, 但若

$$\sqrt{C^2-1}>\pi+\arccos\frac{1}{C},$$

则大叶条件满足; 又

$$\sqrt{C^2-1}>\pi+\arccos\frac{1}{C}-u,$$

则小叶条件满足且有 $\varphi_2=1/2$, 其中 $u\in(0,\pi)$ 是方程 $\pi=u+C\sin u$ 的根. 显然当 $(C-1)$ 充分小时, 本质映射在区间 $|2\pi\omega|<1$ 内只有一个稳定和一个不稳定不动点, 且没有其它周期轨道. 因此, 如果 $(C-1)$ 充分小, 在 μ – 轴上存在简单动力学的区

间. 事实上, 这样的区间的存在性可容易验证, 例如, 当

$$\sqrt{C^2-1} > \frac{3\pi}{4} + \arccos\frac{1}{C}$$

时.

注意上面两个定理仅仅给出鞍 - 结点消失时出现混沌动力学的充分条件. 这些条件也许还可进一步精简. 最重要的改进 (本质上属于 Newhouse, Palis 和 Takens [97]) 可以在情形 $m=1$ 给出, 那里鞍 - 结点的不稳定流形 W_L^u 是环面.

定理 12.7 一般地, 如果 W_L^u 是不光滑环面, 则在 μ - 轴上存在凝聚在 $\mu=+0$ 的区间序列 Δ_i, 使得对任何 $\mu\in\Delta_i$, 系统有无穷多个鞍点周期轨道.

这个定理的一般性条件可明显地叙述为: 对每个 $\varphi_0\in\mathbb{S}^1$, 验证或者存在另外的 φ 使得 $f(\varphi)=f(\varphi_0)$, 或者导数 $f'(\varphi_0), f''(\varphi_0),\cdots,f^{(r)}(\varphi_0)$ 中至少有些不为零. 这个条件是本质的还是仅仅是技术性限制并不清楚. 在任何情形中, 本质映射的所有导数同时在某点为零的情况绝对是少见的.

从而, 可将定理 12.3, 定理 12.5 以及定理 12.7 的结果综合如下:

如果 W_L^u 是光滑环面, 则在鞍 - 结点 L 消失以后, 光滑吸引的不变环面得到保持. 如果 W_L^u 同胚于环面但不光滑, 则在 L 消失以后出现混沌动力学. 这里或者环面破裂而混沌对所有小 $\mu>0$ 存在 (大叶条件对此是充分的), 或者参数轴上的混沌区域与简单动力学的区域交替.

本质映射的度数 m 等于 1 时应用定理 12.7 很费劲. 它与 $m=0$ 和 $m=-1$ 的情形并不类似, 那里出现混沌的情景还不清楚.

12.3 Klein 瓶的形成

下面我们考虑不稳定流形 W_L^u 是 Klein 瓶时的鞍 - 结点周期轨道 L 的分支, 如图 12.3.1 所示, 即这时本质映射的度数 $m=-1$. 由定理 12.3, 如果 W_L^u 光滑, 则当 L 消失时光滑不变吸引的 Klein 瓶仍保持. 在它与截面 S_0 的交上, Klein 瓶上的流定义了形如 (见 (12.2.26))

$$\bar{\varphi} = \omega(\mu) - \varphi + f_0(\varphi) + f_1(\varphi,\mu) \mod 1 \tag{12.3.1}$$

的 Poincaré 映射, 其中 $\mu\to+0$ 时 $\omega\to\infty$. f_0 和 f_1 是光滑的周期 -1 函数, f_1 及其所有导数在 $\mu=0$ 为零, 在 $\mu=0$ 由系统唯一确定的本质映射是 $-\varphi+f_0(\varphi)$. 如在上一节证明的, 流形 W_L^u 光滑, 当且仅当对所有 φ

$$-1+f_0'(\varphi)\neq 0. \tag{12.3.2}$$

在这种情形下, Poincaré 映射 (12.3.1) 是 (不可定向的) 圆周微分同胚.

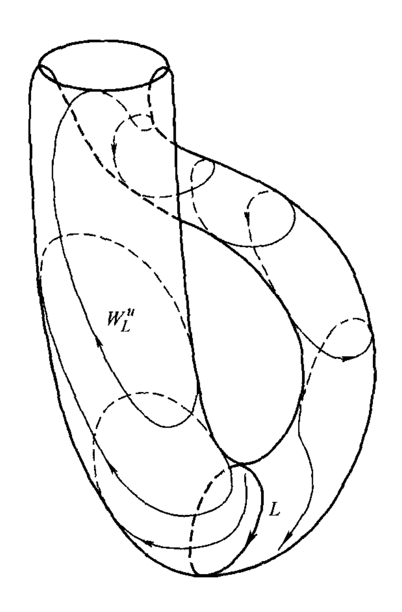


图 12.3.1　Klein 瓶上的鞍 – 结点周期轨道.

大家知道这样的映射恰有两个不动点. 它们将圆周划分为两个弧段, 每一个在映射的作用下循环进入另一个. 在这些弧段上也可以有多个周期 −2 点, 如图 12.3.2 所示. 一般地, 下面的分支可能出现: 周期 −2 轨道坍缩成, 或者为不动点 (它的乘子通过 −1), 或者为两个可合并为周期 −2 的鞍 – 结点轨道的周期 −2 轨道, 如图 12.3.3 所示. 由 (12.3.1) 立刻得知, 如果本质映射

$$\bar{\varphi} = \nu - \varphi + f_0(\varphi) \mod 1 \tag{12.3.3}$$

在某 $\nu = \nu^*$ 产生这些分支之一, 则

存在序列 $\mu_k \to +0$ 使得 $(\omega(\mu_k) - k) \to \nu^*$, 以及 Poincaré 映射 (12.3.1) 在每一个 $\mu = \mu_k$ 产生相同分支.

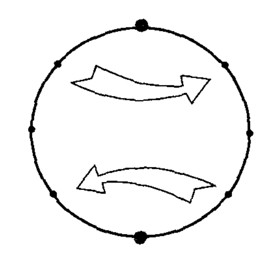


图 12.3.2　不可定向的圆周映射的作用.

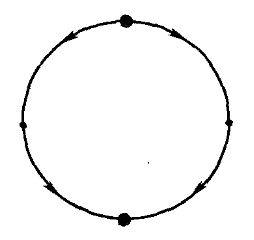


图 12.3.3　不可定向的圆周映射的周期 – 2 轨道可能的鞍 – 结点分支.

映射 (12.3.1) 的不动点从方程

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{1}{2}\omega(\mu) + \frac{1}{2}(f_0(\varphi_0) + f_1(\varphi_0, \mu)),\\ \varphi_1 &= \frac{1}{2}\omega(\mu) + \frac{1}{2}(f_0(\varphi_1) + f_1(\varphi_1, \mu)) + \pi\end{aligned} \tag{12.3.4}$$

求得. 由于 f_0 和 f_1 是周期函数, 它们有界. 因此, 从 (12.3.4) 和 (12.3.2) 得知当 $\omega \to \infty$ 时对应于不动点的坐标 φ_0 和 φ_1 无限增加. 换句话说, 当 $\mu \to +0$ 时两个不动点沿着圆周绕行无穷多次.

这个不动点的乘子等于 $-1 + f_0'(\varphi_{0,1}) + f_1'(\varphi_{0,1}, \mu)$. 由于当 $\mu \to +0$ 时 $f_1' \to 0$, 得知若 $f_0(\varphi) \neq 0$, 则每个不动点的乘子来回地围绕 -1 振动. 我们得到下面的结果 ([6] 中首先指出, 详细证明第一次发表于 [86]):

定理 12.8 对所有 $\mu > 0$, 在 Klein 瓶上的系统恰有两个具有负乘子的周期轨道. 如果 $f_0(\varphi)$ 不恒等于零, 则这两个周期轨道的每一个当 $\mu \to +0$ 时产生无穷多次倍周期分支.

在最简单的情形 (例如, 当 $f_0(\varphi) = \dfrac{C}{2\pi}\sin 2\pi\varphi$, 其中 $C < 1$), 分支过程如下 (见图 12.3.4): 在 μ 的某个区间上, 若一个不动点 (φ_0) 稳定, 另一个 (φ_1) 不稳定. 则在 μ 的某个值处不动点 φ_0 失去它的稳定性, 并产生一个周期 -2 稳定轨道. 这以后在 μ 的某个区间中, 存在两个不稳定不动点以及一个周期 -2 稳定轨道. 然后稳定轨道坍缩成为不动点 φ_1, 它现在变成稳定, 再以后重复这个分支过程: 稳定不动点通过倍周期再失去它的稳定性, 等等, 经历无穷多次永不停止.

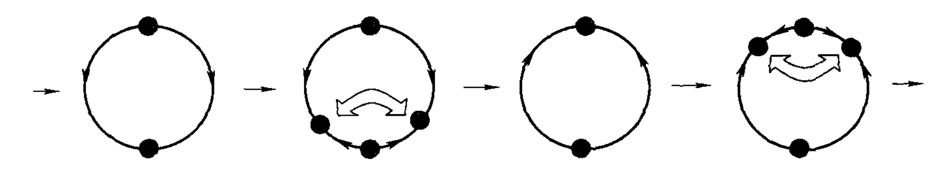


图 12.3.4 当 $\mu \to +0$ 时 Poincaré映射 (12.3.1) 在 Klein 瓶上的最简单的环分支

由于附近轨道到截面的回归时间大约为 $\omega(\mu)$ (见上一节), 得知对应于 Poincaré 映射不动点的流的周期轨道的周期当 $\mu \to +0$ 时趋于无穷 (典型地, 它是 $\sim \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu l_2}}$). 在轨道回到截面之前, 它们每一个必须在刚刚消失的鞍 - 结点 L 的小邻域内旋转 $\omega(\mu)$ 次. 因此, 这些周期轨道的长度也无限增长. 从而, 定理 12.8 给出下面由 Palis 和 Pugh [105] 提出的问题的正面回答: 当趋近分支时刻时, 在平衡态的有限距离内能否在周期轨道消失时使得轨道的周期与长度无限增长?

R. Abraham 称这类实在的分支为 "蓝天突变". 蓝天突变的第一个例子是由 Medvedev [95] 对 Klein 瓶上的鞍 - 结点分支构造的. Medvedev 的例子最重要的特征是当 $\mu \to +0$ 时周期轨道在保持稳定和对所有小 $\mu > 0$ 不产生任何分支的情况

下其长度和周期持续不断地增长, 且对所有小 $\mu > 0$ 不产生任何分支. 定理 12.8 显示这只有在 $f_0(\varphi) \equiv 0$ 的情况下才有可能, 这意味着所有点 (除了两个不动点) 都是本质映射的周期 – 2 点.

由于本质映射在这种情形下是高度退化的, 它并不揭示关于 Poincaré 映射 (12.3.1) 结构的更多信息. 为了寻找稳定周期轨道是如何得到保持的方法, 我们选择

$$f_1(\varphi, \mu) = \mu \cos \pi\omega(\mu) \sin 2\pi\varphi - \mu \sin \pi\omega(\mu) \cos 2\pi\varphi.$$

于是 Poincaré 映射就写为

$$\bar{\varphi} = \omega(\mu) - \varphi + \mu \sin(2\pi\varphi - \pi\omega(\mu)) \mod 1.$$

注意到这个映射有不动点 $\varphi_0 = \dfrac{\omega(\mu)}{2}$, 其乘子等于 $-1 + 2\pi\mu$, 即对所有 $\mu > 0$ 这个点是稳定的.

我们看到 Medvedev 的例子描述了一个极端退化的情况. 稳定周期轨道的蓝天突变的一般例子 (那时本质映射的度数 m 等于零) 在下一节给出.

现在我们简短地考虑如果 W_L^u 是非光滑 Klein 瓶将会发生什么的问题. 由于定理 12.5 和定理 12.6 在这种情形下可用, 得知当 $\mu > 0$, 大叶条件或者小叶条件满足时可能出现混沌. 但是, 定理 12.7 的直接类似在这里并不存在, 因为有下面的可能性:

即使 W_L^u 是非光滑的, 对 μ 的所有小正值, 系统仍然可具有简单动力学.

如果对所有 ν, 本质映射 (12.3.3) 只有有限个周期轨道, 则上面的情况可能发生. 例如, 对 $f_0(\varphi) = \dfrac{C}{2\pi} \sin 2\pi\varphi$, 可以证明本质映射只有有限个不动点和周期 –2 点, 但若, 例如 $C < \sqrt{2}$, 则对所有 ν 没有其它周期轨道.

12.4 蓝天突变

现在我们考虑鞍 – 结点周期轨道 L 的大范围不稳定集 W_L^u 不是流形但有如图 12.4.1 所示的结构的情形. 这意味着确定在截面 $S_0 : \{x = -d^-\}$ 上的曲线 $l^+ = W_L^u \bigcap S_0$ 的同伦类的整数 m 等于零. 换句话说, 12.2 节中的本质映射这时有形式

$$\bar{\varphi} = \omega + f_0(\varphi) \mod 1, \tag{12.4.1}$$

其中 f_0 是周期 –1 光滑函数.

定理 12.9　考虑单参数动力系统族, 在 $\mu = 0$ 它有鞍 – 结点周期轨道 L, 使得在大范围不稳定集 W_L^u 中所有不位于 W_L^{ss} 中的轨道当 $t \to +\infty$ 时都趋于 L. 设本质映射对所有 φ 满足 $m = 0$ 和 $|f_0'(\varphi)| < 1$. 则对 $\mu > 0$, 鞍 – 结点消失后, 系统有稳定周期轨道 L_μ (不同伦于 U 中的 L), 它是 U 中所有轨线仅有的吸引子.

不分支, 我们有蓝天突变的一个例子 [152].

如果鞍 – 结点 L 是简单的, 则所有邻近的系统有接近于 L 的鞍 – 结点周期轨道, 它们组成余维 1 分支曲面. 由构造 (见 12.2 节), 在这个分支曲面上函数 f_0 连续依赖于系统. 因此, 如果定理 12.9 的条件被具有简单鞍 – 结点的某个系统满足, 则在分支曲面上它们对所有附近的系统也满足. 由此得知定理 12.9 对任何与这个曲面横截相交的单参数族成立. 换句话说, 我们的蓝天突变**一般地出现在单参数族中**. 对应的分支曲面是周期轨道 (这里是轨道 L_μ) 的一个新的稳定性边界, 在二维系统没有这样的类似.

注意, W^u_L 的这个特殊拓扑结构对实现蓝天突变还不充分: 在定理 12.9 中还存在保证压缩需要的定量条件. 如果这个条件被破坏, 即如果在某 φ 有 $|f_0'(\varphi)| > 1$, 则恰如上几节考虑的情形, **在区域 $\mu > 0$ 出现无穷多个分支**. 事实上, 考虑映射 (12.4.1) 到 $\mathbb{R}^1$ 的提升:

$$\bar{\varphi} = \omega + f_0(\varphi). \tag{12.4.3}$$

这个映射的不动点对应于本质映射 (12.4.1) 的不动点. 由于 f_0 是周期函数, 它有界. 因此, (12.4.3) 始终至少有一个不动点, 且当 ω 增长时对应的 φ 值变得任意大. 在使得 $f_0'(\varphi) < 1$ 的区域内, 不动点的坐标是 ω 的单调增加函数, 但它在区域 $f_0'(\varphi) > 1$ 内是减少的. 因此, 如果在 φ 的某个区间 $|f_0'(\varphi)| > 1$, 则我们必然有 ω 值的序列, 对此或者稳定和不稳定不动点合并为鞍 – 结点, 或者稳定不动点改变它的稳定性而产生倍周期. 由于 $\omega \to \infty$ 对应于 $\mu \to +0$ 以及 Poincaré 映射 T 任意接近地趋于本质映射 (定理 12.4), 由此得知当 $\mu \to +0$ 时映射 T 的不动点必须产生同样的分支无穷多次.

此外, 由定理 12.5 和定理 12.6 得知, 如果定理 12.9 的条件 $|f_0'(\varphi)| < 1$ 不成立, 则出现混沌性态也是有可能的. 特别地, 大叶条件 (12.2 节) 在这里等价于强稳定叶层的叶片的存在性, 它与局部截面 $S: \{\varphi = 常数\}$ 和 W^u_L 的交的至少两个连通分支相交 (见图 12.4.2). 借助本质映射, 这个条件写为

$$\max f_0 \geqslant \min f_0 + 1, \tag{12.4.4}$$

即这个不等式将保证对所有小的 $\mu > 0$ 有混沌.

为了使得如图 12.4.1(a) 所示的 W^u_L 的构形对 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ 中的流事实上是可能的看得清楚起见, 我们考虑下面的构造. 设三维向量场的**双**参数族, 对某些参数值有鞍 – 结点周期轨道 L 和鞍 – 结点平衡态 O. 假设 W^u_L 上的所有轨道当 $t \to +\infty$ 时趋于 O, 且 O 的一维分界线走向 L, 如图 12.4.3 所示. 如果系统的一个参数按照下面方式引入, 当对它稍作调整时 O 消失但 L 不消失, 则 W^u_L 将有所要求的结构.

按照这个方法, 具有解析右端的三维系统族被明显设计出来实现蓝天突变 [53].

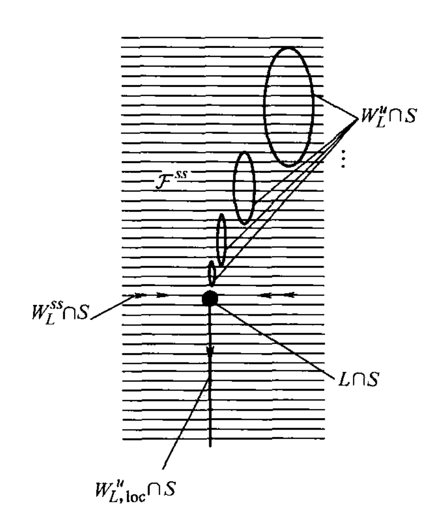


图 12.4.2 混沌性态的选择由对应的 Poincaré 映射的鞍 – 结点不动点的消失得到, 假设压缩条件不满足但大叶条件满足: 叶层 $\mathcal{F}^{ss}$ 的每一个叶片必须与 $W^s \bigcap S$ 的至少两个连通分支相交.

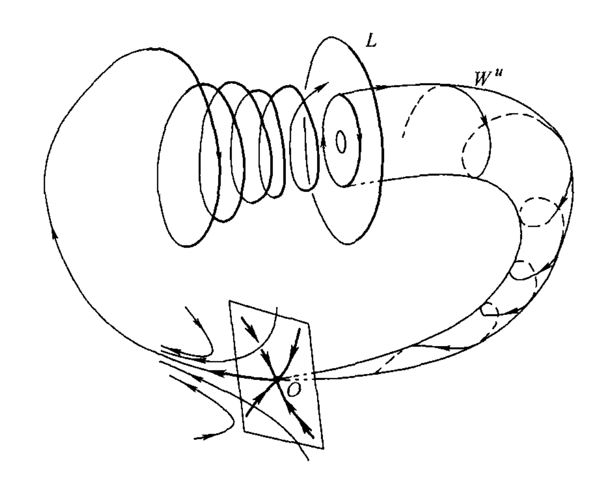


图 12.4.3 蓝天突变发展的现象情景: 当鞍 – 结点平衡点 O 消失时, 鞍 – 结点周期轨道 L 的不稳定流形有如图 12.4.1(a) 所示的所要求的结构.

这个族是

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x(2+\mu-B(x^2+y^2))+z^2+y^2+2y \equiv P,\\
\dot{y} &= -z^3-(1+y)(x^2+y^2+2y)-4x+\mu y \equiv Q, \qquad (12.4.5)\\
\dot{z} &= (1+y)z^2+x^2-\varepsilon \equiv R,
\end{aligned}$$

其中 μ, ε 和 B 是某些参数. 在 $\mu=\varepsilon=0$ 系统有闭积分曲线 $(x=0, z^2+y^2+2y=0)$. 有两个平衡态在其上 (见图 12.4.5(a)). 第一个 $O'(0,-2,0)$ 是简单鞍 – 结点, 它有一个零特征指数 $\lambda_1=0$ 以及两个负特征指数可从方程 $\lambda^2+4B\lambda+8B-12=0$

求得. 第二个平衡态 $O(0,0,0)$ 也有一个零指数 $\lambda_1=0$, 但还有一对纯虚特征指数 $\lambda_{1,2}=\pm 2i$. 点 O' 是余维 1 (简单鞍 – 结点), 但点 O 是余维 3, 因为二维散度 $\sigma(z)=P'_x+Q'_y=-z^2+\cdots$ 在 O 从 z 的二次项开始. 这意味着在 (x,y) – 平面从 O 可出现二重 (半稳定) 环 [51].

分支图如图 12.4.4 所示. 当 $\varepsilon>0$ 时, 鞍 – 结点 O' 消失, 这时平衡态 O 分解为两个平衡态 O_1 和 O_2 (图 12.4.4 中的区域 b), 其中 $z_{O_{1,2}}=\mp\sqrt{2\varepsilon}+\cdots$. 在这个区域内 O_1 是稳定点, O_2 是鞍 – 焦点 (2,1), 它的一维分界线当 $t\to+\infty$ 时趋于 O_1 (图 12.4.5(b)). 当 μ 增加时, 通过图 12.4.4 中在曲线 AH_1 上的超临界 Andronov-Hopf 分支, 点 O_1 失去它的稳定性而变成鞍 – 焦点 (1,2), 鞍 – 焦点 O_2 的不稳定分界线现在趋于新产生的稳定周期轨道, 如图 12.4.5(c) 所示. 平衡态 O_2 在曲线 AH_2 上分支. 它也产生超临界 Andronov-Hopf 分支, 故它变成全排斥. 当 $t\to+\infty$ 时鞍点周期轨道 L_2 的不稳定流形继续趋于 L_1, 如图 12.4.5(d) 所示. 在标有 SN 的分支曲线上两个环合并组成鞍 – 结点环 L^*, 它的不稳定流形双向渐近于 L^*, 如图 12.4.5 (e) 所示. 在曲线 SN 的右方环 L^* 消失, 按照定理 12.9 大范围稳定性被新的大振幅的稳定周期轨道 L_{bs} 所继承, 它不同伦于 L_1 或 L_2.

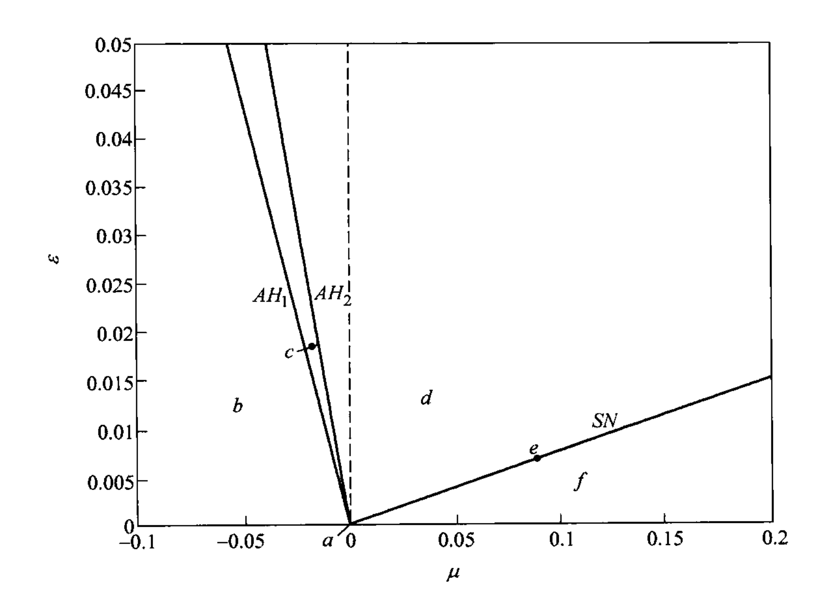


图 12.4.4　系统 (12.4.5) 的 (μ,ε) – 分支图.

另一类可自然出现蓝天突变的例子由**奇摄动系统**给出, 即下面形式的系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=g(x,y,\varepsilon),\\ \varepsilon\dot{y}&=h(x,y,\varepsilon),\end{aligned}\tag{12.4.6}$$

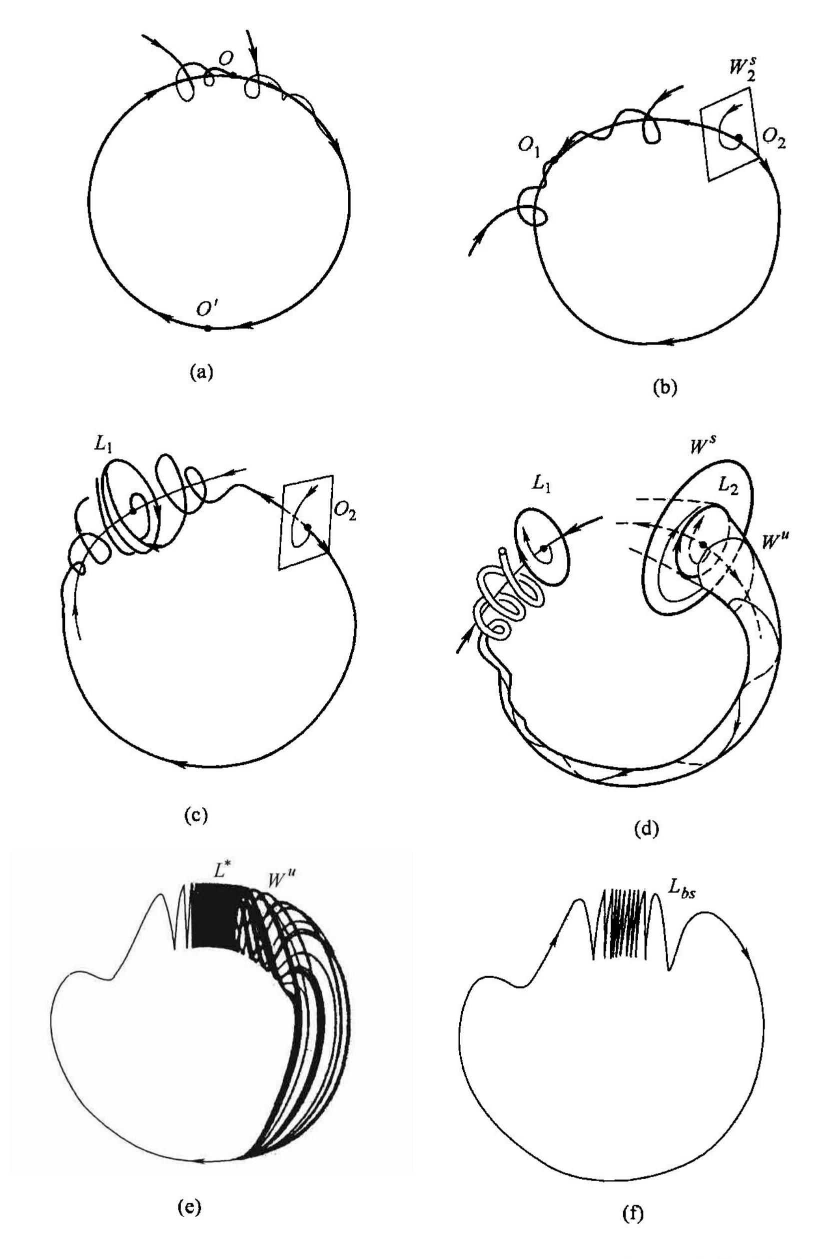


图 12.4.5　当图 12.4.4 中的 μ, ε 从 (a) 到 (f) 变化时, (12.4.5) 中的通向蓝天突变的道路.

其中 ε 是小参数. 这个系统由时间变换 $t = \varepsilon\tau$ 尺度化. 在新时间 τ 下, (12.4.6) 变成

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \\ y' &= h(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{12.4.7}$$

其中的导数是对 τ 的导数. 在 $\varepsilon=0$ 取极限, 我们得到

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ y' &= h(x,y,0). \end{aligned} \tag{12.4.8}$$

这里的第二个方程称为**快**系统. 为简单起见, 我们假设 $x\in\mathbb{R}^1$. 变量 x 可视为参数, 它控制快变量 y 的运动.

系统 (12.4.8) 从任何 (x,y) 出发的轨线典型地收敛于对应于所选 x 值的快系统的吸引子. 这个吸引子可以是稳定平衡态, 或者是稳定周期轨道, 或者是不大平凡的结构. 我们在这里不准备解释最后那种可能性. 当快系统的平衡态或周期轨道结构稳定时, 它光滑依赖于 x. 因此, 我们得到系统 (12.4.8) 的光滑吸引的不变流形: 快系统的平衡态组成曲线 M_{eq}, 周期轨道组成二维柱面 M_{po}, 如图 12.4.6 所示. 局部地, 在每个结构稳定的快平衡点或者周期轨道附近, 这样的流形是系统 (12.4.8) 的中心流形. 由于中心流形在任何附近的系统中存在 (见第 5 章), 得知系统 (12.4.7) 对所有小 ε 存在光滑吸引不变流形 $M_{\mathrm{eq}}(\varepsilon)$ 和 $M_{\mathrm{po}}(\varepsilon)$ [48].

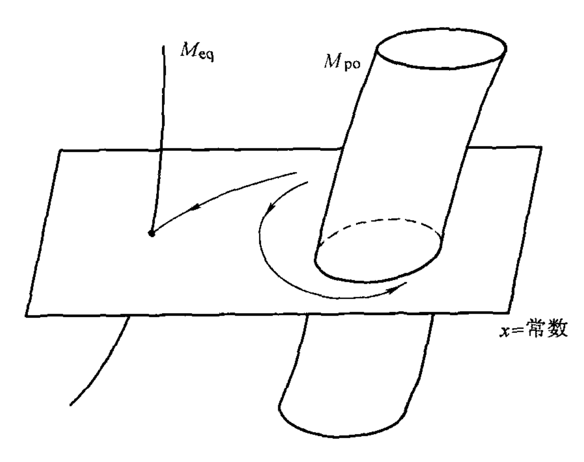


图 12.4.6 当 x 变化时快系统的结构稳定平衡点和结构稳定极限环组成的不变流形: 它们分别是曲线 M_{eq} 和二维柱面 M_{po}.

因此, 对小的 ε, 系统 (12.4.7) 的轨线按下面方式变化: 经过某有限时间它来到不变流形 M_{eq} 或 M_{po} 之一的小邻域, 因此它的 x - 坐标接近不动. 于是它沿着不变流形变化, 故它对应于 x 的慢变化. 对原始系统 (12.4.6), 我们看到, y - 变量到不变流形的跳跃是跟随 x - 变量的有限速度的运动进行的. 另外, 如果这是快周期轨道的流形, 则我们有 y - 变量在流形上的快圆周运动, 如图 12.4.7 所示.

快系统的平衡态由条件 $h(x,y,0)=0$ 确定, 它给出 M_{eq} 的方程. 如果 $y=y_{\mathrm{eq}}(x)$ 是 M_{eq} 的稳定分枝, 则 x 沿着它的发展, 到一阶 ε 的方程, 并由方程

$$\dot{x}=g(x,y_{\mathrm{eq}}(x),0). \tag{12.4.9}$$

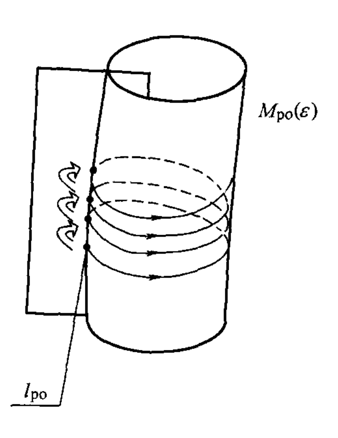


图 12.4.7 沿着不变柱面 $M_{po}(\varepsilon)$ 的快圆周运动在与截面的交线 $l_{po}(\varepsilon)$ 上定义了 Poincaré 映射.

这是一个一维系统, 它可有稳定和不稳定平衡态, 它们对应于完全系统 (12.4.6) 或者 (12.4.7) 的稳定平衡态和鞍点平衡态. 沿着 M_{eq} 的发展或者以稳定点之一为极限, 或者到达 x 的临界值的小邻域. 回忆我们将 x 考虑为快系统的控制参数, 以及 x 的临界值对应于快系统的分支值. 特别地, 在某 x^* 快系统的两个平衡态 (稳定和鞍点) 可合并成为鞍 - 结点. 这对应于在 M_{eq} 上 x 的极大 (或极小), 故当 x 到达 x^* 的小邻域时, 沿着 M_{eq} 的稳定分枝 x 不能进一步增加 (相应的减少). 代替的是轨道跳到新吸引子上, 它是快系统在 $x = x^*$ 的鞍 - 结点分界线的 ω - 极限集, 如图 12.4.8 所示.

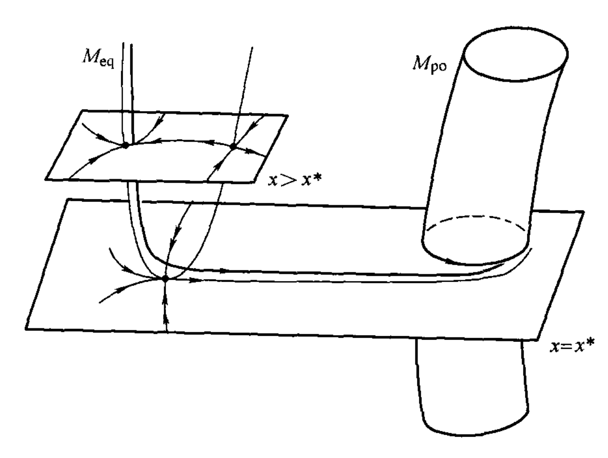


图 12.4.8 当稳定结点和鞍点发展到合并并消失时所出现的分裂时刻. 代表点跳到稳定柱面上.

为了求 x 沿着柱面 M_{po} 的发展, 我们必须求解对应快周期轨道的方程 $y = y_{po}(\tau; x)$, 然后将 $y = y_{po}(t\varepsilon; x)$ 代入 (12.4.6) 的第一个方程的右端, 并在一个周期上取平均. 所得平均给出沿着 M_{po} 的稳定分枝的 x - 运动的一阶近似, 即

$$\dot{x} = \phi(x) \equiv \frac{1}{T(x)} \int_0^{T(x)} g(x, y_{po}(\tau; x)) d\tau, \tag{12.4.10}$$

其中 $T(x)$ 是对应于所给 x 值的快周期轨道的周期. 利用横截于快运动的截面切割柱面, 我们求得在交线 $l_{\mathrm{po}}(\varepsilon)$ 上的 Poincaré 映射, 如图 12.4.7 所示, 它的一阶近似由

$$\bar{x} = x + \varepsilon\phi(x)T(x) \tag{12.4.11}$$

给出. 这是一维映射, 它可有稳定和不稳定不动点 (在 $\phi(x)$ 的零点). 它们对应于系统 (12.4.6) 的稳定不动点和鞍点周期轨道. 沿着 l_{eq} 的发展或者收敛于稳定不动点之一, 或者到达 x 临界值的小邻域. 特别地, 如果在某 x^*, 稳定的快周期轨道与鞍点周期轨道在鞍 – 结点合并, 则轨道必须跳到快系统在 $x = x^*$ 的鞍 – 结点不稳定流形的 ω – 极限集.

现在我们假设奇摄动系统有快系统稳定平衡点曲线 M_{eq}, 沿着它 x – 变量减少直到它到达临界值 x_1^*. 在 $x = x_1^*$, 轨线跳到快系统稳定周期轨道的柱面 M_{po}. 假设 x 沿着 M_{po} 增加, 以及 $x = x_2^*$ 是在 M_{po} 上的临界值, 在那里轨线跳到 M_{eq}, 如图 12.4.9 所示 (注意 y 必须至少是三维的才能使得这个特殊图像成为可能). 设在曲线 $l_{\mathrm{po}}(\varepsilon)$ 上的 Poincaré 映射有鞍 – 结点不动点. 它对应于在柱面 $M_{\mathrm{po}}(\varepsilon)$ 上的鞍 – 结点周期轨道 L. 这个周期轨道的不稳定流形与 L 上面的 $M_{\mathrm{po}}(\varepsilon)$ 重合. 在 $x = x_2^*$ 的跳跃以后, 流形 W_L^u 收缩到非常细的管子, 它沿着曲线 M_{eq} 走直到在 $x = x_1^*$ 作新的跳跃, 此后它围绕 $M_{\mathrm{po}}(\varepsilon)$ 从下面回到 L. 这确切地给出定理 12.9 要求的 W_L^u 的结构. 此外, 按定理要求的压缩条件在这里也可计算得到满足. 因此在考虑的奇摄动系统中出现蓝天突变.

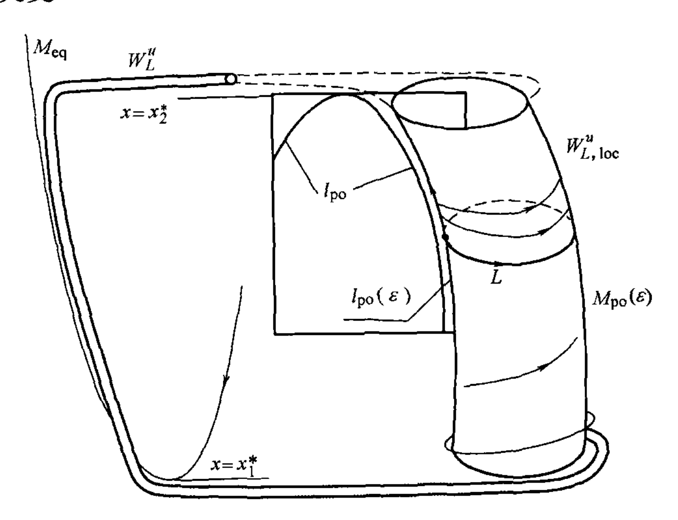


图 12.4.9　快 – 慢系统中的蓝天突变机制.

事实上, 在奇摄动系统中从一个稳定分枝到另一个分枝的触发是最典型的现象, 因此当在快周期轨道分枝和快平衡态分枝之间观察到跳跃时, 我们每个时候都可能会遇到蓝天突变.

作为这节的结束我们注意, 上面建议的机制可能对经常观察到的神经活动模型中从低振幅 (尖峰) 振动到大脉冲振动的转移, 或者对喷气发动机中的流的振荡的定性解释有用.

12.5 关于嵌入流

这一节讨论鞍 - 结点周期轨道附近流的局部性态问题. 由于与中心流形横截的方向上的动力学是平凡的 (它是强压缩), 我们限于考虑在中心流形上的系统

$$\dot{x} = G(x, \varphi, \mu), \quad \dot{\varphi} = 1, \tag{12.5.1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^1, \varphi \in \mathbb{S}^1$, G 是光滑函数, 关于 φ 是周期 -1 的, 使得 $G(0, \varphi, 0) \equiv 0$. 我们假设 $L: \{x = 0\}$ 是在 $\mu = 0$ 的鞍 - 结点周期轨道, 对 $\mu > 0$ 它消失.

我们在这里建立的主要结果是对 $\mu \geqslant 0$ 这个系统的 x - 变量的发展将由**自治**方程 (与角变量 φ 无关) 很好刻画. 它的直接好处是这样的方程容易积分 (因为 x 是一维的), 这允许得到鞍 - 结点附近局部动力学的长时间渐近性.

设 G 关于 (x, φ, μ) 充分光滑. 由定理 3.23 得知 (见 3.14 节) 我们总可以假设 G 关于 x 和 μ 的 Taylor 展开的某充分长的有限段与 φ 无关.

我们还假设 L 是简单鞍 - 结点. 因此, 对 $\mu \geqslant 0$ 函数 G 可表示为形式

$$G(x, \varphi, \mu) = \mu + x^2 + O(x^2 + \mu). \tag{12.5.2}$$

注意到, G 中依赖于 φ 的项的次数可使得任意高. 故可取任意大的 k 使得在变量 x 的适当选择下, 我们有

$$\lim_{\mu \to +0, x \to 0} \frac{1}{G^k} \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0. \tag{12.5.3}$$

我们也可加入任意固定个数的导数

$$\lim \frac{1}{G^k} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \lim \frac{1}{G^k} \frac{\partial^3 G}{\partial \varphi^3} = 0, \cdots. \tag{12.5.4}$$

引理 12.3 对 $\mu \geqslant 0$, 存在光滑的角变量变换 $\varphi \mapsto \Phi$ 和时间尺度化, 将系统化为自治形式

$$\dot{x} = \tilde{g}(x, \mu), \quad \dot{\Phi} = 1. \tag{12.5.5}$$

如我们已经指出的, 这个结果的重要性是从任何一个截面 $x =$ 常数 到这个形式的任何另一个截面的飞行时间**与这个截面上的初始点无关**. 因此, 当系统化为形式 (12.5.5) 时, 引理 12.2 成立, 由此得到定理 12.4 的约化原理.

注意, 当系统是 (12.5.5) 的形式时, 截面 $\Phi = 0$ 上的局部 Poincaré 映射与系统 $\dot{x} = \tilde{g}(x, \mu)$ 的自治流的时间 1 移位重合. 在这种情形下, 我们称这个为**嵌入流映射**. 严格地讲, 我们还没有证明原系统 (12.5.1) 的局部 Poincaré 映射是嵌入流: 原来的

Poincaré 映射是定义在不同截面 $\varphi=0$ 上的. 而截面的改变等价于在截面上的变量变换 (见 3.1 节), 但是映射可以嵌入流的事实其成立与坐标的选择无关.

现在我们来证明这个引理. 设 $\tau(x;x_0,\varphi_0,\mu)$ 是时间, 在这时间系统 (12.5.1) 从 $(x=x_0,\varphi=\varphi_0)$ 出发的轨道到达给定的 x 值. 由于对 $\mu>0$ 有 $\dot{x}>0$, 以及在 $\mu=0$ 有 $\dot{x}\neq 0$, 得知函数 τ 对 $\mu>0$ 在所有小 x 和 x_0 有定义且光滑, 以及在 $\mu=0$ 对 x_0 和 x 有相同符号. 记

$$u\equiv\frac{\partial\tau}{\partial\varphi_0}.$$

我们证明在光滑拓扑下, 当 $\mu\to+0$ 时函数 u 有有限极限, 其极限对所有 φ_0 和所有满足 $x_0\neq 0$ 和 $x\cdot x_0\geqslant 0$ 的小 x_0 和 x 是一致的[5].

事实上, 积分系统 (12.5.1) 得

$$\varphi=\varphi_0+\tau(x;x_0,\varphi_0,\mu), \tag{12.5.6}$$

$$\tau(x;x_0,\varphi_0,\mu)=\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{G(s,\varphi_0+\tau(s;x_0,\varphi_0,\mu),\mu)}. \tag{12.5.7}$$

(12.5.7) 关于 φ_0 微分得

$$u(x)=-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{G^2}\frac{\partial G}{\partial\varphi}\bigg|_{(s,\varphi_0+\tau(s),\mu)}[1+u(s)]ds \tag{12.5.8}$$

(为简短起见我们没有标出 τ 关于 (x_0,φ_0,μ) 的依赖性). 由 (12.5.3), 我们有

$$\frac{G'_\varphi}{G^2}\to 0 \quad 当 \quad \mu\to+0, x\to 0, \tag{12.5.9}$$

因此 (12.5.8) 右端的积分算子是压缩的. 从而由 Banach 压缩映射原理, 函数 u 作为积分方程 (12.5.8) 的唯一连续解可用逐次逼近法求得.

利用压缩映射原理, 解 $u(x;x_0,\varphi_0,\mu)$ 连续依赖于 (x_0,φ_0,μ), 如果 (12.5.8) 的右端的积分算子连续依赖于这些数值. 注意, 进入表达式 (12.5.8) 中的函数 τ 仅当 $x\cdot x_0>0$ 时在 $\mu=0$ 有有限极限. 然而, 由于 (12.5.9), (12.5.8) 中的积分在 $x=0$ 有有限极限. 因此, 函数 $u(x;x_0,\varphi_0,\mu)$ 在 $\mu=0$ 有有限极限且在区域 $\{x\cdot x_0\geqslant 0, x_0\neq 0\}$ 内一致.

利用估计 (12.5.4), 对 u 关于 φ_0,x_0 和 μ 的任何给定个数的导数 (这个数可用增加估计中的 k 而使得任意大) 我们可重复这些讨论. 这就完成了论断的证明.

现在, 由于对小的 x,x_0 和 μ, 函数 u 的方程 (12.5.8) 的右端是小的, 故 u 本身很小. 此外, 注意到当 $x-x_0\to 0$ 时它一致地趋于零. 对 u 的导数同样结论成立 (因为它们是从相同形式的积分方程得到的). 现在我们看到函数 $u(0;x_0,\varphi_0,\mu)$ 对所有 $\mu\geqslant 0$ 有定义且光滑 (当然, 可能发生当 $\mu\to+0$ 时函数 u 或者它的某些导数在 $x_0=+0$ 和 $x_0=-0$ 有不同的极限, 但所有这些极限如我们刚刚证明的都为零).

[5] 这里我们有在 $x=0$ 的收敛性, 这是很重要的, 尽管 $\mu\to+0$, $x\to 0$ 时函数 τ 趋于无穷.

现在我们引入新的角变量

$$\Phi=\varphi+\int_0^{\varphi}u(0;x,\phi,\mu)d\phi. \tag{12.5.10}$$

因为 u 小, 这是一个恰当的变量变换. 此外, u 是周期 -1 函数的导数 $(u=\dfrac{\partial\tau}{\partial\varphi_0})$, 因此右端的积分事实上定义了一个周期 -1 函数.

设在旧变量下, 从 (x_0,φ_0) 出发的轨道在时刻 $\tau(x_1;x_0,\varphi_0,\mu)$ 到达点 (x_1,φ_1). 微分明显的等式

$$\tau(x_1;x_0,\varphi_0,\mu)=\tau(0;x_0,\varphi_0,\mu)-\tau(0;x_1,\varphi_1,\mu)$$

(从 x_0 到 x_1 的飞行时间等于从 x_0 到 0 的飞行时间加上从 0 到 x_1 的飞行时间), 我们得到

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_0}=\frac{1+u(0;x_0,\varphi_0,\mu)}{1+u(0;x_1,\varphi_1,\mu)}.$$

比较这个公式和 (12.5.10), 我们看到在新变量下

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\Phi_0}\equiv 1. \tag{12.5.11}$$

尺度化时间变量使得 $\dot\Phi=1$. 现在 Φ_1 和 Φ_0 之间的差是从 $x=x_0$ 到 $x=x_1$ 的飞行时间. 由 (12.5.11), 这个时间与初始值 Φ_0 无关, 仅依赖于 (x_0,x_1,μ). 这意味着现在 $\dfrac{dx}{d\Phi}$ 与 Φ 无关, 这就给出了引理.

如我们已经指出的, 引理 12.3 可以重叙述为对 $\mu\geqslant 0$, 在简单鞍 - 结点不动点附近将充分光滑的一维映射嵌入一维光滑流的可能性. 类似的结果在 [74] 被证明, 它与平面半稳定环消失时出现鞍点之间分界线连接问题有关 (见 8.1 节), 以及在 [45] 中被证明, 它与在非光滑环面上鞍 - 结点周期轨道消失时出现奇怪吸引子的问题有关. 在 $\mu=0$ 的嵌入流属于 Takens (见 [97]). 我们的证明以 [152, 139] 中的方法为基础. 在 [140] 中, 在 $\mu=0$ 光滑嵌入流的存在性是在没有高次光滑性假设和没有鞍 - 结点是简单的假设下证明的.

当在 12.2 节定义本质映射时, 我们用到嵌入流的下面**刚性**性质:

引理 12.4 设 $\mathbb{C}^r$ - 光滑 $(r\geqslant 2)$ 映射

$$\bar x=x+g(x) \tag{12.5.12}$$

在 $x=0$ 有鞍 - 结点, 即 $g(0)=0, g'(0)=0$, 以及对 $x\neq 0$ 有 $g(x)>0$. 设这个映射与光滑流

$$\bar x=x+\tilde g(x) \tag{12.5.13}$$

的时间 - 1 映射重合. 则函数 $\tilde g$ 由 g 唯一确定.

证明　映射 (12.5.12) 和流 (5.12.13) 的时间 -1 映射重合, 当且仅当

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{ds}{\tilde{g}(s)} = 1. \tag{12.5.14}$$

由于 $x=0$ 必须是乘子等于 1 的 (12.5.13) 的时间移位的不动点, 由此得知 $\tilde{g}$ 与 $\tilde{g}'$ 在零必须为零. 在 (12.5.14) 中令 $x \to 0$ 取极限得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{g}(x)}{g(x)} = 1 \tag{12.5.15}$$

(为了证明, 注意

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{ds}{\tilde{g}(s)} = \frac{\bar{x}-x}{\tilde{g}(x)+\dfrac{1}{2}\tilde{g}'(x)(\bar{x}-x)+o(\bar{x}-x)} \sim \frac{g(x)}{\tilde{g}(x)},$$

这里我们用了 $\tilde{g}$ 在零的光滑性).

微分 (12.5.14), 我们得到

$$\frac{1+g'(x)}{\tilde{g}(\bar{x})} - \frac{1}{\tilde{g}(x)} = 0. \tag{12.5.16}$$

因此, 如果存在两个提供映射 (12.5.12) 嵌入流的函数 $\tilde{g}_1$ 和 $\tilde{g}_2$, 则由 (12.5.16) 得知

$$\frac{\tilde{g}_1(\bar{x})}{\tilde{g}_2(\bar{x})} = \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}.$$

换句话说, 比 $\dfrac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2}$ 关于映射 (12.5.12) 不变. 由于 (12.5.1) 的任何轨道的向前迭代或向后迭代趋于零, 我们得到

$$\frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}.$$

由于 (12.5.15) 我们有 $\tilde{g}_1 \equiv \tilde{g}_2$, 这就完成了引理 12.4 的证明.

第 13 章　鞍点平衡态的同宿回路分支

二维情形从鞍点分界线回路产生极限环的问题已经被 Andronov 和 Leontovich 在上世纪 30 年代末解决了, 虽然相应内容的发表在后来几年. 他们对这个主题的研究包含一般情形和任意高阶的退化情形. 对后者他们的理论与 Dulac 考虑的关于分界线回路的稳定性工作有关. 这一章的前面三节将叙述这些结果. 我们对主要定理的证明不同于 [12] 中的古典处理. 就是说, 我们明确地将问题化为对回路附近的 Poincaré 映射的研究. 这个方法允许我们把所得结果自然地推广到高维系统. 此外, 应用同宿回路附近的中心流形定理 (第 6 章), 在某些情形我们可把高维问题直接化为二维问题.

但是, 应该强调这种化为二维的情形并不是**永远**可能的. 特别地, 当平衡态是鞍 - 焦点时就不可能办到. 此外, 在某些条件下, 当无穷多个鞍点周期轨道在鞍 - 焦点同宿回路的邻域内共存时我们就会遇到重要的新现象. 因此, 高维系统中寻求周期轨道稳定性边界的问题要求对余维 1 同宿回路的所有情形, 包括简单动力学和复杂动力学, 都得进行深刻和完全的分析. 这个问题已经由 L.Shilnikov 在上世纪 60 年代解决了.

我们在 13.4 节证明从鞍点量为负的鞍点同宿回路产生稳定周期轨道的主要定理. 在 13.4 节和 13.5 节讨论 (后者处理维数大于 1 的鞍点不稳定流形) 从回路产生鞍点周期轨道, 或者系统具有复杂动力学 (鞍 - 焦点情形) 的其它情形.

在 13.6 节我们研究某些余维 2 同宿分支. 在 13.7 节重温 8 字形同宿分支以及有关最简单的异宿环的结果.

13.1　平面上分界线回路的稳定性

假设二维光滑系统

$$\dot{x} = X(x)$$

有鞍点型结构稳定平衡态 $O(0,0)$. 回忆在这种情形下鞍点有两个一维局部不变流形: 稳定流形

$$W_O^s = O \bigcup \Gamma_1^+ \bigcup \Gamma_2^+,$$

和不稳定流形

$$W_O^u = O \bigcup \Gamma_1^- \bigcup \Gamma_2^-,$$

其中 $\Gamma_{1,2}^+$ 表示鞍点 O 的稳定分界线, $\Gamma_{1,2}^-$ 表示鞍点 O 的不稳定分界线.

如果 Γ_1^+ 和 Γ_1^- 重合, 则 $\Gamma = \Gamma_1^+ = \Gamma_1^-$ 称为**分界线回路** (或者**同宿回路**). 分界线回路的闭包 $\bar{\Gamma}$ 是闭不变集 $\bar{\Gamma} = O \bigcup \Gamma$. 我们这一节的目的是描述在 $\bar{\Gamma}$ 的充分小邻域内轨线的性态 (分界线回路分支将在下一节分析).

$\bar{\Gamma}$ 的充分小邻域是一个环域, 它被 $\bar{\Gamma}$ 划分为 U 和 V 两个区域, 如图 13.1.1 所示. 设 V 是外区域, 其中存在两个属于 Γ_2^+ 和 Γ_2^- 的通过 O 的小段. 显然从 V 中出发的所有其它轨线当 $t \to -\infty$ 和 $t \to +\infty$ 时都必须离开 V. 因此我们只能从一侧, 即从内区域 U 定义 $\bar{\Gamma}$ 的稳定性. 在这个意义下我们说, 分界线回路是单侧渐近稳定, 如果它是从 U 中出发的所有轨线的 ω - 极限.[1] 反之, 分界线回路是不稳定的, 如果它是 U 中所有轨线的 α - 极限.

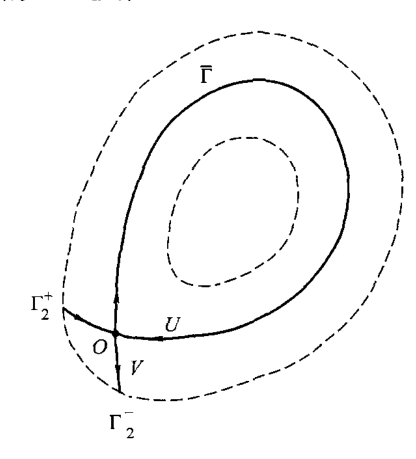


图 13.1.1　分界线回路 $\bar{\Gamma}$ 在由外邻域 V 和内邻域 U 组成的环域内.

研究同宿回路的一个基本方法是通过两个映射的叠加来构造 Poincaré 映射 T: 局部映射 T_0 和大范围映射 T_1. 为此在鞍点附近选择两条截线 S_0 和 S_1, 它们都与 Γ 横截相交, 如图 13.1.2 所示. 映射 $T_1 : S_1 \to S_0$ 定义如下: 在 S_1 上任取一点, 它在 T_1 作用下的像是其轨线与 S_0 的交点. 因为从 S_1 到 S_0 的飞行时间有限, 故 T_1 是微分同胚, 且由 Γ 和 S_1 的交点附近的 Taylor 展开所近似. 对映射 $T_0 : S_0 \to S_1$, 这里的情况并不很明显, 因为轨线任意接近鞍点, 因此从 S_0 到 S_1 的飞行时间不再有限.

[1] 可能发生 $\bar{\Gamma}$ 是单侧稳定, 但不是渐近稳定. 例如, 在 Hamilton 系统情形, 区域 U 可被周期轨道所充满.

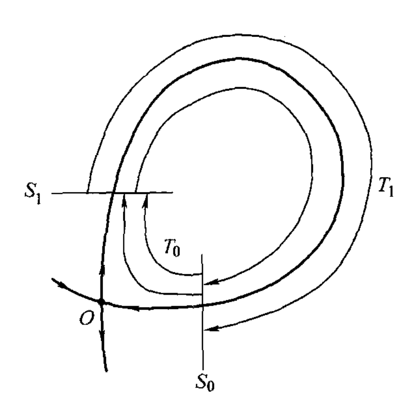


图 13.1.2 Poincaré 映射 T 是由系统轨道表示的从截线 S_0 到 S_1 的局部映射 T_0 和从 S_1 到 S_0 的大范围映射 T_1 的叠加.

因此, 第一个问题是研究同宿回路以得到局部映射 T_0 的适当估计. 为此我们要在 O 的邻域内将系统化为特殊形式 (见本书第一卷的附录 A).

平面上分界线回路的稳定性问题当在鞍点的所谓散度

$$\sigma_0 = \operatorname{div} X|_O$$

为非零时容易解决. 这时, 我们有下面的结果:

定理 13.1 如果 $\sigma_0 < 0$, 则同宿回路 $\bar{\Gamma}$ 单侧渐近稳定. 如果 $\sigma_0 > 0$, 同宿回路 $\bar{\Gamma}$ 不稳定.

我们在这里对系统是 $\mathbb{C}^r$ – 光滑 $(r \geqslant 2)$ 证明这个定理. 在 $\mathbb{C}^1$ – 情形定理仍成立 (见下一节).

直化局部稳定和不稳定不变流形. 则在 O 附近系统取形式 (见 2.7 节)

$$\dot{x} = (\lambda + f(x,y))x, \quad \dot{y} = (\gamma + g(x,y))y, \tag{13.1.1}$$

其中 $\lambda < 0 < \gamma$, 且 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 光滑函数 f 和 g 在原点为零. 注意到 $\sigma_0 = \lambda + \gamma$. 回忆我们可以作另外的 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 光滑坐标变换, 使得系统保持形式 (13.1.1), 且使得函数 f 和 g 满足下面的恒等式(见定理 2.17)

$$f(x,0) \equiv 0, \quad f(0,y) \equiv 0, \tag{13.1.2}$$

$$g(x,0) \equiv 0, \quad g(0,y) \equiv 0. \tag{13.1.3}$$

大家知道 (例如见 [27]) 平面上鞍点附近的 $\mathbb{C}^r$ – 系统 $(r \geqslant 2)$ 可以用 $\mathbb{C}^1$ – 变换化为线性形式, 此时寻找映射 T_0 是很容易的. 不过, 形式 (13.1.1) — (13.1.3) 对我们的目的已经足够了, 因为在这种情形本质上不失去光滑性. 此外, 我们将发展这个方法使得可以把它直接推广到高维情形.

作时间尺度化变换 $dt \to (\gamma + g(x,y))^{-1}dt$, 于是这个系统取形式

$$\dot{x} = (-\nu + f(x,y))x, \quad \dot{y} = y, \tag{13.1.4}$$

这里的某个新函数 f 仍满足 (13.1.2). 其中比 $\nu = \left|\dfrac{\lambda}{\gamma}\right|$ 称为**鞍点指标**. 注意 $\nu > 1$ 对应负鞍点量 $\sigma_0, \nu < 1$ 对应于 $\sigma_0 > 0$.

选择小 $d > 0$ 并令 $x = d$ 是截线 $S_0, y = d$ 是截线 S_1 (假设分界线 Γ_1^+ 和 Γ_1^- 分别从正 x 和正 y 这边与鞍点 O 相连接). 如果系统局部线性 (即 (13.1.4) 中的 f 恒等于零), 则具有在 S_0 上的初始点 (d, y_0) 的解是

$$x = e^{-\nu t}d, \quad y = y_0 e^t.$$

从 S_0 到 S_1 的飞行时间 τ 可以从条件

$$d = y_0 e^{\tau}$$

求得. 因此,

$$\tau = -\ln\frac{y_0}{d}$$

(显然从 $y_0 \leqslant 0$ 出发的轨线永远不会到达 S_1). 因此, 在该线性情形, 轨线与截线 S_1 的交点 (x_1, d) 为

$$x_1 = e^{-\nu t}d = y_0^{\nu}d^{1-\nu}.$$

在 f 不为零的一般情形, 局部映射 T_0 的这个公式没有重大的改变.

引理 13.1 如果函数 f 满足 (13.1.2), 则系统 (13.1.4) 的局部映射有形式

$$x_1 = y_0^{\nu}d^{1-\nu} + o(y_0^{\nu}). \tag{13.1.5}$$

证明 我们可以证明 (13.1.4) 在 $t = 0$ 从 S_0 开始在 $t = \tau$ 碰到 S_1 的解满足

$$\begin{aligned} &y(t) = e^{t-\tau}d, \\ &x(t) = e^{-\nu t}d + \textstyle\int_0^t e^{-\nu(t-s)}f(x(s), y(s))x(s)ds. \end{aligned} \tag{13.1.6}$$

这里, $y(0) \equiv y_0$ 是 S_0 上初始点的坐标, $x(\tau) \equiv x_1$ 是轨线与 S_1 交点的坐标.

正如我们在 2.8 节证明过的, 积分方程 (13.1.6) 可用逐次逼近法求解, 即解 $x(t)$ 是由

$$x_{n+1}(t) = e^{-\nu t}d + \int_0^t e^{-\nu(t-s)}f(x_n(s), e^{s-\tau}d)x_n(s)ds \tag{13.1.7}$$

递归定义的序列 $x_n(t)$ 的极限, 其中我们取 $x_1(t) = e^{-\nu t}d$ 为第一次近似. 容易看出所有进一步的近似对 $t \in [0, \tau]$ 满足

$$|x_n(t)| \leqslant 2de^{-\nu t}. \tag{13.1.8}$$

事实上, 由归纳法, 只要 (13.1.8) 满足, 证明

$$\int_0^t |f(x_n(s), e^{s-\tau}d)|ds \leqslant \frac{1}{2}$$

就足够了. 由于 f 是在 $y=0$ 为零的光滑函数, 得知对某个常数 C 有 $|f(x,y)| \leqslant C|y|$. 因此上面的积分可用

$$Cde^{-\tau}\int_0^t e^s ds \leqslant Cd$$

估计. 显然只要 d 充分小这个积分小于 $\frac{1}{2}$. 这就证明了不等式 (13.1.8). 令 $n \to +\infty$ 取极限我们得到系统的解 $x(t)$ 满足相同估计, 即

$$x(t) \leqslant 2de^{-\nu t}. \tag{13.1.9}$$

由假设 [见 (13.1.2)], 函数 f 在 $y=0$ 为零. 因此,

$$|f(x,y)| \leqslant |y| \max |f'_y|,$$

其中的最大值是对固定的 x 值并在 $|y| \leqslant d$ 上取的. 由于 f 也在 $x=0$ 为零, 我们有 $f'_y(0,y) \equiv 0$. 由此上面的不等式给出下面的估计

$$|f(x,y)| \leqslant |y|o(1)_{x\to 0}.$$

因此, 在 (13.1.6) 中我们有

$$|f(x(s), y(s))| \leqslant e^{-\tau}o(e^s).$$

从而, 考虑到 (13.1.9), 我们得到

$$\left|\int_0^t e^{-\nu(t-s)}f(x(s),y(s))x(s)ds\right| \leqslant e^{-\nu t}e^{-\tau}o(e^t).$$

在 $t=\tau$, 我们从 (13.1.6) 得

$$x_1 \equiv x(\tau) = e^{-\nu\tau}d + o(e^{-\nu\tau}). \tag{13.1.10}$$

在 $t=0$ 由 (13.1.6) 的第一个方程得到飞行时间 τ 满足:

$$y_0 = e^{-\tau}d.$$

将它代入 (13.1.10) 得到引理 13.1.

注 由变量尺度化 $x_0 \to x_0 d$ 和 $y_1 \to y_1 d$, 我们总可以假设 (以后也将这样做) (13.1.5) 中的 $d=1$. 注意我们也可以对公式 (13.1.5) 进行微分: (13.1.5) 中 $o(y_0^\nu)$ 项的 s 阶 $(s=1,\cdots,r-1)$ 导数可容易地估计为 $o(y_0^{\nu-s})$. 我们跳过对这个导数估计

的证明, 因为它与本书第一卷附录 B 中对类似论述 (引理 3.6) 的证明思路完全一样. 接近的论述也将在 13.8节[见 (13.8.30) — (13.8.33)] 中给出. 应用这些估计到我们的情况, 我们得到如果系统是 $\mathbb{C}^r$ - 光滑 ($r \geqslant 3$), 则经过将系统化为形式 (13.1.1) — (13.1.3) 以后, 对任何满足 $\nu < \tilde{\nu} < \nu + \min(1,\nu)$ 的 $\tilde{\nu}$, 局部映射可以写为形式

$$x_1 = y_0^{\nu} + o(y_0^{\tilde{\nu}}). \tag{13.1.11}$$

此外, $o(y_0^{\tilde{\nu}})$ 项的 s 阶导数 ($s = 1, \cdots, r-2$) 由 $o(y_0^{\tilde{\nu}-s})$ 估计.

现在我们考虑由位于 O 的小邻域外接近于 Γ 的一段轨道定义的大范围映射 $T_1 : S_1 \to S_0$. 回忆这个大范围映射是微分同胚. 存在鞍点 O 的同宿回路的事实意味着在 S_1 上的点 $x_1 = 0$ 由 T_1 映为 S_0 上的 $y_0 = 0$. 因此, 映射 T_1 可写为形式

$$\bar{y}_0 = Ax_1 + h(x_1),$$

其中 $A \neq 0$, $h(x)$ 和它的一阶导数都趋于零. 注意到由于我们考虑的是平面问题, 我们有 $A > 0$ ($A < 0$ 的情形对在不可定向的二维曲面上定义的系统是有可能的).

最后, 我们得到映射 $T = T_1 \circ T_0$ 的下面公式:

$$\bar{y}_0 = Ay_0^{\nu} + o(y_0^{\nu}). \tag{13.1.12}$$

从上面的公式我们立刻看到, 对充分小的正数 y_0, 只要 $\nu > 1$ (或者只要 $\nu = 1$ 和 $A < 1$) 就有 $\bar{y}_0 < y_0$. 因此, 在这种情形下, 任何点在映射 T 的迭代下收敛于不动点 $y_0 = 0$. 后者是分界线回路 Γ 与 S_0 的交点. 由此得知, 任何从正 y_0 这边出发的轨线当 $t \to +\infty$ 时都必须收敛于回路 Γ. 这意味着当 $\sigma_0 < 0$, 或者, $\sigma_0 = 0$ 而 $A < 1$ 时分界线回路是单侧渐近稳定的.

如果 $\nu < 1$ (即 $\sigma_0 > 0$), 或者如果 $\nu = 1$ (即 $\sigma_0 = 0$), 但 $A > 1$, 则在 (13.1.12) 中我们有 $y_0 < \bar{y}_0$. 因此, 在这种情形下任何点由映射 T 的向后迭代收敛于不动点 $y_0 = 0$. 这意味着同宿回路这时是单侧不稳定的. 这就完成了证明.

同时我们也证明了下面的结果.

定理 13.2　设 $\sigma_0 = 0$. 则分界线回路当 $A < 1$ 时稳定, $A > 1$ 时不稳定.

注　如上面指出的, 定理 13.1 即使对 $\mathbb{C}^1$ - 光滑系统也成立. 但是, 定理 13.2 对 $\mathbb{C}^1$ - 系统就不成立. 为了说明这一点考虑下面的反例. 假设系统在鞍点附近表示为下面的形式

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y\left[1 + \frac{1}{|\ln y| + 1}\right],$$

其中 $|x| \leqslant 1$ 且 $|y| \leqslant 1$. 它从截线 $S_0 : \{x = 1\}$ 上具有正 y_0 的点出发的解是

$$x = e^{-t}, \quad y(|\ln y| + 2) = e^t y_0(|\ln y_0| + 2).$$

因此, 从 S_0 到 $S_1:\{y=1\}$ 的局部映射 T_0 为

$$x_1=\frac{1}{2}y_0(|\ln y_0|+2).$$

我们也假设大范围映射 T_1 是线性的, 即 $\bar{y}_0=Ax_1$. 于是回路附近的 Poincaré 映射 $T=T_1\circ T_0$ 为

$$\bar{y}_0=\frac{1}{2}Ay_0(|\ln y_0|+2).$$

显然, 由于对所有小 y_0 有 $\bar{y}_0>y_0$, 得知同宿回路在这里不稳定, 而不管 A 的值如何.

上面的反例显示定理 13.2 仅当系统是 $\mathbb{C}^r$ – 光滑 $(r\geqslant 2)$ 时才成立. 注意这时积分

$$s_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{div}\,X(\varphi(t))dt$$

收敛 [其中 $(x,y)=\varphi(t)$ 是分界线回路 Γ 的参数方程, 回忆 $\sigma_0=0$ 导致当 $t\to\pm\infty$ 时 $\operatorname{div}\,X(\varphi(t))\to 0$]. 实数 s_1 称为**第一个分界线量**. 显然它关于光滑坐标变换是不变的.

我们可以证明当 $\sigma_0=0$ 时大范围映射 $T_1:S_1\to S_0$ 在点 $x_1=0$ 的导数 A 可以求得[2] 如下:

$$A=e^{s_1},$$

只要 W^s 和 W^u 已被局部直化 [即系统是 (13.1.1) 的形式] 且恒等式 (13.1.2) 和 (13.1.3) 成立. 因此值 A 在这情形也是不变的.

现在让我们详细论述 $\sigma_0=0$ 和 $s_1=0$ 的情形. 首先我们需要在鞍点附近将系统 (13.1.1) 化为某规范形. 注意到由于 $\sigma_0\equiv\lambda+\gamma=0$, 呈现出下面的共振关系

$$\lambda=(m+1)\lambda+m\gamma,$$

$$\gamma=m\lambda+(m+1)\gamma,$$

其中 m 是任何正整数. 这些共振与我们在弱焦点情形遇到的相同. 为了分析这个情况, 我们需要引入称为**典范规范形**的系统更细致的形式.

引理 13.2　$\mathbb{C}^{r-(2n+1)}$ – 变换, 其中 $(r\geqslant 2n+2)$, 将在满足 $\sigma_0=0$ 的共振鞍点附近的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑系统化为下面的形式:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-x(1-\sigma_1xy-\cdots\sigma_n(xy)^n-(xy)^nf(x,y)),\\ \dot{y}&=y,\end{aligned}\tag{13.1.13}$$

其中 $\mathbb{C}^{r-(2n+1)}$ – 光滑函数 f 在 $x=0$ 和 $y=0$ 都恒等于零 (见 (13.1.2)).

[2] 它与确定截线 S_0 和 S_1 的位置的常数 d 的选择无关.

上面的系数 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 称为**鞍点量**. 虽然它们关于光滑坐标变换不是都不变, 但是第一个非零鞍点量的数由系统唯一确定 (因为它是第一个非零共振项的系数), 因此是不变的.

上面的典范规范形在解析情形是由 Dulac [47] 构造的. 光滑情形由 E.A.Leontovich [85] 考虑. 下面简短回顾一下 Leontovich 的证明.

注意我们已经将引理 13.2 对 $n=0$ 的结果 [见 (13.1.4)] 作为更一般论述 (定理 2.17) 的一部分而被包括了. 因此, 我们可以由归纳法进一步进行下去. 就是说, 假设对某个 $n=k$ 系统已经化为 (13.1.13) 的形式. 于是, 如果 $r \geqslant 2k+4$, $\mathbb{C}^{r-(2k+1)}$ - 光滑函数 f 至少是 $\mathbb{C}^3$ - 光滑, 以及因为 f 在 $x=0$ 和 $y=0$ 都为零, 它可写为形式

$$f(x,y) = xyF(x,y),$$

其中 F 是 $\mathbb{C}^{r-(2k+3)}$ - 光滑函数. 记

$$F(x,y) = \sigma_{k+1} + \phi_1(x) + \phi_2(y) + \tilde{f}(x,y),$$

其中 ϕ_1 和 ϕ_2 分别在 $x=0$ 或 $y=0$ 为零, $\tilde{f}$ 在 $x=0$ 和 $y=0$ 都等于零. 由构造, 因为

$$\sigma_{k+1} = F(0,0) = f''_{xy}(0,0),$$

$$\phi_1(x) = F(x,0) - F(0,0),$$

$$\phi_2(y) = F(0,y) - F(0,0),$$

由此得知函数 $\phi_{1,2}$ 和 $\tilde{f}$ 具有与 F 相同的光滑性.

因此, 系统可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x\left(1 - \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i (xy)^i - (xy)^{k+1}\tilde{f}(x,y)\right) + x(xy)^{k+1}(\phi_1(x) + \phi_2(y)), \\ \dot{y} &= y. \end{aligned}$$

现在注意变换

$$x_{\text{new}} = x(1 + \alpha(x)(xy)^{k+1} - \beta(y)(xy)^{k+1})$$

对 $n=k+1$ 将这个系统变为形式 (13.1.13), 如果

$$\alpha(x) = \int_0^1 \phi_1(xs)\frac{ds}{s}, \quad \beta(y) = \int_0^1 \phi_2(ys)\frac{ds}{s}. \tag{13.1.14}$$

由于 $\phi_{1,2}$ 是光滑函数, 它们在零等于零, 上面的积分有定义. 此外, α 和 β 有与 $\phi_{1,2}$ 相同的光滑性, 即坐标变换按要求是 $\mathbb{C}^{r-(2n+1)}$ - 光滑的. 进一步继续用归纳法得引理的结果.

我们看到 Leontovich 的结果更广泛. 即对典范形式的系统推导解的估计时, 她证明经过额外的光滑坐标变换以后形如 (13.1.13) 的系统变成可积的了. 显然, [22]

证明在 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0$ 而 $\sigma_n \neq 0$ 的 $\mathbb{C}^\infty$ – 光滑情形, 鞍点附近的系统由 $\mathbb{C}^\infty$ – 变换变成下面的可积形式

$$\dot{x} = -x(1 - \sigma_n(xy)^n - \sigma_{2n}(xy)^{2n}),$$
$$\dot{y} = y.$$

由此也得知, 当所有的鞍点量等于零时 (即无穷退化情形) 系统局部地化为线性形式.

现在我们对典范形式 (13.1.13) 的系统继续讨论并计算局部映射 $T_0 : S_0 \to S_1$. 设 σ_n 是 (13.1.13) 中第一个非零鞍点量, 即系统有形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(1 - \sigma_n(xy)^n - (xy)^n f(x, y)), \\ \dot{y} &= y. \end{aligned} \tag{13.1.15}$$

如前, 假设同宿回路 Γ 与鞍点从正 x 和正 y 这边相连接. 注意, 这个假设固定了 x 轴和 y 轴的方向, 因此它保持第 n 个鞍点量 σ_n 的符号固定不变. 选择小 $d > 0$ 并由 $\{x = d\}$ 和 $\{y = d\}$ 分别定义截线 S_0 和 S_1.

(13.1.15) 在 $t = 0$ 从 S_0 出发在 $t = \tau$ 到达 S_1 的解满足

$$\begin{aligned} &y(t) = e^{t-\tau} d, \\ &x(t) = e^{-t} d + \textstyle\int_0^t e^{-(t-s)} x(s)(x(s)y(s))^n(\sigma_n + f(x(s)y(s)))ds. \end{aligned} \tag{13.1.16}$$

这个积分方程可以用逐次逼近法求解 (见 2.8 节). 选择

$$x(t) = e^{-t} d$$

作为我们的第一次近似. 将它代入这个积分方程的右端, 得到第二次近似

$$x(t) = e^{-t} d + d^{2n+1} \sigma_n t e^{-t} e^{-n\tau} + e^{-t} o(e^{-n\tau})$$

(这里我们必须使用到由于 f 光滑且在 $x = 0$ 和 $y = 0$ 都等于零, 它满足次线性估计 $|f| \leqslant |y| o(1)_{x \to 0}$. 见引理 13.1 的证明).

容易看到, 所有进一步的近似都将有相同形式, 因此解 $x(t)$ 也有这个形式. 故我们有

$$y(0) = e^{-\tau} d, \quad x(\tau) = e^{-\tau} d + d^{2n+1} \sigma_n \tau e^{-(n+1)\tau} + o(e^{-(n+1)\tau}).$$

由此, 如用 $y_0 (\equiv \dfrac{y(0)}{d})$ 记在 S_0 上的初始点的坐标, 以 $x_1 (\equiv \dfrac{x(\tau)}{d})$ 记轨线与 S_1 的交点的坐标, 我们就得到**局部映射** T_0 的下面公式:

$$x_1 = y_0 + d^{2n} \sigma_n y_0^{n+1} |\ln y_0| + o(y_0^{n+1}).$$

大范围映射 $T_1: S_1 \to S_0$ 在分界线回路 Γ 附近的 Taylor 展开可写为

$$\bar{y}_0 = x_1 + s_2 x_1^2 + \cdots + s_m x_1^m + \cdots$$

(回忆我们已经假设第一个鞍点量 $s_1 = 0$, 它等价于 $A \equiv \dfrac{d\bar{y}_0}{dx_1} = 1$). 设对某 m, $s_2 = \cdots = s_{m-1} = 0$ 而 $s_m \neq 0$. 在这种情形下 Poincaré 映射 $T = T_1 \circ T_0$ 取形式

$$\bar{y}_0 = y_0 + \tilde{\sigma}_n y_0^{n+1} |\ln y_0| + s_m y_0^m + \cdots, \tag{13.1.17}$$

其中 $\tilde{\sigma}_n$ 有与 σ_n 相同的符号, 省略号表示至少高于两个主项之一的高阶项. 最后, 如果 (13.1.17) 中 $m \leqslant n$, 则 $\bar{y}_0$ 可表示为

$$\bar{y}_0 = y_0 + s_m y_0^m + \cdots, \tag{13.1.18}$$

或者如果 $n < m$ 时为

$$\bar{y}_0 = y_0 + \tilde{\sigma}_n y_0^{n+1} |\ln y_0| + \cdots. \tag{13.1.19}$$

由此得知若 (13.1.18) 中 $s_m < 0$, 或者 (13.1.19) 中 $\tilde{\sigma}_n < 0$, 则不动点 $y_0 = 0$ 稳定 (后面的条件等价于 $\sigma_n < 0$). 反之, 若 s_m 或者相应地 σ_n 是正的, 则不动点不稳定.

从而, 我们得到下面的结果. 考虑称为 **Dulac 序列**

$$\sigma_0, s_1, \sigma_1, \cdots, s_n, \sigma_n, s_{n+1}, \cdots \tag{13.1.20}$$

的序列, 假设序列中不是所有的元素都等于零. 则下面定理成立:

定理 13.3　分界线回路的稳定性由 Dulac 序列中第一个非零元素所确定: 若第一个非零元素是负的, 则回路稳定; 反之, 若它是正的, 则回路不稳定.

这个定理的解析情形属于 Dulac. 他还证明如果系统是解析的, 且序列 (13.1.20) 中的所有元素都是零, 则系统可积 (Hamilton 系统), 这时分界线回路的小邻域 U 被周期轨道所充满. Dulac 用这些结果证明多项式向量场的非退化情形的极限环不能够凝聚在分界线回路上.

13.2　具有非零鞍点量的鞍点分界线回路的极限环分支

第一个鞍点量 σ_0 非零的鞍点分界线回路的二维系统形成余维 1 分支集. 因此, 我们可用单参数族来研究这样的同宿分支.

考虑平面上具有鞍点平衡态 O_μ 的 $\mathbb{C}^r$ - 光滑 $(r \geqslant 1)$ 系统的连续单参数族 X_μ. 假设在 $\mu = 0$ 系统有鞍点分界线回路, 即分界线 Γ_1^- 和 Γ_1^+ 当 $\mu = 0$ 时重合.

假设族 X_μ 以这样的一种方式定义, 对 $\mu \neq 0$ 回路可能破裂并且使得当 $\mu > 0$ 时回路分裂时不稳定分界线 $\Gamma_1^-(\mu)$ 走向回路内部且当 $t \to +\infty$ 时进入内邻域 U. 如果 $\mu < 0$ 它朝外走, 即进入外邻域 V.

定理 13.4　(Andronov 和 Leontovich) 设 $\sigma_0 \neq 0$.

(1) 如果 $\sigma_0 < 0$, 则对充分小 $\mu > 0$ 在 U 内存在唯一稳定极限环 $L(\mu)$, 当 $\mu \to +0$ 时它向鞍点靠近且在 $\mu = 0$ 变成分界线回路 (见图 13.2.1). 当 $\mu < 0$ 时不存在极限环.

(2) 如果 $\sigma_0 > 0$, 则对充分小 $\mu < 0$ 在 U 内存在唯一不稳定极限环 $L(\mu)$, 当 $\mu \to -0$ 时它变成分界线回路 $\bar{\Gamma}$(见图 13.2.2). 当 $\mu > 0$ 时没有极限环.

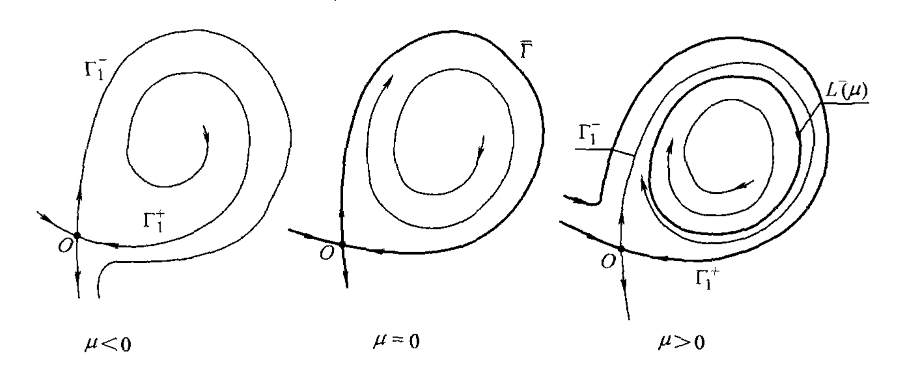


图 13.2.1　$\sigma_0 < 0$ 时鞍点的稳定分界线回路的平面分支.

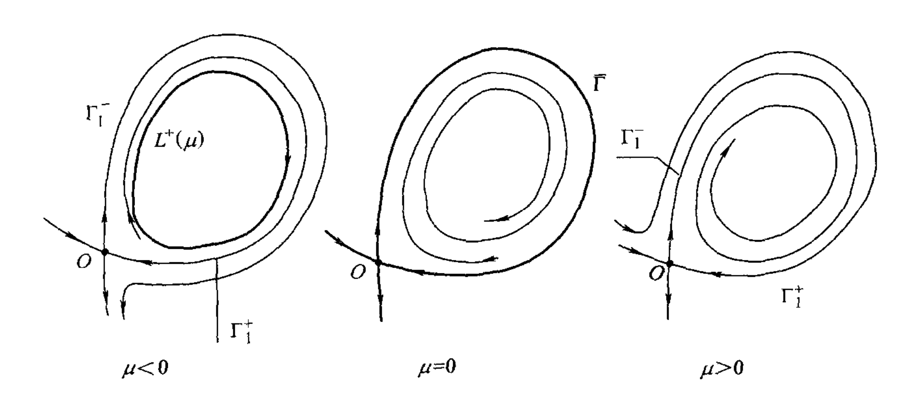


图 13.2.2　$\mathbb{R}^2$ 中 $\sigma_0 > 0$ 时鞍点不稳定分界线回路分支.

注 1　显然 $\sigma_0 > 0$ 的情形可通过改变时间变量的方向 $t \to -t$ 化为 $\sigma_0 < 0$ 的情形. 因此, 上面定理的第二部分可从它的第一部分立刻得到.

注 2　Andronov 和 Leontovich 是在假设系统是 $\mathbb{C}^1$ – 光滑下证明这个定理的. 事实上这是要求向量场仅具有最小光滑性的第一个例子. 低次光滑性对高维情形的分析变得特别引人注目.

Andronov – Leontovich 定理原来的证明是假设系统定义在平面上. 我们在这里选择的不同方法可容易地处理定义在二维不可定向的曲面上的系统.

在鞍点 O 附近引入坐标 (x, y). 不失一般性, 假设对所有 μ 鞍点停留在原点. 我们还可假设不稳定分界线在 O 切于 y 轴, 稳定分界线切于 x 轴. 因此系统可以写为形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda(\mu)x + p(x, y, \mu) \equiv P(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \gamma(\mu)y + q(x, y, \mu) \equiv Q(x, y, \mu), \end{aligned} \tag{13.2.1}$$

其中 p 和 q 以及它们关于 (x, y) 的导数在原点等于零, 特征指数 $\lambda(\mu)$ 和 $\gamma(\mu)$ 满足 $\lambda(\mu) < 0 < \gamma(\mu)$. 由定义, 鞍点量是

$$\sigma_0(\mu) = \lambda(\mu) + \gamma(\mu).$$

设分界线 Γ_1^+ 从半平面 $x > 0$ 进入鞍点, 分界线 Γ_1^- 朝 y 正方向离开 O. 由于我们还没有直化不变流形, Γ_1^+ 和 Γ_1^- 的局部方程分别由

$$y = \varphi(x, \mu),\ x > 0 \quad 和 \quad x = \psi(y, \mu),\ y > 0$$

给出, 其中 φ 和 ψ 以及它们关于 x 和 y 的导数在原点等于零.

选择小正数 d 并考虑两条截线 $S_0 : \{x = d\}$ 和 $S_1 : \{y = d\}$. 如在上一节, 我们将问题化为对 Poincaré 映射 $T : S_0 \to S_0$ 的研究, 它是由系统轨线定义的局部映射 $T_0 : S_0 \to S_1$ 和大范围映射 $T_1 : S_1 \to S_0$ 的叠加组成.

如同在上一节, 沿着分界线回路附近的轨线从 S_1 到 S_0 的飞行时间有限. 因此大范围映射 T_1 是点 $M^- = \Gamma_1^- \bigcap S_1$ 的小邻域到点 $M^+ = \Gamma_1^+ \bigcap S_0$ 的小邻域的微分同胚. 由我们的假设, 在 $\mu = 0$ 有 $T_1 M^- = M^+$. 因此映射 T_1 写为

$$\bar{y}_0 - y^+ = a(\mu) + A(\mu)(x_1 - x^-) + o(x_1 - x^-). \tag{13.2.2}$$

这里我们用 x_1 表示 S_1 上的坐标, 用 y_0 表示 S_0 上的坐标, 于是 M^- 的 x 坐标是 $x^- = \psi(d, \mu)$, M^+ 的 y 坐标是 $y^+ = \varphi(d, \mu)$. 系数 $A(\mu)$ 不为零, 因为 T_1 是微分同胚. 此外, 对定义在平面上的系统(永远) $A > 0$.

项 $a(\mu)$ 控制分界线回路的分裂方式 (见图 13.2.3): 由 (13.2.2) 得知 $a(\mu)$ 等于点 M^+ 和 $T_1 M^-$ 的 y 坐标之间的差 (后者是不稳定分界线 Γ_1^- 与 S_0 的第一个交点). 由假设, $\mu > 0$ 时分界线向内分裂, $\mu < 0$ 时向外分裂. 因此 $\operatorname{sign} a(\mu) = \operatorname{sign} \mu$.

现在研究局部映射 T_0. 它将截线 S_0 上的区间 $y_0 > y^+$ 映为 S_1 上的区间 $x_1 > x^-$. 我们将这个映射表示为

$$x_1 - x^- = \eta(y_0 - y^+, \mu). \tag{13.2.3}$$

我们也用 $\tau(y_0, \mu)$ 表示从 S_0 上的点 (d, y_0) 到 S_1 上的点 $(\eta(y_0 - y^+, \mu), d)$ 的飞行时间. 显然, 当 $y_0 \to y^+$ 时 $\eta(y_0 - y^+, \mu) \to 0$, $\tau(y_0, \mu) \to +\infty$.

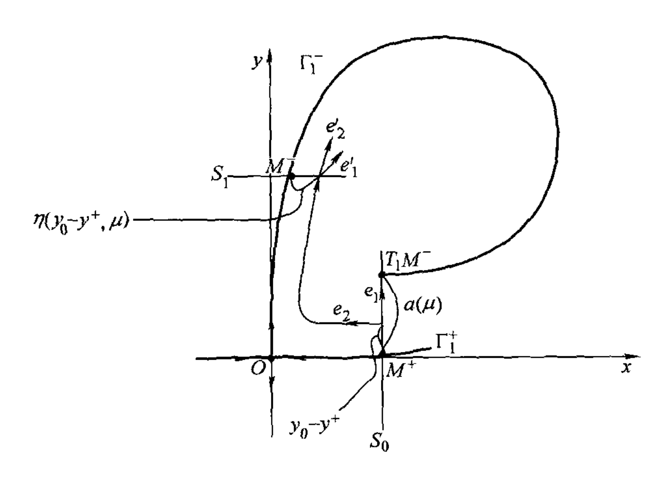


图 13.2.3 定理 13.4 的图示.

引理 13.3 映射 T_0 当 $\sigma_0=\lambda+\gamma<0$ 时是压缩, 当$\sigma_0=\lambda+\gamma>0$ 时是膨胀. 进一步,

$$\lim_{y_0\to y^+}\frac{\partial\eta}{\partial y_0}=\begin{cases}0 & \text{对}\quad \sigma_0<0,\\ +\infty & \text{对}\quad \sigma_0>0\end{cases}\tag{13.2.4}$$

对一切小 μ 一致地成立.

证明 只需考虑情形 $\sigma_0<0$ ($\sigma_0>0$ 的情形由时间反向化为这一情形). 证明思想相对比较简单: 由于假设向量场在 O 的散度为负, 在 O 的小邻域内也为负. 这得知在 O 附近流压缩面积. 从后者立刻得知任何两个截线之间的 Poincaré 映射事实上是压缩的.

让我们作得更确切些. 用 $u(t)$ 表示系统 (13.2.1) 关于初始条件 (x_0,y_0) 的解 $(x(t),y(t))$ 的导数. 这是一个矩阵, 它满足变分方程

$$\dot{u}=\begin{pmatrix}P_x & P_y\\ Q_x & Q_y\end{pmatrix}_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)}}u$$

和初始条件 $u(0)=I$. 因此 u 的行列式满足下面方程

$$\frac{d}{dt}\det u=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}P_x & P_y\\ Q_x & Q_y\end{pmatrix}\det u,$$

由此得

$$\det u(t)=e^{\int_0^t(\lambda+\gamma+P_x(x(s),y(s))+Q_y(x(s),y(s)))ds}.$$

由于我们假设 $\lambda+\gamma<0$ 以及 P 和 Q 的导数在 O 等于零, 得知 u 的行列式对整个时间直到轨线 $(x(t),y(t))$ 停留在 O 的小邻域内都指数式递减:

$$\det u(t)\leqslant e^{\bar{\sigma}t},\quad \text{对某个 } \bar{\sigma}<0.\tag{13.2.5}$$

这事实上意味着由系统 (13.2.1) 定义的流指数式压缩面积, 即对任何两个向量 e_1 和 e_2 有

$$[u(t)e_1, u(t)e_2] = \det u(t)[e_1, e_2] \leqslant e^{\bar{\sigma}t}[e_1, e_2], \tag{13.2.6}$$

其中 $[e_1, e_2]$ 表示由 e_1 和 e_2 张成的平行四边形的面积, $[u(t)e_1, u(t)e_2]$ 是 e_1 和 e_2 由线性化流的像张成的平行四边形的面积.

另一个我们需要的事实是 (见 3.11 节), 矩阵 $u(t)$ 将在点 (x_0, y_0) 的相速度向量变为在点 $(x(t), y(t))$ 的相速度向量:

$$\begin{pmatrix} P(x(t), y(t)) \\ Q(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = u(t) \begin{pmatrix} P(x_0, y_0) \\ Q(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{13.2.7}$$

现在在截线 S_0 上选取点 $(x_0 = d, y_0)$. 它的轨道于某时间 $\tau(y_0)$ 在点 $(x(\tau) = \eta(y_0 - y^+), y(\tau) = d)$ 与 S_1 相交. 导数 $\eta'(y_0 - y^+)$ 由

$$\eta'(y_0 - y^+) = \frac{\partial x(\tau)}{\partial y_0} + \dot{x}(\tau)\tau'(y_0)$$

给出, 其中 $\tau'(y_0)$ 由条件

$$\frac{\partial y(\tau)}{\partial y_0} + \dot{y}(\tau)\tau'(y_0) = 0$$

求得. 由此得知

$$\eta'(y_0 - y^+)\dot{y}(\tau) = [e_1', e_2'] = [u(\tau)e_1, u(\tau)e_2] \leqslant e^{\bar{\sigma}\tau}|\dot{x}(0)|, \tag{13.2.8}$$

其中 $e_1 = (0, 1)$ (平行于 S_0 的单位向量), $e_1' = \left(\dfrac{\partial x(\tau)}{\partial y_0}, \dfrac{\partial y(\tau)}{\partial y_0}\right)$ [回忆由 $u(t)$ 的定义, 它等于 $u(\tau)e_1$], e_2 和 e_2' 分别是在点 (x_0, y_0) 和点 $(x(\tau), y(\tau))$ 的相速度向量:

$$e_2 = (\dot{x}(0), \dot{y}(0)) \equiv (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$$

和

$$e_2' = (\dot{x}(\tau), \dot{y}(\tau)) \equiv (P(x(\tau), y(\tau)), Q(x(\tau), y(\tau))),$$

其中在推导 (13.2.8) 时我们用了关系式 (13.2.6) 和 (13.2.7).

现在注意到由于 $y(\tau) = d$, 得知 $\dot{y}(\tau)(= \gamma d + q(x(\tau), d))$ 有界非零. 因此, 由 (13.2.8)

$$\eta'(y_0 - y^+) = O(e^{\bar{\sigma}\tau}),$$

这就给出了引理的结论, 因为当 $y_0 \to y^+$ 时 $\tau(y_0) \to +\infty$, 又因为由假设 $\lambda + \gamma < 0$ 得 $\bar{\sigma} < 0$. 证明完毕.

因此, 若记 $v = y_0 - y^+$, 从 (13.2.2) 和 (13.2.3) 得知 Poincaré 映射 $T: S_0 \to S_0$ 可写为形式

$$\bar{v} = a(\mu) + A(\mu)\eta(v, \mu) + o(\eta), \quad v > 0, \tag{13.2.9}$$

其中 $a(\mu)$ 是分界线 Γ_1^- 和 Γ_1^+ 的分裂参数, η 是增长函数, 它或者是强压缩 $(\lambda+\gamma<0)$, 或者是强膨胀 $(\lambda+\gamma>0)$. 回忆 $a(\mu)$ 的符号与 μ 的符号相同 (一般地, $a(\mu)$ 与 μ 成比例, 但我们没有用这个性质).

这两个映射的分析是显然的. 相应的 Lamerey 图如图 13.2.4 $(\lambda+\gamma<0)$ 和图 13.2.5 $(\lambda+\gamma>0)$ 所示. 当 $\lambda+\gamma<0$ 时, 映射的不动点 $v^*(\mu)$ 仅对 $\mu\geqslant 0$ 存在. 它对应于 $\mu>0$ 时的极限环 $L^-(\mu)$, 在 $\mu=0$ 对应于分界线回路 [形式上, 映射 T 在 $v=0$ 没有定义, 但是由连续性我们可定义它, 假设 $T(M^+)=T_1(M^-)$]. 由于映射 T 是压缩, 不动点是稳定的 (在 $\mu=0$ 是单侧稳定). 因此, $L^-(\mu)$ 稳定环且回路 Γ 也稳定 (这推广了上一节的定理 13.1 的 $\mathbb{C}^1$ - 情形). 注意在 $\mu>0$, 当 $t\to+\infty$ 时分界线 $\Gamma_1^-(\mu)$ 趋于 $L^-(\mu)$.

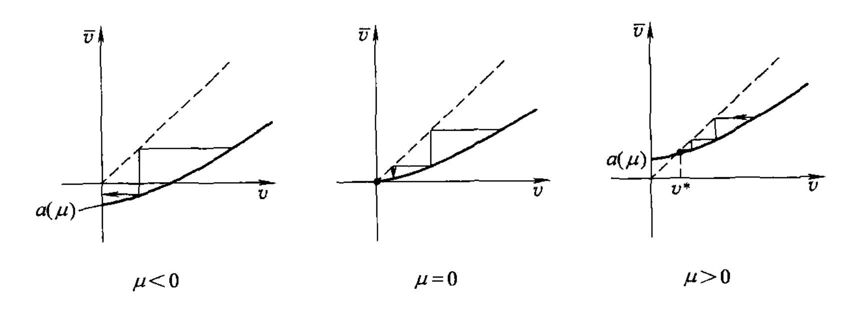


图 13.2.4　对应于图 13.2.1 中分支的 Poincaré 映射的 Lamerey 图.

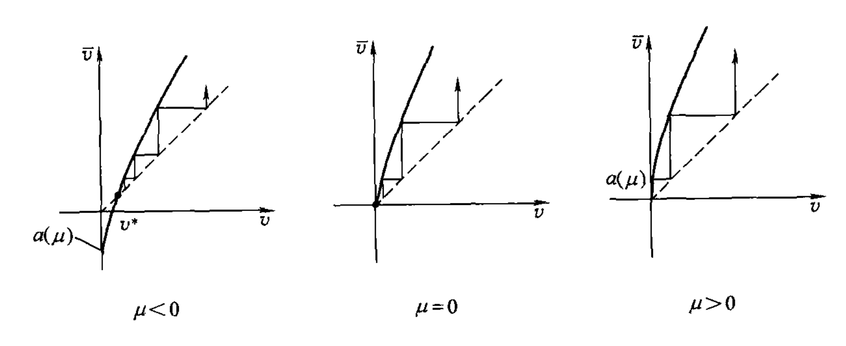


图 13.2.5　对应于图 13.2.2 中分支的 Poincaré 映射的 Lamerey 图.

在 $\lambda+\gamma>0$ 的情形, 不动点 $v^*(\mu)$ 不稳定且仅当 $\mu\leqslant 0$ 时存在. 当 $\mu<0$ 时它对应于不稳定极限环 $L^+(\mu)$, $\mu=0$ 时对应于分界线回路.

注 3　当系统至少是 $\mathbb{C}^2$ - 光滑时, 我们可在 O 附近引入局部坐标 (见引理 13.1), 使得

$$\eta(v)=v^{\nu(\mu)}+o(v^{\nu(\mu)}),$$

其中 $v = \left|\dfrac{\lambda}{\gamma}\right|$ 是鞍点指标. 这时映射 (13.2.9) 的不动点满足下面的关系:

$$v^* = a(\mu) + A(\mu)(v^*)^{\nu(\mu)} + \cdots,$$

由此我们有

$$v^*(\mu) \sim \begin{cases} a(\mu) & \text{对 } \lambda+\gamma<0, \\ \left(-\dfrac{a(\mu)}{A(\mu)}\right)^{1/\nu(\mu)} & \text{对 } \lambda+\gamma>0. \end{cases} \tag{13.2.10}$$

注 4 上面的证明方法可容易地被采纳到对一般二维曲面上的分界线回路的情形, 而不管曲面是可定向还是不可定向. 在这两种情形映射都有形式 (13.2.9). 但是要注意, 如果分界线回路的小邻域同胚于环域, 则 $A>0$. 而如果 $\bar{\Gamma}$ 的邻域是 Möbius 带, 则 $A<0$ (后者显然对应于不可定向的情形). 在情形 $A>0$, Andronov-Leontovich 定理成立,无需改变.

现在详细考虑 $A<0$ 情形. 首先确定 $A<0, \nu>1$ $(\lambda+\gamma<0)$ 时相应的 Lamerey 图 (图 13.2.6). 正如可定向情形, $\mu>0$ 时存在稳定不动点: 事实上, 映射 T 递减并压缩, 因此, 映射 T 将区间 $[0, a(\mu)=T(0)]$ 映到它自己内部, 由 Banach 压缩映射原理在这区间内存在唯一稳定不动点.

对应于情形 $\nu(\mu)<1$ 的 Lamerey 图如图 13.2.7 所示. 这里, 与可定向情形相反, 对 $\mu>0$ 存在不稳定不动点 $v^*(\mu)$.

注意, 对可定向情形 $(A>0)$, 在 $\mu=0$ 的分界线回路是内邻域 U 中附近轨线的极限轨线 ($\nu>1$ 时是 ω - 极限, $\nu<1$ 时是 α - 极限) . 反之, 在不可定向情形 $(A<0)$, Γ 上的每一点是非游荡点, 它不可能是极限点. 这表明极限点是非游荡点(见第 8 章)时, 其逆不真.

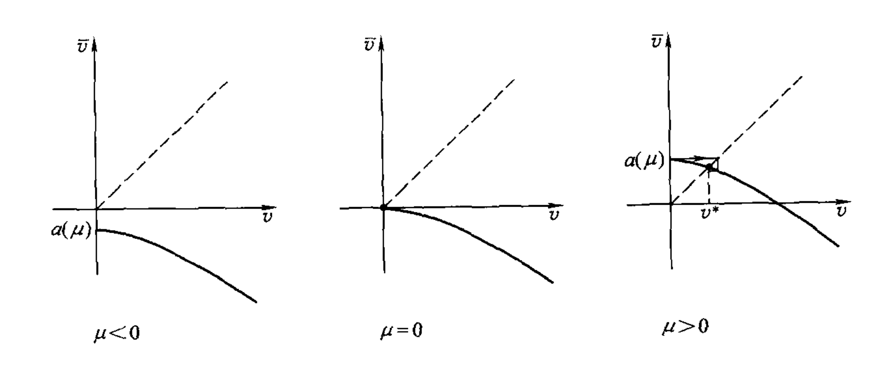


图 13.2.6 对 $\sigma_0<0$ 时不可定向分界线回路的 Poincaré 映射的 Lamerey 图.

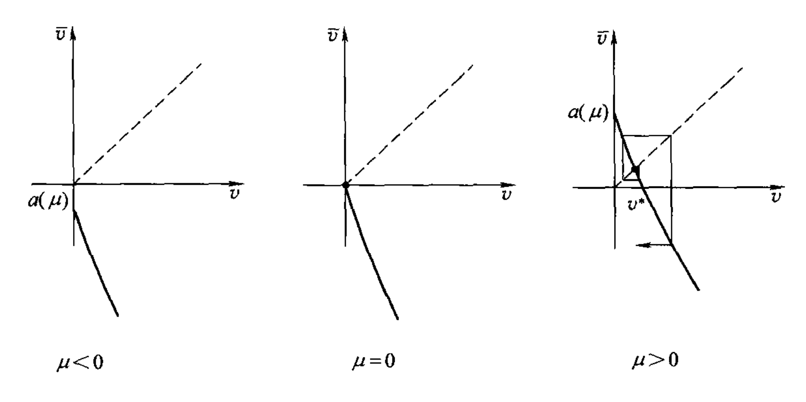


图 13.2.7　对 $\sigma_0>0$ 时鞍点的不可定向分界线回路的 Lamerey 图.

注 5　分裂参数 $a(\mu)$ 可以是满足上面符号条件的 μ 的任意连续函数. 当系统光滑依赖于 μ 时, 如果 $a'(0)\neq 0$, 则族 X_μ 与分支曲面横截相交. 在这情形我们总可以假设 $a(\mu)\equiv\mu$.

注 6　由上面分析得知, 横截族 X_μ 的 Poincaré 映射的所有性质都可由简化映射

$$\bar{y}=\mu\pm y^{\nu} \tag{13.2.11}$$

展示, 其中 $\nu\neq 1$. 符号 "+" 对应于可定向情形, 符号 "−" 对应于不可定向情形. 本质上, 映射 (13.2.11) 是具有非零鞍点量的分界线回路附近 Poincaré 映射的一类规范形.

我们现在可以讨论具有两个零特征指数的平衡态分支. 这个分支相当著名, 因为它的分析几乎包含了所有余维 1 分支.

一般地, 在具有一对零特征指数的平衡态 $(0,0)$ 附近中心流形上的系统可表示为

$$\dot{x}=y+g(x,y),$$
$$\dot{y}=f(x,y),$$

其中 f 和 g 以及它们的一阶导数在原点为零. 注意, 我们假设在原点的线性化矩阵有 Jordan 块. 在这一种情形下我们可引入 $y+g(x,y)$ 作为新的 y – 变量, 而将系统化为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=ax^2+bxy+h(x,y),\end{aligned} \tag{13.2.12}$$

其中 $h(x,y)$ 为三阶小量.

假设系数 a 和 b 不为零. 我们可尺度化相变量和时间变量使得系统写为形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 \pm xy + \tilde{h}(x,y), \end{aligned} \tag{13.2.13}$$

其中 "+" 对应于 $b>0$, "−" 对应于 $b<0$. 注意变换 $t\to -t, y\to -y$ 将第一种情形化为第二种情形. 我们在 (13.2.13) 中 xy 前选择符号 "−".

系统 (13.2.13) 在 $O(0,0)$ 附近轨线的性态如图 13.2.8 所示. 为研究这点附近的分支, 考虑可写为下面形式的双参数族

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 x + x^2 - xy + \tilde{h}(x,y,\mu). \end{aligned} \tag{13.2.14}$$

其分支图和对应的相图如图 13.2.9 所示. 分支曲线 $L_1,\cdots,L_4$ 将 (μ_1,μ_2) – 平面分成四个区域 $D_1,\cdots,D_4$. 由于在区域 D_1 内不存在平衡态, 当 $t\to\pm\infty$ 时所有轨线都离开相空间原点的邻域. 当从 D_1 穿过曲线 $L_1:\{\mu_1=\dfrac{\mu_2^2}{4}+\cdots,\mu_2>0\}$, 或曲线 $L_4:\{\mu_1=\dfrac{\mu_2^2}{4}+\cdots,\mu_2<0\}$ 时, 那里出现鞍 – 结点平衡态. 这个鞍 – 结点在 L_1 和 L_4 上的第一个 Lyapunov 量 l_2 不等于零的意义下是简单的. 但是, 在这些曲线上轨线的性态存在差别: 在 L_1 上鞍 – 结点在结点区域是不稳定的, 而在 L_4 上, 它在结点区域是稳定的. 穿过 L_1, 鞍 – 结点分解为不稳定结点和鞍点. 当参数继续变化时, 结点变成不稳定焦点, 如图 13.2.9 (区域 D_2) 所示. 在曲线 $L_2:\{\mu_1=\dfrac{-6}{25\mu_2^2}+o(\mu_2^2),\mu_2<0\}$ 上系统有稳定分界线回路. 因此, 在区域 D_3 存在由分界线回路产生的稳定极限环. 焦点在曲线 $L_3:\{\mu_1=0,\mu_2<0\}$ 上变成弱焦点, 它有一对纯虚特征值. 相应的 Lyapunov 量在 L_3 上为负. 当从 D_3 到 D_4 移动时稳定环坍缩为弱焦点并在曲线 L_3 上由于超临界 Andronov-Hopf 分支而消失, 因此焦点继承稳定极限环的稳定性. 在曲线 L_4 附近, 稳定焦点变成稳定结点, 并在曲线 L_4 上与鞍点合并. 两个平衡态在区域 D_1 内消失.

曲线 L_1,L_3,L_4 的渐近性来自在平衡态对系统 (13.2.14) 的线性化分析. 对应于分界线回路的曲线 L_2 的存在性对分支问题的完全性是必要的. 在曲线 L_3 上从弱焦点产生的稳定环必须在回路上消失 (当向 L_2 移动时).

曲线 L_2 的渐近性可以如下得到. 假设 (13.2.14) 中的 $\mu_1<0$. 经变量和时间的尺度化: $x\to x\sqrt{|\mu_1|}, y\to y|\mu_1|^{3/4}, t\to t/|\mu_1|^{1/4}$, 系统化为形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -1 + Cx + x^2 - \varepsilon xy + o(\varepsilon), \end{aligned} \tag{13.2.15}$$

其中 $C=\dfrac{\mu_2}{\sqrt{|\mu_1|}}$ 以及 $\varepsilon=|\mu|^{1/4}$. 在 $\varepsilon=0$, 这个系统变成 Hamilton 系统, 它的首次

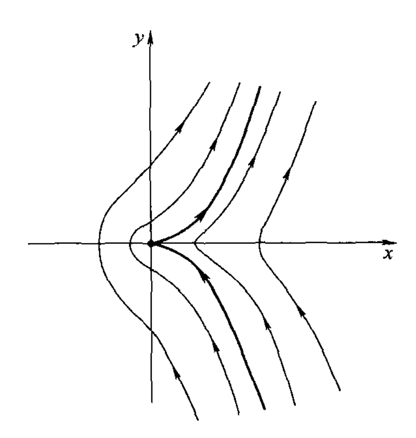


图 13.2.8 具有两个零特征指数的平衡态附近的轨线性态.

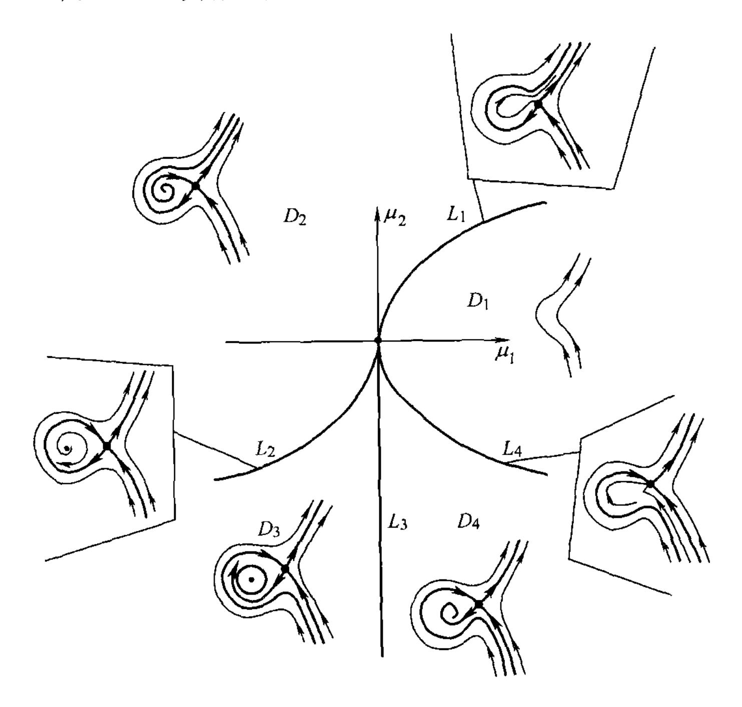


图 13.2.9 (μ_1, μ_2) – 参数平面内 Bogdanov-Takens 点的分支图.

积分是

$$H = \frac{y^2}{2} + x - \frac{1}{2}Cx^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

系统在 $x = x_0 = -\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2+4}$ (和 $y = 0$) 有鞍点平衡态, 其分界线回路是积分 H 的等位集的一个分枝. 即 $\Gamma = \{H(x,y) = H(x_0, 0), x < x_0\}$. 对任意小非零 ε, 这个系统不再是 Hamilton 系统, H 也不再是它的首次积分, 因为在 $\varepsilon = 0$ 有 $\dot{H} \neq 0$.

一般地, 回路分裂. 很明显如果对某个 C

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}H(x(t)\ ,y(t))dt|_{\varepsilon=0}\neq 0,$$

则对充分小 $\varepsilon\neq 0$ 回路分裂 (这里 $(x=x(t),y=y(t))$ 是在 $\varepsilon=0$ 的同宿轨线). 由系统 (13.2.15), 这个不等式可写为

$$\int_{x_1}^{x_0}xy(x)dx\neq 0,$$

其中 x_1 是回路 Γ 与 x – 轴的交点, $H(x_0,0)=H(x_1,0)$. $y=y(x)$ 是 Γ 的方程, 即 $H(x,y(x))=H(x_0,0)$, 见图 13.2.10. 因此上述不等式化为

$$\int_{x_1}^{x_0}x(x_0-x)\sqrt{x-x_1}dx\neq 0,$$

它可容易求解, 因此给出 $C\neq C^*=\dfrac{-5}{\sqrt{6}}$. C 的这些值对应于非零 ε 的回路分裂. 另一方面, 我们可以证明存在曲线 $C=C^*+O(\varepsilon)$ 对应于 $\varepsilon\neq 0$ 时分界线回路的存在性. 回到 (μ_1,μ_2) – 平面给出曲线 L_2 要求的渐近: $\{\mu_2=\dfrac{-5}{\sqrt{6}}\sqrt{|\mu_1|}\}$.

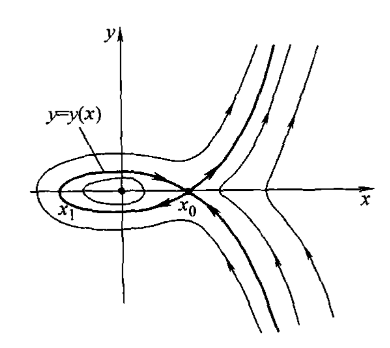


图 13.2.10 回路是等位线 $H(x,y)=H(x_0,0)$ 的相应 Hamilton 系统的相图.

这个在平衡态具有两个零特征指数的分支图已经知道很长时间了. 但是还存在证明极限环的**唯一性**问题. 换句话说, 我们必须额外证明除了 $L_1,\cdots,L_4$ 以外不存在其它分支曲线 (即对应于半稳定极限环的曲线). 这个问题已经由 Bogdanov[33] 和 Takens[146] 独立解决, 以后这个分支就以他们的名字命名.

13.3 具有零鞍点量的分界线回路分支

E. Leontovich 第一个考虑了具有零鞍点量 σ_0 的鞍点的分界线回路分支问题. 她证明了下面的定理:

定理 13.5 (Leontovich) 如果在 Dulac 序列中

$$\sigma_0 = s_1 = \cdots = s_{n-1} = \sigma_{n-1} = 0, s_n \neq 0,$$

则从鞍点分界线回路分支出的极限环不多于 $2n$ 个.

如果

$$\sigma_0 = s_1 = \cdots = s_n = 0, \quad \sigma_n \neq 0,$$

则从分界线回路产生的极限环的个数不超过 $2n+1$. 这些估计是精确的, 即可扰动系统使得所得系统分别有 $2n$ 或者 $2n+1$ 个极限环.

Leontovich 在对上面定理的证明中, 假设了系统是 $\mathbb{C}^r$ – 光滑, $r \geqslant 4n+6$. 首先她证明当第一个鞍点量接近于零时, 在鞍点附近系统可变换成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(1+\varepsilon-\sigma_1 xy-\cdots-\sigma_n(xy)^n-(xy)^{n+1}F(x,y)), \\ \dot{y} &= y, \end{aligned} \tag{13.3.1}$$

其中 $1+\varepsilon=\nu$ 是鞍点指标, σ_i 是鞍点量, F 是光滑函数. 假设 $n|\varepsilon|<1$. 坐标变换的构造可如 $\varepsilon=0$ 的情形以相同方法进行 (见引理 13.2), 唯一区别是公式 (13.1.14) 现在修改为:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{1+\varepsilon}\int_0^1 \phi_1(xs)\frac{ds}{s^{1-(k+1)\varepsilon}}, \\ \beta(y) &= \int_0^1 \phi_2(ys)\frac{ds}{s^{1+(k+1)\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{13.3.2}$$

我们可以通过引理 13.2 的证明追踪坐标变换是 $\mathbb{C}^{r-(2n+1)}$ 的, 函数 F 是 $\mathbb{C}^{r-(2n+3)}$ – 光滑的.

Leontovich 证明的下一步是计算局部映射. 事实上, 她考虑从截线 $S_1:\{y=d\}$ 到 $S_0:\{x=d\}$ 的映射, 即按我们的记号是局部映射 T_0 的逆. 注意, 按照定理的假设, 仅仅最后一个鞍点量 σ_n 是有界非零, 而 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1}$ 都是小量. 因此, 尺度化时间变量, 系统可重写为形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= y(1+\tilde{\varepsilon}+\tilde{\sigma}_1 xy+\cdots+\tilde{\sigma}_n(xy)^n+(xy)^{n+1}\tilde{F}(x,y)), \end{aligned} \tag{13.3.3}$$

其中系数 $\tilde{\varepsilon}$ 和 $\tilde{\sigma}_1,\cdots,\tilde{\sigma}_{n-1}$ 都是小量, $\tilde{\sigma}_n$ 有界非零. Leontovich 证明对系统 (13.3.3) 映射 T_0^{-1} 有形式[3]

$$y_0 = x_1+\tilde{\varepsilon}[\theta x_1+\psi_1(x_1)]+\tilde{\sigma}_1[\theta x_1^2+\psi_2(x_1)]+\cdots+\tilde{\sigma}_n[\theta x_1^{n+1}+\psi_{n+1}(x_1)], \tag{13.3.4}$$

[3] 这个公式可如定理 13.3 的证明用边值问题的方法推导.

其中

$$\theta = \frac{x_1^{\tilde{\varepsilon}} - 1}{\tilde{\varepsilon}},$$

以及对某 $\delta > 0$ 有 $\psi_k = O(x_1^{k+\delta})$ (此外, 对 $j = 1, \cdots, 2n+1$, ψ_k 的 j 阶导数有如 $O(x_1^{k-j+\delta})$ 的估计).

大范围映射 $T_1 : S_1 \to S_0$ 的 Taylor 展开表示为

$$\bar{y}_0 = \mu + x_1 e^{s_1} + s_2 x_1^2 + \cdots + s_n x_1^n + O(x_1^{n+1}), \tag{13.3.5}$$

其中 μ 是小分裂参数, $s_1, \cdots, s_n$ 是分界线量. 由定理的假设 $s_1, \cdots, s_{n-1}$ 是小量. 第 n 个分界线量 s_n 在定理的第一个情形是有界非零的, 在第二个情形是小量.

如果系统有极限环, 它与 S_1 的交点的 x_1 – 坐标满足 $T_0^{-1}(x_1) = T_1(x_1)$. 因此, 极限环的个数问题在这里化为光滑 (至少 $\mathbb{C}^{2n+1}$) 拟多项式

$$\begin{aligned} G(x_1) = & -\mu + [\tilde{\varepsilon}(\theta x_1 + O(x_1^{1+\delta})) - x_1(e^{s_1} - 1)] \\ & + [\tilde{\sigma}_1(\theta x^2 + O(x^{2+\delta})) - s_2 x^2] \\ & + [\tilde{\sigma}_{n-1}(\theta x_1^n + O(x_1^{n+\delta})) - s_n x_1^n] + \tilde{\sigma}_n[\theta x^{n+1} + O(x^{n+1})] \end{aligned} \tag{13.3.6}$$

的零点个数问题 (其中 δ 不必是整数). 在证明这个定理时, Leontovich 发展了上面类型的拟多项式的计算, 这允许她证明对小的 $\mu, \tilde{\varepsilon}, s_1, \cdots, \tilde{\sigma}_{n-1}$, 如果 s_n 有界非零, 则函数 G 对小的 x_1 不可能有多于 $2n$ 个的零点, 或者, 如果 s_n 是小量, 则零点不多于 $2n+1$ 个.

为了完成证明, 我们还必须证明这个估计的 " 精确性". 为此, Leontovich 非常详细地构造了一个具有所给个数极限环的扰动系统.

注意, 她并没有利用有限参数族. 不过, 她知道可找到适当的横截族, 使得定理 13.5 的第一种情形中的控制参数是 $\mu, \varepsilon, s_1, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$, 或者在第二种情形是 $\mu, \varepsilon, s_1, \sigma_1, \cdots, s_n$.

我们回顾这个定理的证明, 显然完全只是叙述性的. Leontovich 原来的证明由两大部分组成, 并存放在莫斯科的 VINITI 档案馆, 因此, 只有苏联的研究者可利用. 30 多年以后, Roussarie 独立发表了分支周期轨道个数的上述估计的证明, 但没有证明它的 "精确性". 读者如有兴趣欲知其详可参考评论 [73]. 按照这个评论的精神, Leontovich 定理可改述如下: **在一般平面光滑向量场的 p –参数族中, 从粗鞍点分界线回路分支出的极限环个数不超过 p. 此外, 这个估计是精确的.**

现在让我们更详细地研究余维 2 情形. 回忆这种情形的两个不同条件: 第一个是分界线回路的存在性条件, 第二个条件是当第一个分界线量 s_1 非零时第一个鞍点量 σ_0 为零. 后一个等价于 $A \neq 1$. 我们将假设 $A < 1$, 因为 $A > 1$ 的情形由时间反向直接得到.

由 13.8 节的结果得知 (见公式 (13.8.30) — (13.8.32)) 在某 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 坐标下局部映射 T_0 可以写为

$$\bar{x}_1 = y_0^{\nu} + \varphi(y_0),$$

其中 ν 是鞍点指标, 在分支点它等于 1. 函数 φ 对某个有界异于零的正数 δ 满足估计

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= o(y^{1+\delta}), \\ \varphi^{(s)}(y) &= o(y^{1-s+\delta}) \quad (s = 1, \cdots, r-2), \\ \varphi^{(r-1)}(y) &= o(y^{\nu-(r-1)}). \end{aligned} \tag{13.3.7}$$

结合上面对局部映射的公式和对大范围映射 T_1 的公式 (13.3.5) (在 $n = 1$), 我们得到 Poincaré 映射 $T = T_1 \circ T_0$ 的方程

$$\bar{y} = \mu + A(\mu, \varepsilon) y^{1+\varepsilon} + \varphi(y), \quad y > 0, \tag{13.3.8}$$

其中 $\nu = 1 + \varepsilon$, φ 是仍满足 (13.3.7) 的新函数. 我们将假设系统至少是 $\mathbb{C}^3$ - 光滑, 因此 Poincaré 映射 (13.3.8) 至少是 $\mathbb{C}^2$ - 光滑.

这个映射是单调增加的一维映射 (因为对平面系统 $A > 0$). 这个映射出现的仅有分支是具有乘子等于 $+1$ 的不动点分支. 这种点的 y - 坐标必须满足

$$\begin{aligned} y &= \mu + A(\mu, \varepsilon) y^{1+\varepsilon} + o(y^{1+\delta}), \\ 1 &= (1+\varepsilon) A(\mu, \varepsilon) y^{\varepsilon} + o(y^{\delta}). \end{aligned} \tag{13.3.9}$$

第二个方程的右端至少是 $\mathbb{C}^1$ - 光滑. 因此, 当 $\varepsilon < 0$ 时 y - 坐标可由下面方程唯一确定:

$$y = e^{-1} A^{1/|\varepsilon|} + o(A^{(1+\delta)/|\varepsilon|}). \tag{13.3.10}$$

映射在这点的二阶导数等于

$$(1+\varepsilon) A(\mu, \varepsilon) \varepsilon y^{\varepsilon - 1} + o(y^{\varepsilon - 1}),$$

显然它不为零. 因此, 鞍 - 结点不动点是简单的. 将 (13.3.10) 代入 (13.3.9) 的第一个方程, 我们得到对应的分支曲线 L_1 的方程为

$$\mu = \varepsilon e^{-1} A(0, \varepsilon)^{1/|\varepsilon|} [1 + o(1)]. \tag{13.3.11}$$

分支图如图 13.3.1 所示. 曲线 L_1 对应于半稳定极限环. 曲线 L_2 (负 ε - 半轴) 对应于具有正鞍点量的分界线回路, 而曲线 L_3 (正 ε - 半轴) 对应于具有负鞍点量的分界线回路. 这些曲线将参数平面的原点邻域划分成三个区域. 在区域 D_1 存在两个极限环. 穿过 L_1 它们重合并消失, 故在区域 D_2 内没有极限环. 从 D_1 到 D_3 在曲线 L_3 $(\sigma_0 < 0)$ 上由同宿回路产生一个稳定极限环. 对 D_3, L_2 和 D_1 中的参数值,

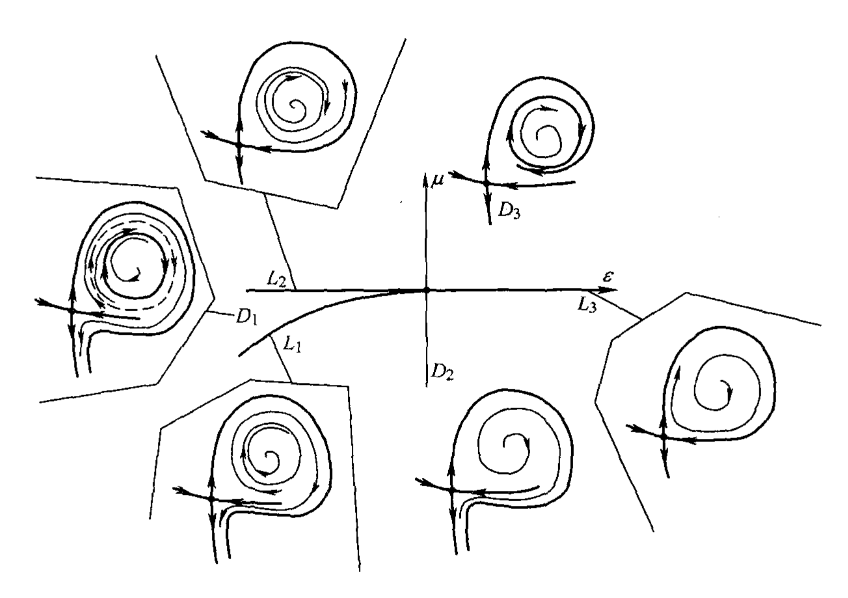


图 13.3.1　在可定向情形 $(0 < A < 1)$ 具有零鞍点量 $(\lambda + \gamma = 0)$ 的鞍点同宿回路分支图. 参数 μ 控制回路的分裂, ε 的符号与鞍点量的符号相反.

这个稳定极限环存在. 穿过曲线 L_2 从同宿回路 $(\sigma_0 > 0)$ 分支出又有一个极限环, 这时它是不稳定的. 这个分支图属于 Nozdracheva [99].

接下来让我们考虑情形 $-1 < A < 0$, 它对应于不可定向曲面上的分界线回路 Γ (情形 $A < -1$ 用改变时间方向类似得到). 这时 $\bar{\Gamma}$ 的邻域是以 $\bar{\Gamma}$ 为中线的 Möbius 带. Poincaré映射在这种情形下也有形式 (13.3.8), 其中函数 φ 满足估计 (13.3.7). 但是, 现在我们需要更多的光滑性, 因此假设系统至少是 $\mathbb{C}^4$ - 光滑, 即在 (13.3.7) 中 $r \geqslant 4$.

由于 $A < 0$, Poincaré映射递减. 在该情形的新特征是这种映射可以有周期 2 轨道, 它对应于所谓的二重极限环. 它们可以通过倍周期分支 (不动点具有乘子 -1) 产生, 或者通过二重同宿回路分支产生. 后者对应 Poincaré 映射在 $y = 0$ 的周期 -2 点 (见图 13.3.2).

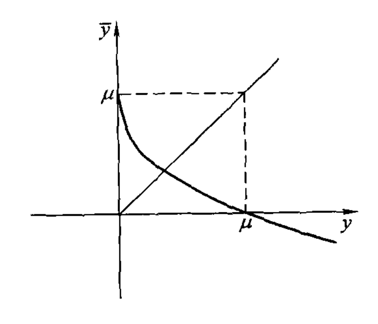


图 13.3.2　对应于二重分界线回路的 Lamerey 图.

由于 $T(0)=\mu$, 当

$$0=\mu+A(\mu,\varepsilon)\mu^{1+\varepsilon}+o(\mu^{1+\delta})$$

时出现二重回路. 由此约束我们得到下面对应于二重回路的分支曲线 L_2 的方程是

$$\mu=|A(0,\varepsilon)|^{1/|\varepsilon|}[1+o(1)],\quad \varepsilon<0. \tag{13.3.12}$$

由于 $\varepsilon<0$, 鞍点量是正的, 因此这里从分界线回路分支出的周期轨道不稳定.

注意到曲线 L_2 位于由系统

$$\begin{aligned} y&=\mu+A(\mu,\varepsilon)y^{1+\varepsilon}+o(y^{1+\delta}),\\ -1&=(1+\varepsilon)A(\mu,\varepsilon)y^{\varepsilon}+o(y^{\delta}) \end{aligned} \tag{13.3.13}$$

定义的曲线 L_1 的上方 (见图 13.3.3), 它对应于倍周期分支. 从 (13.3.13) 消去 y 得到曲线 L_1 的方程

$$\mu=\frac{2}{e}\mid A(0,\varepsilon)\mid^{1/|\varepsilon|}[1+o(1)],\quad \varepsilon<0. \tag{13.3.14}$$

这个情形的分支图 ([38] 中提供的) 如图 13.3.3 所示. 它包含下面四条分支曲线:

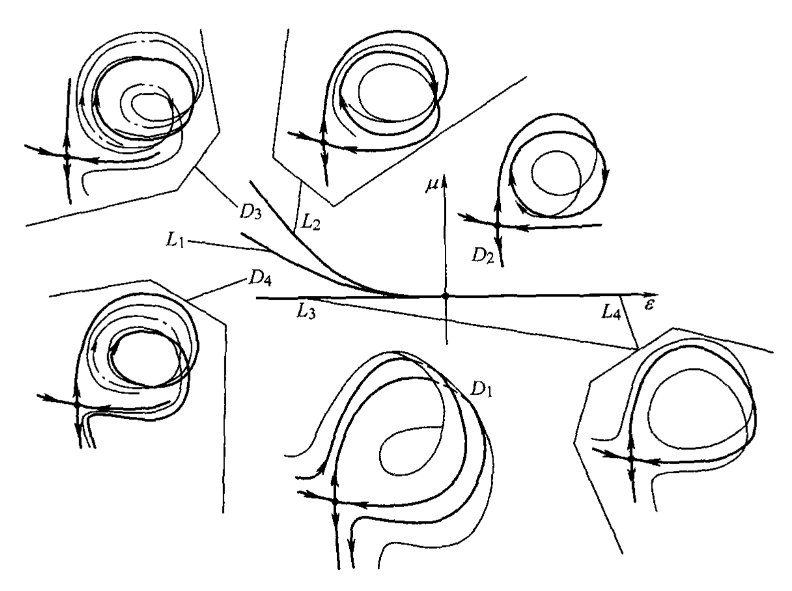


图 13.3.3 在不可定向情形 $(-1<A<0)$ 具有零鞍点量的鞍点同宿回路的分支图. 控制参数与图 13.3.1 中的相同.

- L_1 对应于倍周期分支, 即对应的结构不稳定极限环的一个乘子等于 -1, 第一个 Lyapunov 量[4]为正.

[4] 为了计算 Lyapunov 量, 我们至少需要 (13.3.8) 的右端函数的三阶导数, 这就是为什么我们要求在 (13.3.7) 中 $r\geqslant 4$.

- L_2 对应于 Möbius 带上的 "二重" 分界线回路. 在这条曲线上鞍点量 σ_0 是正的.
- L_3 (负 ε – 半轴) 对应于具有正鞍点量 σ_0 的简单分界线回路以及
- L_4 (正 ε – 半轴) 对应于具有负鞍点量 σ_0 的简单分界线回路.

这些曲线将 (μ, ε) – 参数平面按轨线结构稳定性态分成四个区域.

区域 D_1 中不存在极限环. 从 D_1 朝 D_2 移动, 在曲线 L_4 上由简单分界线回路产生一个稳定极限环. 在 L_2 上对 $\sigma_0 > 0$, 从一个二重分界线回路分支出一个不稳定二重回路极限环. 因此在区域 D_3 存在两个极限环: 一个稳定, 另一个不稳定. 在曲线 L_1 上不稳定二重极限环与稳定极限环合并. 此后只有一个单回路不稳定极限环停留在区域 D_4 中. 在曲线 L_3 上它附在同宿回路内.

注意我们还必须证明在这个分支图中不存在其它分支曲线. 即不存在周期 2 的任何鞍 – 结点轨道. 映射 (13.3.8) 的周期 2 轨道 (y_1, y_2) 必须满足方程

$$\begin{aligned} y_2 &= \mu + A(\mu, \varepsilon) y_1^{1+\varepsilon} + \varphi(y_1), \\ y_1 &= \mu + A(\mu, \varepsilon) y_2^{1+\varepsilon} + \varphi(y_2). \end{aligned} \tag{13.3.15}$$

如果 (y_1, y_2) 是这个系统的解, 则 (y_2, y_1) 也是解. 也存在解 $y_1 = y_2 = y_0$, 其中 y_0 是映射 (13.3.8) 的唯一不动点, 对 $\mu > 0$ 它总存在. 因此, 为了证明不存在周期 2 的鞍 – 结点轨道, 只需验证系统 (13.3.8) 有不多于三个解, 包括重次. 这个验证将在 13.6 节对更一般系统 (见 (13.6.26)) 进行, 它对应于 $\sigma_0 = 0$ 时的高维鞍点同宿回路分支.

13.4 由同宿回路($\dim W^u = 1$ 的情形)产生周期轨道

现在我们研究高于二维的同宿回路分支. 考虑 $\mathbb{R}^{m+1}$ (或者更一般地在 $(m+1)$ 维光滑流形) 中具有鞍点平衡态 O_μ 的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑 $(r \geqslant 1)$ 系统的连续单参数族 X_μ. 不失一般性, 可以假设对所有 μ 平衡态在原点. 还假设 O 的特征指数中只有一个是正的, 其它的都位于虚轴的左边. 分别记这些特征指数为 γ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, 满足

$$\gamma > 0 > \operatorname{Re}\ \lambda_i, \quad i = 1, \cdots, m.$$

由假设, 鞍点 O 的不稳定流形 W^u 是一维的, 稳定流形 W^s 是 m 维的. 不稳定流形由三个轨道组成: 鞍点 O 本身以及两条分界线:Γ_1 和 Γ_2. 假设在 $\mu = 0$ 系统有鞍点 O 的分界线回路, 即 $t \to +\infty$ 时 Γ_1 趋于 O. 由此

$$\Gamma_1 \subset W^s.$$

除此以外, 我们还假设回路对 $\mu \neq 0$ 分裂: 如果 $\mu > 0$ 则向内分裂 (在 W^s 上方), 如果 $\mu < 0$ 则向外分裂 (在 W^s 下方).

我们先考虑**负鞍点量**σ 的情形

$$\sigma = \gamma + \max \operatorname{Re}\ \lambda_i < 0. \tag{13.4.1}$$

几何上这意味着鞍点附近的线性化流**收缩二维面积**. 依次, 这表明任何两个截面之间的局部映射是压缩的 (见引理 13.3 的证明). 由于这个缘故, 这种同宿回路附近的系统的动力学保持简单.

定理 13.6 (Shilnikov [130]) 当在鞍点的鞍点量 σ 为负时, 对 $\mu > 0$ 从同宿回路产生单个稳定周期轨道 L. $t \to +\infty$ 时分界线 Γ_1 趋于 L. 对 $\mu \leqslant 0$, 在同宿回路的小邻域 U 内不存在周期轨道. 当 $t \to +\infty$ 时 X_μ 的轨线或者趋于 L (或者趋于 $\mu = 0$ 时的回路 Γ), 或者趋于 O, 或者离开 U.

这个定理的定性性态描述于图 13.4.1.

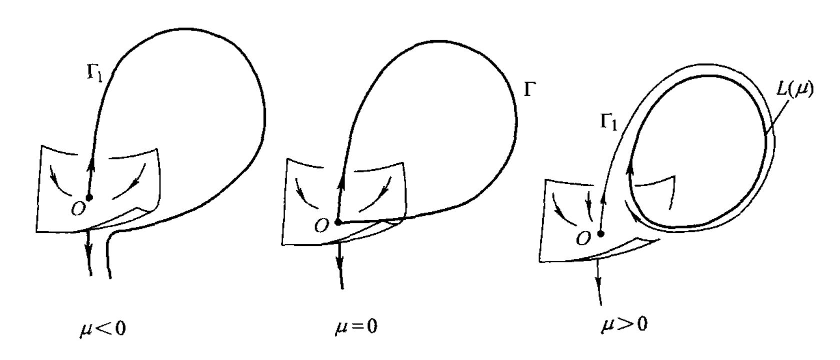


图 13.4.1 $\sigma_0 < 0$ 时从鞍点分界线回路产生的稳定周期轨道.

原先, 这条定理是对 $\mathbb{C}^2$ – 光滑系统证明的. 我们在这里强调, 我们的证明包括 $\mathbb{C}^1$ – 类系统, 这允许我们直接用这条定理到定义在 $\mathbb{C}^1$ – 光滑不变流形上的系统 (见定理 13.9).

上面定理的证明基于对 Poincaré 映射 $T = T_1 \circ T_0$ 的研究. 通常, 某两个截面 S_0 和 S_1 之间由 O 附近的轨线定义的局部映射记为 T_0, 以及由接近于同宿回路 Γ 的轨线定义的从 S_1 到 S_0 的大范围映射记为 T_1.

我们在 O 附近引入坐标 $(u, y), u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^1$, 使得不稳定流形在 O 切于 y 轴, 稳定流形切于 u – 空间. 因此, 系统在 O 附近可以写为下面的形式

$$\begin{aligned} \dot{u} &= B(\mu)u + p(u, y, \mu), \\ \dot{y} &= \gamma(\mu)y + q(u, y, \mu), \end{aligned} \tag{13.4.2}$$

其中 p 和 q 以及它们关于 (u, y) 的一阶导数在原点等于零; 矩阵 B 的特征值 $\lambda_1(\mu), \cdots, \lambda_m(\mu)$ 按假设有负实部, 特征指数 $\gamma(\mu)$ 是正实数.

设 M^+ 是同宿回路 Γ 在 $W^s_{\rm loc}$ 上的某一点, M^- 是 Γ 在 $W^u_{\rm loc}$ 上的一点. 我们选择这些点充分接近于 O 使得可以构造两个与 Γ_1 横截相交的截面: 截面 S_0 通过点 M^+, 截面 S_1 通过点 M^- (图 13.4.2). 由于稳定流形切于 u – 空间, 得知如果 M^+ 充分靠近 O, 则在 M^+ 有 $\dot{u} \neq 0$. 回忆 u 是以 $u_1, \cdots, u_m$ 为坐标的向量. 由于它们的

选择是任意的, 假设在 M^+ 有 $\dot{u}_1 \neq 0$. 因此, 我们可以选择截面 S_0 为在 $u_1 =$ 常数上通过 M^+ 的小面积区域. 另一个通过 M^- 的截面 S_1 是 $y =$ 常数上具有小面积的区域.

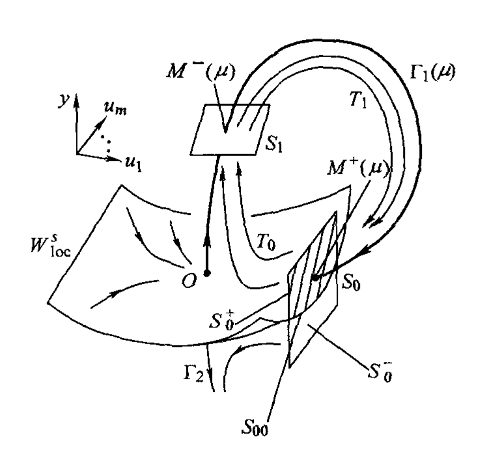


图 13.4.2　定理 13.6 证明的示意图.

因此, $u^1 = (u_1, \cdots, u_m)$ 为在 S_1 上的坐标, $(y^0, u^0) = (y, u_2, \cdots, u_m)$ 为 S_0 上的坐标. 在本书的第一卷的 6.2 节 (引理 6.1) 我们已经证明

$$\left\| \frac{\partial u^1}{\partial (y^0, u^0)} \right\| \leqslant Ce^{(\sigma+\delta)\tau}, \tag{13.4.3}$$

其中 $u^1 = T_0(y^0, u^0)$ (即从 S_0 上 (u^0, y^0) 出发在点 u^1 与 S^1 相交的轨道), τ 是两个对应点之间的飞行时间. 由截面接近 O 移动可使得量 δ 按需要充分小.

在稳定流形上的轨道对所有正时间都停留在 O 的小邻域内. 因此, 对 S_0 上接近于 $W^s_{\rm loc}$ 的点的飞行时间 τ 很长. 从而, 公式 (13.4.3) 意味着映射 T_0 是强压缩 (回忆由假设 $\sigma < 0$). 正如前面指出的, 这个压缩是线性化流收缩面积的直接结论 (在引理 6.1 中类似于 (13.4.3) 的估计的证明是基于更一般的方法).

注意到稳定流形将截面 S_0 分为两个部分, 映射 T_0 仅定义在上面部分 S_0^+ (从下面部分 S_0^- 出发的所有轨道都离开 O 的小邻域向另一个分界线 Γ_2 靠近, 因此与 S_1 不相交).

正像二维情形, 从 S_1 到 S_0 由同宿回路附近系统轨线定义的大范围映射 T_1 是点 M^- 的小邻域到点 M^+ 小邻域的微分同胚. 从而它的导数有界.

因此, Poincaré 映射 $T = T_1 \circ T_0$ 是从 S_0^+ 到 S_0 的强压缩映射. 显然, 当点 $M \in S_0^+$ 趋于边界 $S_{00} = W^s_{\rm loc} \bigcap S_0$ 时, 它的像 $T_0 M$ 趋于点 $M^-(\mu) = \Gamma_1(\mu) \bigcap S_1$. 因此由连续性, 我们可定义

$$TS_{00} = M^+(\mu) \equiv T_1 M^-(\mu).$$

由假设,$\mu > 0$ 时回路向内 (在 W^s_{loc} 上方) 分裂, $\mu < 0$ 时回路向外 (在 W^s_{loc} 下方) 分裂. 这等价于下面的条件

$$M^+(\mu) \in \begin{cases} S_0^+ & \text{对 } \mu > 0, \\ S_{00} & \text{在 } \mu = 0, \\ S_0^- & \text{对 } \mu < 0. \end{cases}$$

引理 13.4 设 V 是 $\mathbb{R}^m$ 中的凸闭集, U 是 V 的闭子集. 令 T 是压缩映射 $T: U \to V$. 还假设在 V 中 U 的边界 ∂U 被 T 映为单个点 M^+. 则如果 $M^+ \in U$, 映射在 U 中有唯一不动点 M^*, 它是 M^+ 由 T 迭代的极限. 所有不进入 $V \backslash U$ 的轨线都趋于 U 中的不动点. 反之, 如果 $M^+ \in V \backslash U$, 则在 U 中不存在不动点. 此外, 任何轨道经映射有限次迭代都离开 U.

注意定理 13.6 由这个引理直接得到. 其中 $V = S_0$, $U = S_0^+$, $\partial U = S_{00}$, $V \backslash U = S_0^-$, 以及由于 T 是 Poincaré 映射, 它在 S_+ 上的稳定不动点对应于稳定极限环 ($S_{00} = W^s_{\mathrm{loc}} \bigcap S_0$ 上的不动点由构造对应于同宿回路 Γ).

为了证明上面的引理, 将映射 Γ 延拓到 $V \backslash U$ 上, 使得对所有 $M \in V \backslash U$ 有 $TM = M^+$. 这个扩展映射保持压缩且将 V 映为 V. 因此它有唯一不动点 M^*, 它吸引 V 中所有点的向前轨道. 这个不动点是原映射 T 的不动点, 只要它属于 U. 否则, 如果它位于 $V \backslash U$, 它是一个 "虚的不动点". 在后一个情形, 由构造 $M^* = TM^* = M^+$. 反之亦然, 如果 $M^+ \in V \backslash U$, 则 $TM^+ = M^+$. 这意味着 $M^+ = M^*$ (由不动点的唯一性). 因此,$M^* \notin U$ 当且仅当 $M^+ \notin U$. 我们已经几乎证明了这个引理. 最后一步要证明如果 $M^* \in U$, 则 M^+ 的迭代永不离开 U (这表明这些迭代收敛于 M^*). 为此, 必须注意到由压缩性质, 我们有下面的关系

$$\mathrm{dist}(T^k M^+, M^*) = \mathrm{dist}(T^{k+1}(\partial U), T^{k+1} M^*) < \mathrm{dist}(\partial U, M^*),$$

这就证明了我们的论断, 因此完成了引理 13.4 和定理 13.6 的证明.

这个结果给了我们周期轨道最后知道的一个主 (余维 1) 稳定性边界. 我们将在下面看到 (定理 13.9 和定理 13.10) 同宿回路分支的其它情形导致复杂动力学 (无穷多个周期轨道), 或者产生单个鞍点周期轨道.

所以, 我们来考虑正鞍点量情形, 即

$$\gamma + \max_{i=1,\cdots,m} \mathrm{Re}\ \lambda_i > 0$$

(如前, 其中用 γ 记仅有的一个正特征指数, 用 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 记具有负实部的特征指数). 假设最靠近虚轴的特征指数是单个实数, 即

$$0 > \lambda_1 > \max_{i=2,\cdots,m} \mathrm{Re}\ \lambda_i.$$

λ_1 是复的情形将在后面讨论 (定理 13.8).

我们作下面的**非退化假设**[5]:

(1) $\Gamma \not\subset W^{ss}$.

(2) 扩展不稳定流形 W^{uE} 在 Γ 上的点与稳定流形 W^s 横截相交 (图 13.4.3).

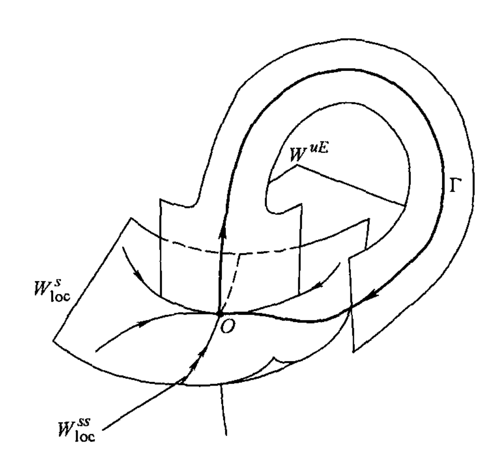


图 13.4.3　定理 13.7 的非退化条件的示意图: 同宿回路沿着主方向进入鞍点. 两个流形 W^{uE} 和 W^s 彼此横截相交.

传统上, 这个条件写为

$$A \neq 0.$$

我们将在下面借助 Poincaré 映射定义量 A. 它类似于在 13.1 节和 13.2 节引入的二维情形的分界线量 A. 回忆 A 在二维情形总是非零的. 但是, 在高维 A 的非零是一个基本假设.

我们在这里考虑的情况是下一节定理 13.9 的一个特殊情形.[6] 从这个定理得知 (应用改变时间方向的系统) 单个鞍点周期轨道 L 是由同宿回路产生. 它有 m 维稳定流形和二维不稳定流形. 这个结果类似于定理 13.6. 但是, 注意那是在负鞍点量情形, 主要结果 (产生唯一稳定极限环)的成立没有任何附加的非退化要求 (主稳定特征值 λ_1 没有地方要求是单的或实数). 相反, 当鞍点量是正时, 非退化假设 (1) 和 (2) 的破坏导致产生更多的分支. 我们将在 13.6 节研究这个问题.

[5] 回忆强稳定不变流形 W^{ss} 在 O 切于线性化矩阵对应于非主特征指数 $\lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 的特征空间. 它是 $(m-1)$ 维的且将 W^s 划分为两部分. W^s 中不属于 W^{ss} 的轨道当 $t \to +\infty$ 时沿着主方向趋于 O. 扩展不稳定流形是光滑不变的, 它在 O 切于对应于特征指数 γ 和 λ_1 的特征空间.

[6] 考虑定理 13.9 中一维稳定流形的情形并改变时间方向. 于是定理中的条件 (1) 和 (2) 与上面两个非退化假设重合.

进一步我们假设系统是 $\mathbb{C}^r$ 的, $r \geqslant 2$.[7] 在这种情形下系统在 O 附近可写为形式 [见 13.8 节和公式 (13.8.28)]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\lambda_1 x + f_{11}(x,y)x + f_{12}(x,u,y)u,\\ \dot{u} &= B_2 u + f_{21}(x,y)x + f_{22}(x,u,y)u,\\ \dot{y} &= \gamma y,\end{aligned} \tag{13.4.4}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^1$ 和 $y \in \mathbb{R}^1$ 是主坐标, $u \in \mathbb{R}^{m-1}$ 是稳定的非主坐标向量, B_2 的特征值 $(\lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ 位于直线 $\mathrm{Re}(\cdot) = \lambda_1$ 的左边. 函数 f_{ij} 满足

$$f_{i1}(x,0) \equiv 0, \quad f_{1j}(0,0,y) \equiv 0. \tag{13.4.5}$$

在这些坐标下稳定流形局部地由 $y = 0$ 定义, 局部不稳定流形由 $\{x = 0, u = 0\}$ 定义, 强稳定流形由 $\{x = 0, y = 0\}$ 定义.

扩展不稳定流形 W^{uE}_{loc} 在不稳定流形的点切于平面 $u = 0$. 事实上, $\dot{u}$ 的方程在 $\{x = 0, u = 0\}$ 的线性化是 (这里我们用了在 $x = 0$有$f_{21} = 0$)

$$\dot{u} = (B_2 + f_{22}(0,0,y(t)))u.$$

由此得知沿着 W^u_{loc} 平面 $u = 0$ 关于线性化流是不变的, 并在 O 与 W^{ss} 横截相交. 因此, 这事实上在 W^u_{loc} 上唯一确定了 W^{uE}_{loc} 的切线 (见第一卷 5.3 节).

由假设, 回路 Γ 当 $t \to +\infty$ 时沿着 x 轴进入 O. 同时它在 $t = -\infty$ 离开 O 时与 y 半轴局部地重合. 假设 Γ 与 O 分别从正 x 和 y 这边相连接.

选择两个与 Γ 横截的截面 $S_0 : \{x = d\}$ 和 $S_1 : \{y = d\}$, $d > 0$ 是某个小数. 用 (y_0, u_0) 记 S_0 上的坐标, (x_1, u_1) 为 S_1 上的坐标. 我们的兴趣是在 Γ 的小邻域内会发生什么, 因此, 假设对某小 $\delta > 0$, 在 S_0 上 $\|u_0 - u^+\| \leqslant \delta$, 以及在 S_1 上 $\|x_1, u_1\| \leqslant \delta$. 这里, u^+ 是点 $M^+(0, u^+) = \Gamma \bigcap S_0$ 的 u 坐标.

局部映射 $T_0 : S_0 \to S_1$ 在给定的坐标下改写为 (见 13.8 节公式 (13.8.30))

$$x_1 = y_0^\nu d^{1-\nu} + o(y_0^\nu), \quad u_1 = o(y_0^\nu), \tag{13.4.6}$$

其中 $\nu = \left|\dfrac{\lambda_1}{\gamma}\right|$ 是鞍点指标. 注意, 在 (13.4.6) 的右端只有 $o(y_0^\nu)$ 类型的项依赖于 u_0. 局部映射 T_0 定义在 S_0 的上半部分 $S_0^+ : \{y_0 \geqslant 0\}$ (从 $y_0 < 0$ 出发的轨道沿着另外的不稳定分界线离开 O 的小邻域, 这条分界线局部地与 y 的负半轴重合). 从 (13.4.6) 立刻看出, S_1 上的像 $T_0 S_0^+$ 是顶点在点 $M^-(0,0) = \Gamma \bigcap S_1$, 两条边在 M^- 切于 $W^{uE}_{\mathrm{loc}} \bigcap S_1$ (在我们的坐标下的 x_1 轴) 的曲线三角形 (图 13.4.4).

[7] 在 $\mathbb{C}^1$ – 情形下我们这里得到的图像仍成立, 但是当系统至少是 $\mathbb{C}^2$ 时, 分析变得更加明显.

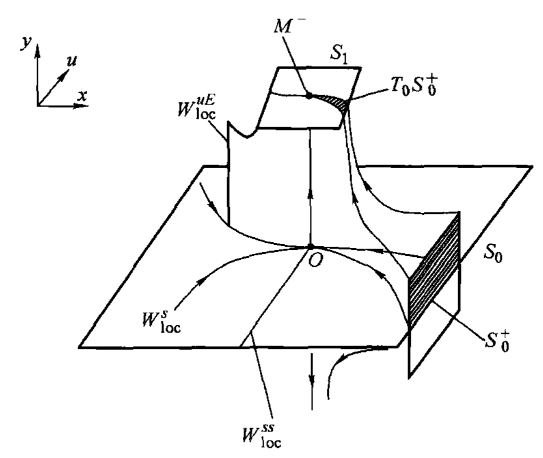


图 13.4.4 局部 Poincaré 映射 T_0 将截面 S_0 的上半部分 S_0^+ 映为截面 S_1 上的曲线三角形. $S_0\bigcap W_{\rm loc}^s$ 中的点映为单个点 M^-.

我们可以看到映射 T_0 沿着 u 方向是强压缩的, 又由于 $\nu<1$ (等价于 $\sigma=\gamma+\lambda_1>0$), 沿 y 方向是膨胀的,[8] 即

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_0}\gg 1.$$

由 O 的小邻域外接近于 Γ 的轨线的流定义大范围映射 $T_1:S_1\to S_0$. 在 S_1 上原点 M^- 的小邻域内, 映射 T_1 可以写为形式

$$\begin{aligned}\bar{y}_0&=\mu+a_{11}x_1+a_{12}u_1+\cdots,\\ \bar{u}_0&=u^+(\mu)+a_{21}x_1+a_{22}u_1+\cdots,\end{aligned}\tag{13.4.7}$$

其中 μ 是回路的分裂参数. 如果我们记 $M^+(\mu)=\Gamma_1(\mu)\bigcap S_0=T_1M^-$, 则 $(\mu,u^+(\mu))$ 是这点的坐标. 由定义在 $\mu=0$, $M^+\in W_{\rm loc}^s\bigcap S_0$. 当 $\mu>0$ 时, 点 $M^+(\mu)$ 位于 S_0^+ 内, 即回路向内分裂. 当 $\mu<0$ 时, 点 $M^+(\mu)$ 位于 S_0^- 内, 即回路向外分裂.

由于 T_1 是微分同胚, 我们有

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

[8] 我们已经在 2.4 节对系统在鞍点附近是线性的情形叙述过这个图像. 对 $\mathbb{C}^1$ – 光滑的非线性系统, 这个图像由 6.2 节证明的估计得到. 事实上, 由引理 6.3 得知, 在我们的情形, S_0 的任何直线 $\{u_0=\text{常数},\ y_0\geqslant 0\}$ 在 T_0 下的像是在 S_1 上的曲线

$$u_1=w_{\rm loc}(d,x_1,u_0),\quad x_1\geqslant 0,$$

其中 $w_{\rm loc}$是光滑函数, 它与它关于 x_1 的一阶导数在 $x_1=0$ 处恒等于零. 因此, 对任何固定的 u_0, 这条曲线在点 M^- 切于 x_1 轴. 因此, 整个集合 $T_0S_0^+$ 是切于 x_1 轴的曲线楔. 由引理 6.1 沿 u – 方向压缩, 沿 y – 方向膨胀. 注意, 我们这里的记号与 6.2 节的不同. 为了与引理 6.1—引理 6.3 的对应, 我们必须作下面的置换: 6.2 节的映射 $T_{\rm loc}$ 是我们这里映射 T_0 的逆, 这里的截面 S_0 和 S_1 分别是 6.2 节中的 $S^{\rm out}$ 和 $S^{\rm in}$. 最后, 引理 6.3 中 $S^{\rm in}$ 上的坐标 (u^0,y^0,w^0) 和 $S^{\rm out}$ 上的坐标 (u^1,w^1) 分别对应于这里的 S_1 上的坐标 $(y=d,x_1,u_1)$ 和 S_0 上的坐标 (y_0,u_0).

(此外, 当流定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内或者在可定向的流形上时 $\Delta > 0$). 也得知 a_{11} 和 a_{12} 不可能同时为零. 然而, 系数 a_{11} 可单独为零. 记 $a_{11} \equiv A$. 由定义,

$$A = \left.\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial x_1}\right|_{M^-}. \tag{13.4.8}$$

注意到 W^{uE} 和 W^s 在 Γ 上的横截性事实上等价于条件 $A \neq 0$. 另外, 截面上坐标的选择在这里是重要的: 由于我们取 x_1 轴切于直线 $W^{uE}_{\mathrm{loc}} \bigcap S_1$, 这条直线的像 $T_1(W^{uE}_{\mathrm{loc}} \bigcap S_1)$ 与 $\{y_0 = 0\} = W^s_{\mathrm{loc}} \bigcap S_0$ 横截相交, 当且仅当 $\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial x_1} \neq 0$.

结合公式 (13.4.6) 和 (13.4.7), 我们得到 Poincaré 映射 T 的下面的表达式:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \mu + A y^\nu + o(y^\nu), \\ \bar{u} &= u^+(\mu) + a_{21} y^\nu + o(y^\nu) \end{aligned} \tag{13.4.9}$$

(我们在这里去掉了下标 “0” 并尺度化变量使得 (13.4.6) 中的 $d = 1$. 右端关于 u 的依赖性包含在 $o(y^\nu)$ 项中). 注意到分界线量 A 是作为 Poincaré 映射中 $\bar{y}$ 渐近式的主项 y^ν 前的系数出现的.

因此, 如果 $A \neq 0$, 则映射 $T = T_1 \circ T_0$ 与局部映射 T_0 有相同的性质, 即: 沿 u – 方向压缩, 沿 y – 方向膨胀, 即它是**鞍点映射** (见 3.15 节). S_0 上的像 TS_0^+ 类似于图 13.4.5 所示. 注意到 $A < 0$ 时 $TS_0^+ \bigcap S_0^+ = \varnothing$, 就是说, 在这种情形下, 从同宿回路小邻域内出发的任何轨道在回路附近经过一次迭代以后就必须离开这个邻域. 反之, 在 $A > 0$ 的情形, 交 $TS_0^+ \bigcap S_0^+$ 非空. 对 S_0^+ 中的任何垂直线 $u_0 =$ 常数, 它在映射 T 的迭代下将位于 S_0^+ 中, 并收敛于从点 $M^+ = \Gamma \bigcap S_0$ 出发的 T 的光滑不变曲线 l_0^+.

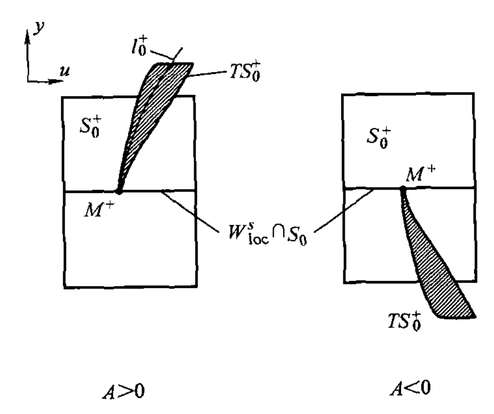


图 13.4.5　S_0 上 S_0^+ 的像 TS_0^+ 是一个楔, 当 $A > 0$ 时它映到 S_0^+, 或者当 $A < 0$ 时它映为关于 $W^s_{\mathrm{loc}} \bigcap S_0$ 的倒置楔. $A > 0$ 时存在映射的不变曲线 l_0^+.

图 13.4.6 ($A\mu > 0$) 和图 13.4.7 ($A\mu < 0$) 显示 S_0^+ 在映射 T 作用下的像当回路分裂时是如何移动的. 在任何情形, 由于映射 T 对 u – 变量是压缩, 对 y 是膨胀, 故在 S_0 它有与 $\{y_0 = 0\}$ 横截的光滑吸引的不变曲线 $l_0(\mu)$.

从 $l_0(\mu)$ 出发的轨线组成流的二维吸引不变流形 $\mathcal{M}_\mu$. 这个流形在同宿回路小邻域内的存在性证明, 由 6.1 节的定理 6.2 给出, 定理的假设在所考虑的情形下与我们的条件 (1) 和 (2) 相重合.

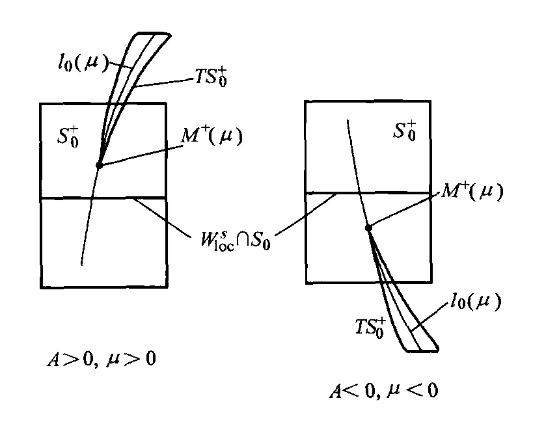


图 13.4.6　分界线回路分裂后的映射.

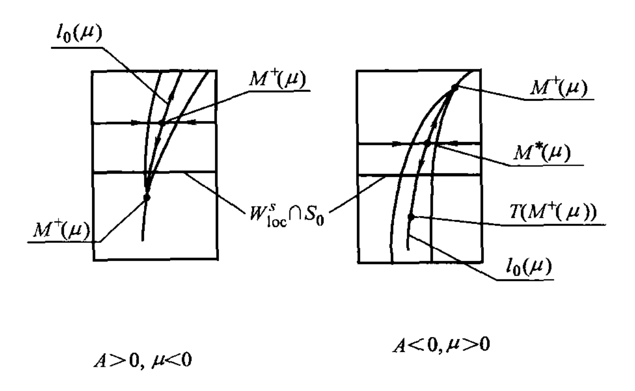


图 13.4.7　不动点 M^* 对应于由同宿回路产生的鞍点周期轨道. 当 $A>0$ 时它的不稳定乘子是正的, 在情形 $A<0$ 它是负的.

流形 $\mathcal{M}_\mu$ 包含对所有负时间位于 Γ 小邻域 U 内的所有轨线. 在 O 附近流形 $\mathcal{M}_\mu$ 与扩展不稳定流形 $W^{uE}_{\rm loc}$(不唯一) 重合. 因此, 如果我们记 $l_1(\mu)=\mathcal{M}_\mu\bigcap S_1$, 则 $l_1(\mu)$ 在点 M^- 与 x_1 轴相切. 由于 $\mathcal{M}_\mu$ 是不变流形, 从 $l_1(\mu)$ 出发的轨道必须在 $l_0(\mu)$ 的点与 S_0 相交, 即 $T_1l_1(\mu)=l_0(\mu)$. 由 (13.4.7) 和 (13.4.8) 得知在 $l_0(\mu)$ 的点处, 如果 $A<0$ 流形 $\mathcal{M}_\mu$ 与它自己的反定向黏合, 或者 $A>0$ 时与它的相同定向黏合. 故 $A>0$ 时 $\mathcal{M}_\mu$ 是环域, $A<0$ 时它是 Möbius 带 (见图 13.4.8).

当限制在不变曲线 $l_0(\mu)$ 上时, 映射 T 是一维膨胀映射, 当 $A>0$ 时是单调递增的, 当 $A<0$ 时是单调递减的. 这种映射的 Lamerey 图如 13.2 节的图 13.2.5 和图 13.2.6 所示. 因此我们可以看到, 如果 $A\mu>0$, 则在 T 的迭代下所有轨线都离开

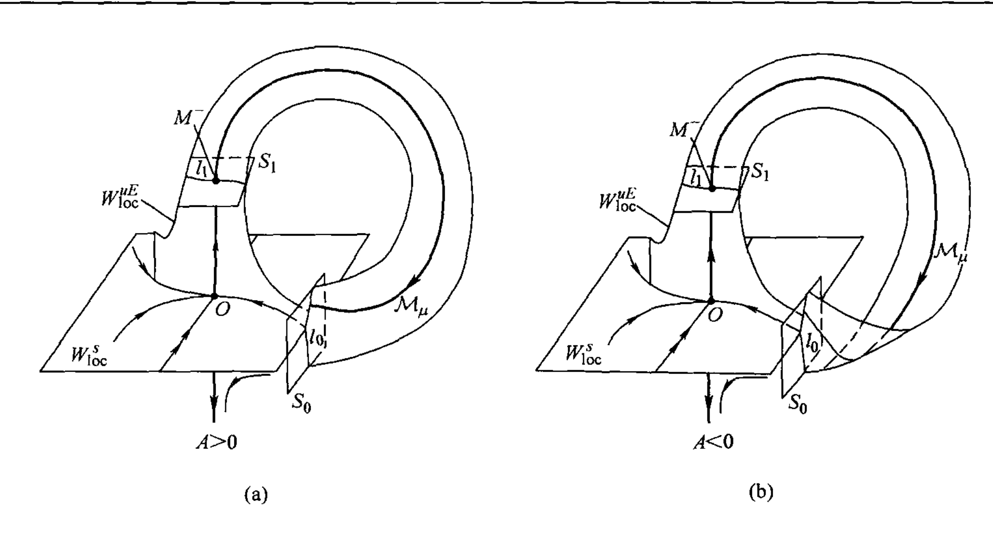


图 13.4.8 (a) 当 $A>0$ 时不变流形 $\mathcal{M}_\mu$ 是可定向曲面, 或者 (b) 当 $A<0$ 时是 Möbius 带.

S_0^+. 如果 $A\mu<0$, 则映射 T 在 $l_0(\mu)$ 上有不稳定不动点 $M^*(\mu)$. 由于压缩是沿着与 $l_0(\mu)$ 横截的方向, 点 $M^*(\mu)$ 是 S_0^+ 中的鞍点.

下面的不动点坐标容易从 (13.4.9) 得到:

$$u \sim u^+(\mu), y \sim \left(\frac{-\mu}{A}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

由于 Poincaré 映射的不动点对应于流的周期轨道, 我们可以叙述下面的一个结果 (见图 13.4.9):

定理 13.7 如果具有正鞍点量的鞍点同宿回路 Γ 满足条件 (1) 和 (2), 则当 $A\mu<0$ 时从回路产生单个鞍点周期轨道 $L(\mu)$. $A>0$ 时 $L(\mu)$ 的不稳定流形是二维可定向的 (于是只存在一个正乘子大于 1), 或者当 $A<0$ 时不可定向 (于是按绝对值大于 1 的乘子是负的). 对 $A\mu>0$ 不存在对所有时间都位于 Γ 小邻域 U 内的轨道 (除了平衡态 O). $A\mu<0$ 时几乎所有的轨道都离开 U. 例外的是 O, L 以及一条以 L 为它的 α - 极限, O 为它的 ω - 极限的异宿轨道.[9]

在截面 S_0 上, 不动点 $M^*(\mu)$ 的局部不稳定流形是通过这一点的不变曲线 $l_0(\mu)$ 的一小段. S_0 上 $M^*(\mu)$ 的整个不稳定流形可以通过映射 T 对局部不稳定流形的迭代来得到. 由于映射 T 的定义域 S_0^+ 由曲面 $\{y_0=0\}=W^s_{\rm loc}(O)\bigcap S_0$ 界定, $M^*(\mu)$ 的不稳定流形由这个曲面的像界定. 因此当 $A>0$ 时, 它是由点 $M^+(\mu)=T_1M^-=\Gamma_1(\mu)\bigcap S_0$ 界定的 $l_0(\mu)$ 的一部分, 或者当 $A<0$ 时是 $l_0(\mu)$ 在点 $M^+(\mu)$ 和点 $T(M^+(\mu))$ 之间的部分 (见图 13.4.7). 当 $\mu\to 0$ 时, $M^*(\mu)$ 的不稳定流形当 $A>0$ 时趋于不变曲线 l_0^+, 或者 $A<0$ 时收缩到点 M^+. $M^*(\mu)$ 的稳定流形趋于 $\{y_0=0\}$.

[9] 这条轨道是在不变流形 $\mathcal{M}_\mu$ 上 O 的稳定分界线.

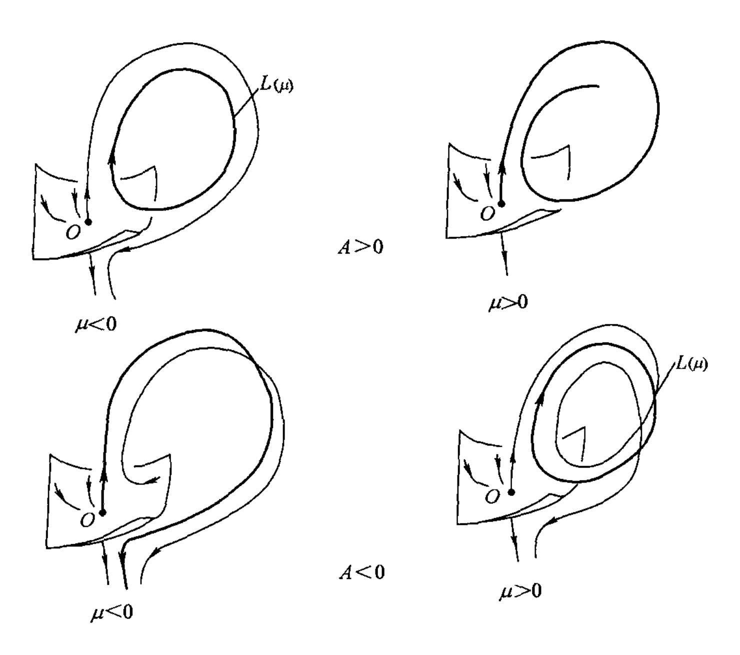


图 13.4.9　从具有正鞍点量的鞍点同宿回路产生鞍点周期轨道.

由构造, 曲线 l_0^+ 是不变流形 $\mathcal{M}_0$ 与 S_0^+ 的交. 如果 $A>0$, l_0^+ 上点的向后轨道在 $\mu=0$ 趋于点 $M^+=\Gamma\bigcap S_0$. 从而, 在情形 $A>0$, 从不变流形 $\mathcal{M}_0$ 上半部分 $(y_0>0)$ 出发的所有轨道以同宿回路 Γ 为它们的 α – 极限 (也见 13.2 节的注 4). 由于流形 $\mathcal{M}_0$ 是吸引的, 它必须排斥向后半轨道. 因此, 不可能存在其它的以 Γ 为 α – 极限的轨道. 由此得知, 对 $A>0$, $\mathcal{M}_0$ 的上半部分是唯一确定的回路 Γ 的**不稳定流形** (图 13.4.10).

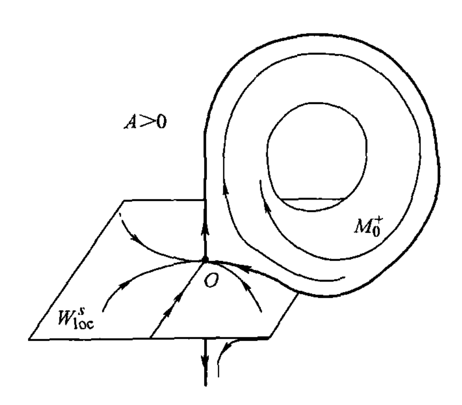


图 13.4.10　具有正鞍点量的鞍点可定向同宿回路 $(A>0)$ 有不稳定不变流形.

当 $\mu\neq 0$ 时, Poincaré 映射的不动点 $M^*(\mu)$ 对应于流的鞍点周期轨道 $L(\mu)$. $L(\mu)$ 的不稳定流形交于 O 的稳定流形, 因此它以不稳定分界线 $\Gamma_{1,2}$ 为界. 由上面

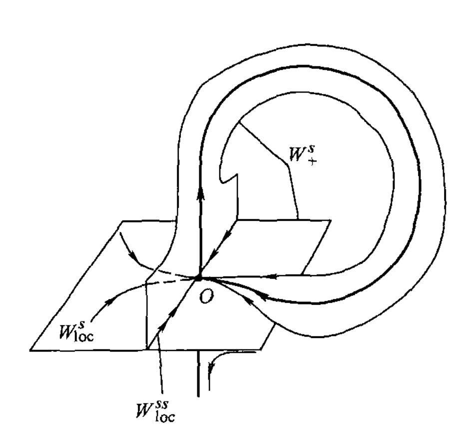


图 13.4.11 具有实 λ_1 的鞍点同宿回路附近稳定流形 W_+^s 向后时间的性态, 只要非退化性假设成立.

分析得知, 当 $A>0$ 时 $L(\mu)$ 的不稳定流形是二维柱面, 当 $\mu\to-0$ 时它趋于 Γ 的不稳定流形. 当 $A<0$ 时 $L(\mu)$ 的不稳定流形是 Möbius 带, 当 $\mu\to+0$ 时它收缩到 Γ.

当 $\mu\to 0$ 时, $L(\mu)$ 的稳定流形趋于包含 Γ 的 $W^s(O)\backslash W^{ss}(O)$ 的分枝 W_+^s. W_+^s 在 Γ 的小邻域 U 内的特征形式如图 13.4.11 所示. 这里, 局部稳定流形可以沿着 Γ 按向后时间延拓, 故它回到 O 的小邻域. 由于 $A\neq 0$, 流形 W^s 与 W_{loc}^{uE} 横截相交, 因此当 $t\to-\infty$ 时它以流形 W^{ss} 为极限. W^s 的这个几何性态是 A 的值非零的直接结论. 但是要注意, 在某些情形, 即使 $A=0$, 流形 W^s 仍可以以 W^{ss} 为向后时间的极限.

在 $\sigma<0$ 的情形也应注意, 我们有相同的几何性态, 只要下面的两个条件满足:

(1) 主特征值 λ_1 是单的实数.
(2) 同宿回路 Γ 不属于强稳定流形, 以及 $A\neq 0$.

这里映射 T 仍有吸引的不变曲线 $l_0(\mu)$, 但是 (在 $\sigma<0$ 的情形) 映射 T 在 $l_0(\mu)$ 上是压缩的. 因此同宿回路 Γ 当 $A>0$ 时具有**稳定流形**, 即以 Γ 为 ω - 极限的点集. 这个集合由通过截面 S_0 的上半部分 S_0^+ 的所有轨线组成, 并以 W_+^s 的闭包为界. 注意, 同宿回路的稳定或不稳定流形的可存在性打开了可出现所谓超同宿 (同宿到同宿) 轨道的道路, 它本质上丰富了动力学. 建议读者参考 [69,157,159].

正如我们在上面看到的, 具有实主特征值的鞍点同宿回路附近的动力学本质上是二维的. 当我们考虑鞍 - 焦点时出现了新现象. 即我们取鞍 - 焦点平衡态 O 为鞍 - 焦点型 (2,1) (按 2.7 节引入的记号) 的 $\mathbb{C}^r$ - 光滑系统 ($r\geqslant 2$). 换句话说, 假设平衡态只有一个正特征指数 $\gamma>0$, 而其它特征指数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 具有负实部. 此外, 我们也假设主 (最靠近虚轴) 稳定指数是由一对复共轭的 λ_1 和 λ_2:

$$\lambda_{1,2}=-\rho\pm i\omega,\quad \mathrm{Re}\lambda_j<-\rho<0\quad(j=3,\cdots,m)$$

组成. 由时间尺度化, 我们总可以使得 $\gamma = 1$, 在整个这一节都这么假设. 因此, 情形 $\rho > 1$ 在这里对应于负鞍点量 (故这包含在定理 13.6 中). 于是, 我们在这里将主要集中考虑情形 $\rho < 1$ (正鞍点量).

O 的不稳定流形 W^u 和稳定流形 W^s 分别是一维和 n 维的. 不稳定流形是 O 和两条分界线 Γ_1 和 Γ_2 的并. 由定义当 $t \to -\infty$ 时 $\Gamma_{1,2}$ 趋于 O. 假设分界线之一 (Γ_1) 当 $t \to +\infty$ 时趋于 O, 从而形成同宿回路 $\bar{\Gamma}$ (图 13.4.12).

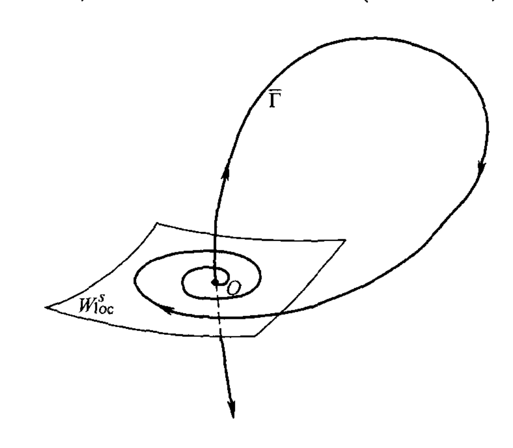


图 13.4.12 鞍 - 焦点同宿回路.

在 $\bar{\Gamma}$ 的小邻域内相空间的结构依赖于鞍点指标 ρ 的符号. 我们将看到轨线在 $\bar{\Gamma}$ 邻域内的性态在情形 $\rho > 1$ (简单动力学) 和情形 $\rho < 1$ (复杂动力学) 有本质的差别.

我们的研究是基于通过局部映射 $T_0 : S_0 \to S_1$ 和大范围映射 $T_1 : S_1 \to S_0$ 的叠加来构造 Poincaré 映射 T, 其中 S_0 和 S_1 是与 Γ 的适当配合的截面.

由本书第一卷附录 A 的结果 (也可看 13.8 节的公式 (13.8.28)), 通过某个关于坐标和时间的 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 变换, 在 O 附近的系统可化为形式

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\rho x_1 - \omega x_2 + f_{11}(x,y)x + f_{12}(x,u,y)u, \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \rho x_2 + f_{21}(x,y)x + f_{22}(x,u,y)u, \\ \dot{u} &= Bu + f_{31}(x,y)x + f_{32}(x,u,y)u, \\ \dot{y} &= y, \end{aligned} \tag{13.4.10}$$

其中 $u \in \mathbb{R}^{m-2}$ 是非主坐标向量, 矩阵 B 的特征值是 $(\lambda_3, \cdots, \lambda_m)$. $\mathbb{C}^{r-1}$ - 函数 $f_{i\,j}$ 满足

$$f_{i1}(x,0) \equiv 0, \quad f_{1j}(0,0,y) \equiv 0, \quad f_{2j}(0,0,y) \equiv 0. \tag{13.4.11}$$

在这些坐标下不变流形被局部直化: 它们的方程分别是 $W^u_{\rm loc} = \{x = 0, u = 0\}$ 和 $W^s_{\rm loc} = \{y = 0\}$. 此外, 系统在稳定流形上关于主坐标 (x_1, x_2) 是线性的.

假设在 $t=-\infty$, Γ 朝 y 的正方向离开 O, 即它与 y 的正半轴局部重合. 因此, 对某小 $d>0$, 我们可以选取截面 S_1 为 $y=d$.

当分界线回到 O 时, 它位于稳定流形 $y=0$ 上. 如果系统的阶数大于 3, 我们将假设 Γ **不属于强稳定流形** W^{ss}. 回忆 W^{ss} 是光滑不变流形, 它在 O 切于 u - 空间, 以及当 (13.4.11) 满足时, $W^{ss}=\{x=0,y=0\}$. 回忆由 2.6 节和 2.7 节得知, 从 $W^s\backslash W^{ss}$ (因此也从分界线 Γ) 出发的任何轨线沿着主平面 $u=0$ 趋于 O, 因此它在这个平面的投影是螺线, 且与 x_1 的正半轴相交无穷多次. 设 $M^+(x^+>0,0,u^+,0)$ 是 Γ 上的对应点. 取通过这点的截面 $S_0:\{x_2=0\}$.

由 13.8 节 [见 (13.8.30)—(13.8.33)] 得知, 在 $t=0$ 从 $x=(x_0,0), u=u_0$ 出发并在 $t=\tau$ 终止于 $y=d$ 的解 $(x(t),u(t),y(t))$ 必须满足关系式

$$\begin{aligned} &y(0)=e^{-\tau}d,\\ &x(\tau)=\exp\left[\tau\begin{pmatrix}-\rho & -\omega\\ \omega & -\rho\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_0\\0\end{pmatrix}+o(e^{-\rho\tau}),\\ &u(\tau)=o(e^{-\rho\tau}),\end{aligned}\tag{13.4.12}$$

其中项 $o(e^{-\rho\tau})$ 表示 (x_0,u_0,τ) 的某个 $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑函数, 它以及它所有直到 $(r-1)$ 阶的导数衰减到零的速度快于 $e^{-\rho\tau}$.

现在我们计算从点 $(x_0,u_0,y_0)\in S_0$ 到 S_1 的飞行时间

$$\tau=-\ln\frac{y_0}{d}.$$

将这个表达式代入 (13.4.12), 我们得到下面的由 O 附近的流的轨线表示的局部映射 $T_0:(x_0,u_0,y_0)\mapsto(x_1,x_2,u_1)\in S_1$ [10]的公式:

$$\begin{aligned} x_1&=x_0\left(\frac{y_0}{d}\right)^{\rho}\cos\omega\ln\frac{d}{y_0}+o(y_0^{\rho}),\\ x_2&=x_0\left(\frac{y_0}{d}\right)^{\rho}\sin\omega\ln\frac{d}{y_0}+o(y_0^{\rho}),\\ u_1&=o(y_0^{\rho}).\end{aligned}\tag{13.4.13}$$

这里, 项 $o(y_0^{\rho})$ 关于 (x_0,u_0,y_0) 的直到 $(r-1)$ 阶的导数有如 $o(y_0^{\rho-q})$ 的估计, 其中 q 是关于 y_0 的微分次数.

注意到映射 T_0 仅对 $y_0>0$ 有定义. 选择小 $\delta>0$, 并令 S_0^+ 是 S_0 上的长方形 $\{|x_0-x^+|\leqslant\delta,\quad \|u_0-u^+\|\leqslant\delta,\quad 0\leqslant y_0\leqslant\delta\}$ (回忆 $(x^+,u^+,0)$ 是点 $M^+=\Gamma\bigcap S_0$ 的坐标). 从公式 (13.4.13) 我们可以看到 S_1 中的像 $T_0S_0^+$ 看上去像 "蛇形"(图 13.4.13), 它沿着平面 $u_1=0$ 螺旋进入点 $M^-(0,0,0)=\Gamma\bigcap S_1$ (我们已经在 2.4 节详细描述过这个形状). 由连续性, 我们用 $T_0(W^s_{\rm loc}\bigcap S_0)=M^-$ 定义在 $y_0=0$ 的映射 T_0.

[10] 我们用 u_1 记 S_1 上点的 u - 坐标, 用 u_0 记 S_0 上的 u - 坐标.

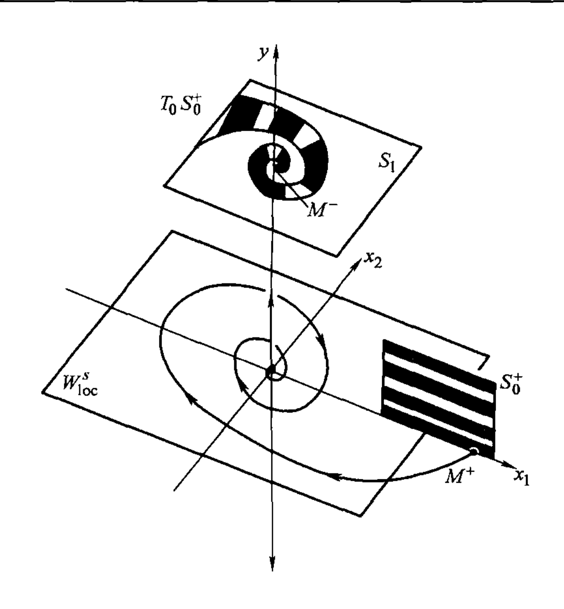


图 13.4.13　鞍 – 焦点附近的局部 Poincaré 映射 T_0.

大范围映射 $T_1: S_1 \to S_0$ 由位于 O 的小邻域之外的 Γ 段邻近的轨线定义. 映射 T_1 是微分同胚, 它将点 M^- 映为点 M^+, 因此可以表示为

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= x^+ + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}u_1 + \cdots,\\ \bar{y}_0 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}u_1 + \cdots,\\ \bar{u}_0 &= u^+ + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}u_1 + \cdots.\end{aligned} \tag{13.4.14}$$

我们将要求

$$A \equiv \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} \neq 0. \tag{13.4.15}$$

注意, 这个条件对三维系统自动满足, 那里不存在非主 u – 坐标. 这时大范围映射取形式

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= x^+ + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots,\\ \bar{y}_0 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots.\end{aligned}$$

由于大范围映射必须是微分同胚, 得知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} \neq 0$, 这实际上得到 (13.4.15).

在维数大于 3 时, 条件 $A \neq 0$ 本质上是非退化条件. 我们利用坐标变换使得系统局部地有形式 (13.4.10) 且恒等式 (13.4.11) 成立, 这是很重要的. 在这些坐标下 $W_{\rm loc}^s$ 与 S_0 的交是直线 $y_0 = 0$, 扩展不稳定流形 $W_{\rm loc}^{uE}$ 与 S_1 的交与空间 $u_1 = 0$ 相切 (扩展不稳定流形是光滑不变流形, 它在 O 与 $W_{\rm loc}^{ss}$ 横截). 因此, 从 (13.4.14) 我们可以看到条件 $A \neq 0$ 等价于 $T_1(W_{\rm loc}^{uE} \bigcap S_1)$ 和 $W_{\rm loc}^s \bigcap S_0$ 在点 M^+ 的横截性条件, 即等价于**扩展不稳定流形 W^{ue} 与稳定流形 W^s 在同宿回路 Γ 上点的横截性条件**.

由公式 (13.4.13) 和 (13.4.14) 得知 Poincaré 映射 $T = T_1 \circ T_0$ 的下面表达式:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= Axy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta\right) + o(y^\rho),\\ \bar{x} &= x^+ d^{-1} + A_1 xy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta_1\right) + o(y^\rho),\\ \bar{u} &= u^+ d^{-1} + A_2 xy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta_2\right) + o(y^\rho),\end{aligned} \tag{13.4.16}$$

其中 $(x, u, y) = (x_0, u_0, y_0)d^{-1}$ 以及 $A_1, A_2, \theta, \theta_1, \theta_2$ 是某些常数.

$T_0 S_0^+$ 在微分同胚 T_1 下的像也有螺旋形. 它在 M^+ 附近与 W^s_{loc} 相交无穷多次. 事实上, 从 (13.4.16)[11] 立刻看到 $y = 0$ 的原像 $T^{-1}(W^s_{\text{loc}} \bigcap S_0)$ 由曲面的无穷序列

$$l_k : y = y_k(x, u) \equiv Ce^{-\pi k/\omega}(1 + o(1)_{k\to+\infty}) \tag{13.4.17}$$

组成, 其中 $C = e^{(\theta-\pi/2)/\omega}$ 且 k 跑遍所有充分大的正整数. 当 $k \to +\infty$ 时这些曲面凝聚在 $y = 0$ 上. 由构造, 它们是 O 的 (大范围) 稳定流形与 S_0 的交. 因此, 稳定流形在这里是自极限的 (它有螺旋面形状, 如图 13.4.14 所示).

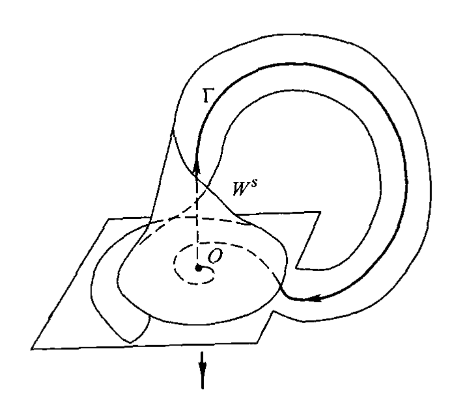


图 13.4.14 鞍 – 焦点的稳定流形沿着同宿回路关于向后时间的延拓有螺旋面形式.

设 σ_k 是 S_0^+ 中由 l_{2k-1} 和 l_{2k} 所围的区域. 由构造, S_0^+ 上不属于 “带域”σ_k 的并的点在 Poincaré 映射 T 下的像落入区域 $y < 0$. 因此, 它们的轨道离开回路的邻域. 从而我们只限于考虑带域 σ_k.

每个带域的像 $T\sigma_k$ 是曲面 $y = 0$ 上 “蛇形” 的一圈的一半 (见图 13.4.15). 注意到它有明显的马蹄形. 由 (13.4.16) 和 (13.4.17) 得知第 k 个马蹄的顶部对应于

$$y \sim y_{2k}^\rho \sim e^{-2\pi\rho k/\omega}.$$

[11] 注意由假设 $A > 0$, 以及 $x > 0$, 因为 x 接近于 x^+ (点 $M^+ = \Gamma \bigcap S_0$ 的坐标), 它是正的. 回忆 $x^+ \neq 0$, 因为由假设 Γ 不位于强稳定流形内.

因此, 当 $\rho > 1$ 时, σ_k 和 $T\sigma_k$ 之间没有交点. 另一方面, 当 $\rho < 1$ 时, 交 $T\sigma_k \bigcap \sigma_k$ 非空并由两个连通分支组成 (图 13.4.16). 几何上显然在每一个分支上存在 T 的一个不动点.[12]

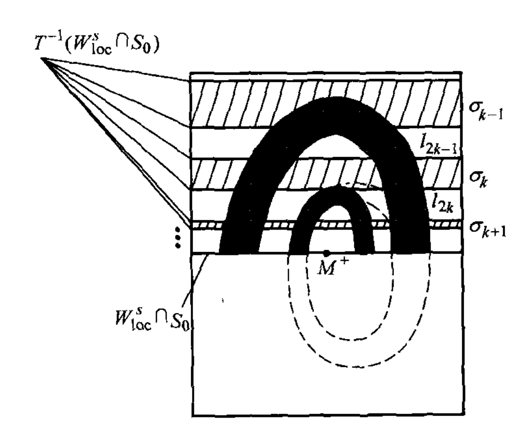


图 13.4.15　鞍 – 焦点同宿回路附近的 Poincaré 映射的结构.

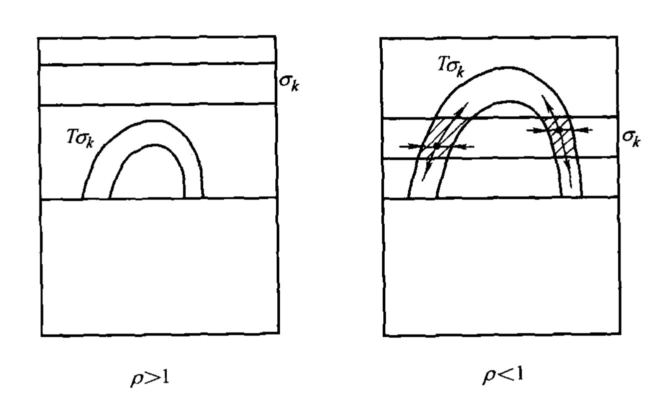


图 13.4.16　对 $\rho > 1$ 和 $\rho < 1$ 带 σ_k 以及 Poincaré 映射的像 $T\sigma_k$ 的位置.

Poincaré 映射 T 的不动点对应于系统的周期轨道. 因此, 我们几乎证明了下面的定理.

定理 13.8　如果 $\rho < 1$, 则在回路 Γ 的任何邻域内存在无穷多个鞍点周期轨道.

这个定理是关于鞍 – 焦点同宿回路附近复杂动力学更一般论断 [还包括高维不稳定流形以及 (2,1) 和 (2,2) 型鞍 – 焦点] 的一部分 [136]. 条件 $\rho < 1$ 如同熟知的 Shilnikov 条件在这里也是非常重要的, 因为在同宿回路附近相空间的结构与定理 13.6 包含的情形 $\rho > 1$ 相比有着很大的改变. 在边界情形 $\rho = 1$ 的主要分支, [29]

[12] 我们看到的类似于著名的 Smale 马蹄.

中第一个考虑当对系统进行小扰动时所引起的从简单动力学 ($\rho > 1$) 到复杂动力学 ($\rho < 1$) 的同宿爆炸.

证明 由 (13.4.16) 给出的 Poincaré 映射 T 的不动点由下面方程求得

$$\begin{aligned} y &= Axy^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta\right) + o(y^\rho), \\ x &= x^+ d^{-1} + A_1 x y^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta_1\right) + o(y^\rho), \\ u &= u^+ d^{-1} + A_2 x y^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta_2\right) + o(y^\rho). \end{aligned} \tag{13.4.18}$$

x 和 u 的值由第二个和第三个方程唯一确定:

$$x = x^+ d^{-1} + O(y^\rho), \quad u = u^+ d^{-1} + O(y^\rho). \tag{13.4.19}$$

将这些表达式代入 (13.4.18) 的第一个方程, 得到不动点的 y – 坐标的下面方程:

$$y = A\frac{x^+}{d} y^\rho \cos\left(\omega \ln \frac{1}{y} + \theta\right) + o(y^\rho). \tag{13.4.20}$$

这个方程右端的图像如图 13.4.17 所示. 当 $\rho < 1$ 时 [图 13.4.17(b)], 存在凝聚于零的无穷多个根:

$$y_k^* = Ce^{-\pi k/\omega}(1 + o(1)_{k\to+\infty}), \tag{13.4.21}$$

其中 $C = e^{(\theta - \pi/2)/\omega}$.

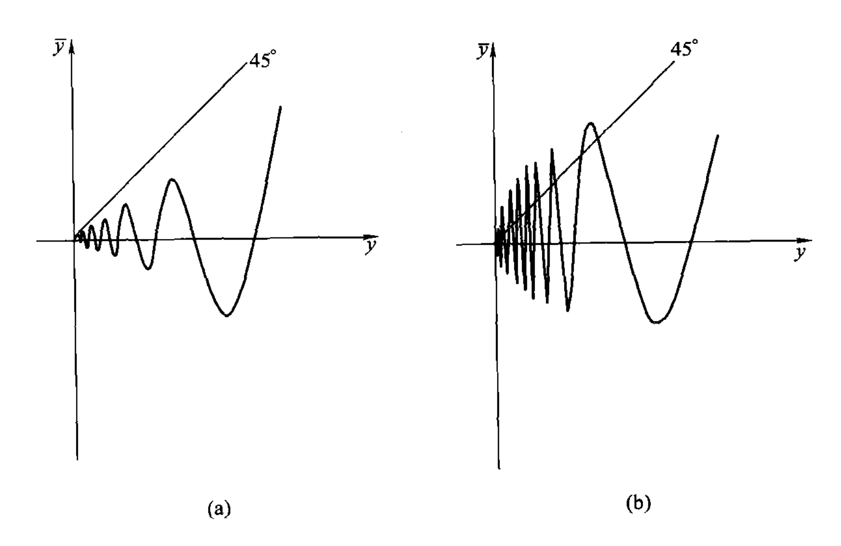


图 13.4.17 对 (a) $\rho > 1$ 和 (b) $\rho < 1$ 模拟的一维 Poincaré 映射.

映射 T 在对应的不动点的 Jacobi 矩阵为 [见 (13.4.16), (13.4.19) 和 (13.4.21)]

$$\begin{pmatrix} (-1)^{k+1}A\dfrac{x^+}{d}\omega(y_k^*)^{\rho-1}(1+o(1)) & O((y_k^*)^\rho) & O((y_k^*)^\rho) \\ O((y_k^*)^{\rho-1}) & O((y_k^*)^\rho) & O((y_k^*)^\rho) \\ O((y_k^*)^{\rho-1}) & O((y_k^*)^\rho) & O((y_k^*)^\rho) \end{pmatrix}. \tag{13.4.22}$$

由于 $k\to+\infty$ 时 $y_k^*\to 0$, 得知 $(y_k^*)^\rho\to 0$ 和 $(y_k^*)^{\rho-1}\to+\infty$ (回忆 $\rho<1$). 现在容易看到矩阵 (13.4.22) 仅有一个特征值

$$\left(\text{估计为}\quad \sim(-1)^{k+1}A\frac{x^+}{d}\omega(y_k^*)^{\rho-1}\right),$$

其绝对值大于 1, 其它所有的特征值当 $k\to+\infty$ 时都趋于零.

我们已经证明映射 T 的无穷多个鞍点不动点的存在性, 它们对应于系统的无穷多个鞍点周期轨道 (具有二维不稳定和 m 维稳定流形). 对应于**偶数** k 的周期轨道有负的不稳定乘子, 它们的不稳定流形是不可定向的. 对应于**奇数** k 的周期轨道有正不稳定乘子, 因此不稳定流形可定向.

第 k 个不动点的 y – 坐标当 $k\to+\infty$ 时趋于零, 故 x – 坐标趋于 x^+, 以及 u – 坐标趋于 u^+ [见 (13.4.19)]. 因此, 这些周期轨道凝聚到同宿回路 Γ. 证明完毕.

注　注意, 鞍 – 焦点同宿回路附近的 Poincaré 映射的不动点问题可化为一维映射

$$\bar{y}=Ay^\rho\cos\left(\omega\ln\frac{1}{y}+\theta\right)+o(y^\rho)$$

的不动点的研究. 事实上, 这个映射可捕获到这样的同宿回路附近的许多 (虽然不是全部) 动力学特性.

13.5　在 $\dim W^u>1$ 情形的同宿回路附近轨线的性态

下面我们考虑 O 的不稳定流形的维数 $n\geqslant 1$ 的一般情形. 设 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是具有正实部的特征指数, 排序如下

$$0<\mathrm{Re}\,\gamma_1\leqslant\mathrm{Re}\,\gamma_2\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}\,\gamma_n.$$

假设鞍点量是负的

$$\sigma=\mathrm{Re}\,\lambda_1+\mathrm{Re}\,\gamma_1<0, \tag{13.5.1}$$

即最接近于虚轴的特征指数具有正实部.

显然, 如果 $\sigma>0$, 我们总可以改变时间方向使得它为负.

几何上, 我们可以假设如果主指数 γ_1 是实数, 则

$$\gamma_1<\mathrm{Re}\,\gamma_i\quad(i=2,\cdots,n), \tag{13.5.2}$$

以及如果 γ_1 是复数, 则

$$\text{Re}\,\gamma_1 = \text{Re}\,\gamma_2 < \text{Re}\,\gamma_i \quad (i = 3, \cdots, n). \tag{13.5.3}$$

为了区别这两种情形, 为简单起见, 我们称第一情形的平衡态为**鞍点**. 第二情形的为**鞍 - 焦点**. 注意这个术语不同于我们在本书整个第一卷中用过的术语. 就是说, 在这一节我们不考虑主特征指数 λ 是实数还是复数. 因此, 在这特殊的一节, 如果 (13.5.1) 和 (13.5.2) 满足, 我们就称 O 为鞍点, 即使 λ_1 是复数.

现在我们再作两个非退化假设. 就是说, 我们假定

(1) **同宿回路 Γ 不属于强不稳定流形 W^{uu}**. 回忆 (2.6 节和 2.7 节) 鞍点的不稳定流形有一个特殊的子集 —— 光滑的强不稳定不变流形 W^{uu}. 它在 O 切于线性化矩阵的特征空间, 这个空间对应于鞍点情形的非主特征指数 $\gamma_2, \cdots, \gamma_n$, 或者在鞍 - 焦点情形对应于 $\gamma_3, \cdots, \gamma_n$. W^u 的不属于 W^{uu} 的轨线, 在鞍点情形当 $t \to -\infty$ 时沿着主方向 (对应于主特征指数 γ_1 的特征向量) 趋于 O, 或者在鞍 - 焦点情形沿着二维主平面 (对应于主特征指数 γ_1 和 γ_2 的特征平面) 盘旋逼近 O.

换句话说, 我们假设当 $t \to -\infty$ 时同宿回路趋于 O 有上面描述的两个方式之一. 原则上, 这并不是强限制, 因为它在分支曲面上定义了一个开的稠密子集: 如果对某系统 Γ 位于 W^{uu} 上, 则经任意小光滑扰动可将它推到 $W^u \backslash W^{uu}$ 中.

(2) **扩展稳定流形 W^{sE} 与不稳定流形 W^u 在 Γ 上的点横截相交.** 回忆 (2.7 节) 二维局部不变流形 W^{sE} 在 O 分别切于线性化矩阵对应于稳定特征指数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 和主不稳定指数 γ_1 (鞍点情形), 或者 $\gamma_{1,2}$ (鞍 - 焦点情形) 的特征空间. 由于它包含局部稳定流形, 它也包含同宿回路 Γ. 在 Γ 附近沿着向后轨道的延拓大范围定义了不变流形 W^{sE}. 局部 (因此大范围) 扩展稳定流形不是唯一的, 但是任何两个这样的流形在稳定流形的任何点彼此相切. 因此, 我们的横截性条件是适定的.

注意, 在鞍点情形 (γ_1 是实数), 在不属于强不稳定流形 W^{uu} 的任何点的不稳定流形的切线张成相速度向量且强不稳定叶层 $\mathcal{F}^{uu}$ 的叶片的切线通过这个给定点.[13] 由于 W^{sE} 是不变流形, 它由整条轨线组成. 因此, 它的切线也包含相速度向量. 从而, 在鞍点情形 W^{sE} 与 W^u 的横截性等价于 W^{sE} 与叶层 $\mathcal{F}^{uu}$ 的横截性.

在鞍点情形现在我们得注意, 上面的假设与本书第一卷 6.1 节的定理 6.1 的条件重合. 这个定理建立了 (具有同宿回路的系统自己和附近的系统的)$(m+1)$ 维 ($\mathbb{C}^1$) **光滑排斥不变流形** $\mathcal{M}$ 的存在性, 这个流形包含对所有正时间位于 Γ 的小邻域 U 内的所有轨道. 由此得知, 我们关于 Γ 的分支问题在这里可以化为在流形 $\mathcal{M}$ 上的分支问题.

在鞍点 O 的小邻域内, 这个不变流形与某个扩展稳定流形 W^{sE}_{loc} 重合. 因此后面的流形在 O 切于对应于特征指数 γ_1 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 的特征空间. 从而, 限制在 $\mathcal{M}$

[13] 这是在 O 附近与主方向横截的唯一确定的 W^u 的不变叶层, 见 6.1 节.

上的系统的鞍点平衡态有一维 (对应于 γ_1) 不稳定流形和 m 维稳定流形 (对应于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$). 相应的鞍点量是负的. 在这种情况同宿回路分支由定理 13.6 刻画. 现在, 回忆 $\mathcal{M}$ 是**排斥流形**, 即流在与 $\mathcal{M}$ 横截的方向是膨胀的. 故从 $\mathcal{M}$ 上的鞍点分支出的稳定周期轨道 (按照定理 13.6) 事实上是整个系统的具有 n 维不稳定流形的**鞍点**周期轨道. 因此, 我们得到了下面结果.

定理 13.9 (Shilnikov [134])　设具有鞍点量 $\sigma < 0$ 的鞍点 O 有同宿回路 Γ, 它满足非退化条件 (1) 和 (2). 令 U 是 Γ 的小邻域. 如果同宿回路在不变流形 $\mathcal{M}$ 上向内分裂, 则产生具有 n 维不稳定流形的单个周期轨道 L. 此外, 对所有时间停留在 U 内的轨道只有鞍点 O, 环 L 以及 以 O 为它的 α - 极限, L 为它的 ω - 极限的单个异宿轨道[14].

当回路向外分裂时, 在 U 内没有周期轨道. 此外, U 内的整条轨道只有鞍点 O. 当存在分界线回路 Γ 时, U 内除了 Γ 和 O 就没有其它的整条轨道了.

这个定理的原来的证明没有化到不变流形上 (虽然原来的阐述与现在的有些不同但两者是等价的). 定理的证明基于直接分析同宿回路附近的 $(m+n-1)$ 维 Poincaré 映射. 这个映射是在类似于本书第一卷 3.15 节定义的意义下的鞍点映射, 这样, 类似于 3.15 节的定理 3.28, 就可应用不动点定理. 为了得到 Poincaré 映射的适当估计, 在 [134] 中假设系统是解析的. 注意, 现在的证明只需 $\mathbb{C}^1$ - 光滑性.

在鞍 - 焦点情形, 下面的结果成立.

定理 13.10 (Shilnikov [136])　设鞍 - 焦点 O 有满足非退化条件 (1) 和 (2) 的同宿回路 Γ. 则在 Γ 的任意小邻域内存在无穷多个鞍点周期轨道.

我们不准备在这里给出这个定理的证明, 因为它超出了本书的范围. 这个定理的一个部分情形 (定理 13.8) 已经在上一节讨论过了. 事实上, [136] 中的主要定理包含有鞍 - 焦点同宿回路邻域内相空间结构的更详细信息, 即借助符号动力学对双曲子集的描述.

在定理原来的证明中所考虑的系统假设是解析的. 后来其它简化证明被提出, 它们基于简化到分界线回路附近的非局部中心流形上 (如果稳定特征指数 λ_1 是实数, 则这样的中心流形一般是三维的, 如果 $\lambda_1 = \lambda_2^*$ 是复数, 则它是四维的), 以及平衡态附近简化系统的光滑线性化 (见 [120,147]). 低维光滑不变流形的存在性在这里是很重要的, 因为它有效地减少了问题的维数.[15]

---

[14] 这是系统在 $\mathcal{M}$ 上的不稳定分界线 Γ_1.

[15] 但是我们应该强调, 单凭条件 (1) 和 (2) 还不足以保证在鞍 - 焦点情形回路附近任何光滑不变流形的存在性 (对这样的流形的存在实际需要的是 W^{sE} 与 $\mathcal{F}^{uu}$ 的横截性条件. 见 [150]). 因此, 化到不变流形一般还不能完全给出定理 13.10.

13.6 同宿回路的余维 2 分支

在这一节和下面几节我们将回顾在不同模型中出现的同宿回路和异宿环的某些余维 2 分支.

考虑具有鞍点平衡态 O 的 $(n+1)$ 维 $\mathbb{C}^r$ – 光滑 $(r \geqslant 4)$ 系统. 设 O 只有一个正特征指数 $\gamma > 0$, 其它特征指数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 假设具有负实部. 此外, 我们要求主稳定指数 λ_1 是实数:

$$\lambda_1 > \mathrm{Re}\,\lambda_j, \quad j = 2, \cdots, n.$$

O 的不稳定流形 W^u 是一维的, 稳定流形 W^s 是 n 维的. 假设一条不稳定分界线 (Γ_1) 当 $t \to +\infty$ 时趋于 O, 因此形成同宿回路, 如图 13.6.1 所示.

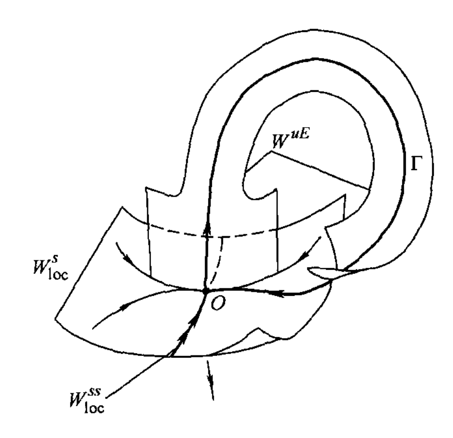


图 13.6.1　由于 W^{uE} 与 W^s 在同宿回路 Γ 的点上横截相交性被破坏而出现的倾角 – 翻转分支 $(A = 0)$.

我们将分析这种同宿回路的余维 2 分支的下面三种情形.

情形 A.

(1) $\nu = 1$,

(2) $\Gamma \not\subset W^{ss}$, 以及

(3) $A \neq 0$.

情形 B.

(1) $A = 0$,
即 W^{uE} 在 Γ 的点切于 W^s (见图 13.6.1).

(2) $\Gamma \not\subset W^{ss}$,
即 $t \to +\infty$ 时 Γ 沿着主方向进入 O, 以及

(3) $\dfrac{1}{2} < \nu < 1, \quad \nu_j > 1 \quad (j = 2, \cdots, n)$.

情形 C.

(1) $\Gamma \subset W^{ss}$,

即 $t \to +\infty$ 时 Γ 沿着非主方向进入 O (见图 13.6.2).

(2) 扩展不稳定流形 W^{uE} 与稳定流形 W^s 在 Γ 上的点横截, 以及

(3) $\nu < 1, \quad \nu_j > 1 \quad (j = 2, \cdots, n)$.

$$\left(\text{这里}: \nu = \left|\frac{\lambda_1}{\gamma}\right|, \quad \nu_j = \left|\frac{\text{Re }\lambda_j}{\gamma}\right|.\right)$$

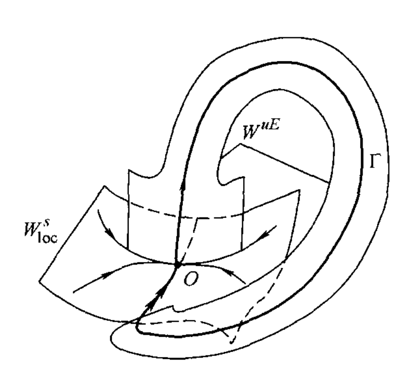


图 13.6.2　轨道 - 翻转分支 —— 同宿回路 Γ 沿着非主子流形在分支时刻闭合.

情形 A 对应于正鞍点量和负鞍点量之间的边界. 情形 B 和情形 C 分别对应于定理 13.4 中的非退化条件 (1) 和 (2) 的破坏 (从具有正鞍点量的同宿回路产生的鞍点周期轨道). 最后两个情形中的条件 (3) 对排除从这些分支向复杂动力学的转移是必要的 (复杂动力学的某些情形在 [44,70,78,96,79,71,72] 中有研究).

同宿回路的余维 2 分支对研究 Lorenz 方程

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = rx - y + xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

的分支现象是本质的. 当 $\sigma = 10, b = \dfrac{8}{3}$ 以及 $r \approx 13.926$ 时鞍点 $O(0,0,0)$ 的一维不稳定分界线 Γ_1 和 Γ_2 沿着相同方向 (z 的正半轴) 回到鞍点. 它们在几何上形成被称为蝴蝶同宿的结构 (图 13.6.3). 注意蝴蝶同宿只能够出现在 $n \geqslant 3$ 的 $\mathbb{R}^n$ 中.

一般地, 蝴蝶同宿分支是余维 2 分支. 但是, Lorenz 方程关于变换 $(x, y, z) \leftrightarrow (-x, -y, z)$ 对称. 在这样的系统中一个同宿回路的存在自动意味着另一个回路的存在,它是其对称像. 因此, 对称系统的蝴蝶同宿是余维 1 现象.

在 Lorenz 模型中, 对应于蝴蝶同宿的参数值的鞍点量是正的. 因此, 两个对称的同宿回路的向外分裂时, 从每个回路产生一个鞍点周期轨道. 此外, 一个周期轨道的稳定流形与另一个周期轨道的不稳定流形横截相交, 反之亦然. 这种相交性的出现相应地导致包括同宿轨道的双曲极限集, 无穷多个鞍点周期轨道等的存在性, 等等 [1]. 在没有对称的蝴蝶同宿情形也存在参数空间的区域, 其中这样的粗极限集存

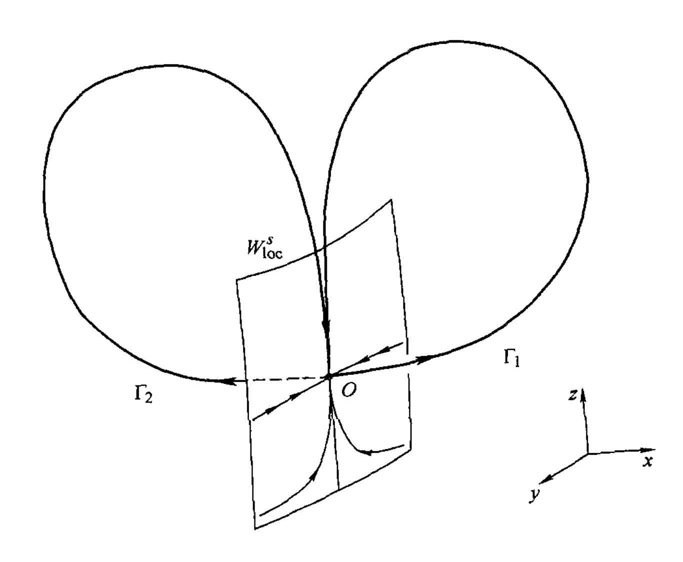


图 13.6.3 蝴蝶同宿. 两条分界线彼此相切回到鞍点.

在 [1,141,149]. 但是, 由于这个极限集是不稳定的, 它不可能直接与奇怪吸引子——Lorenz 方程中混沌动力学的数学反映相对应.

为了解决这个问题, [138] 中提出研究上面情形 A, B 和 C 中的蝴蝶同宿. 即, 建立当下面条件成立时由蝴蝶同宿分支直接导致出现的 Lorenz 吸引子.

(a) 鞍点量 $\sigma = 0$ 以及在两个回路上的额外条件 $|A| < 2$ 满足. 或者当

(b) 在两个回路上 $A = 0$, 其中 $\sigma > 0$ 以及情形 B 的条件 3 满足. 或者当

(c) 两个回路都属于非主流形 (其中 $\sigma > 0$ 以及条件 3 也满足).

情形 (a) 对应于余维 3 分支, 情形 (b) 和 (c) 则是余维 4 的. 但是, 如果系统具有某些对称性, 则上面三个分支都化简为余维 2. 在 [126,127,129] 中建立的满足 $\sigma = 0$ 或者 $A = 0$ 的对称蝴蝶同宿, 它们出现在称为扩展 Lorenz 模型和 Shimizu-Morioka 系统中, 以及在某些离散对称系统中呈现的余维 3 局部分支的某些情形中 [129].

我们在这里不准备考虑 Lorenz 吸引子的产生 (对此可见 [114, 115, 117, 126, 127, 129]) , 但考虑单个同宿回路的余维 2 分支. 情形 A 的分支图与二维情形的相同 ($0 < A < 1$ 时见图 13.3.1 以及 $-1 < A < 0$ 时的图 13.3.3. $|A| > 1$ 的情况化为改变时间方向后的 $|A| < 1$). 这是在 [38] 中已经建立的, 虽然完全的分支图的证明还没有完成 (缺少其它分支曲线).我们在这里就结束对这个问题 (13.6.3小节) 的讨论.

情形 B 和 C 的分支开折是相同的, 如图 13.6.4 所示. 其中 μ 是同宿回路的分裂参数, A 是分界线量. 由于在 13.4 节分界线量 A 仅当回路不属于 W^{ss} 时有定义, 所以我们必须对情形 C 给出它的意义.

回忆非主流形 W^{ss}_{loc} 是 $(n-1)$ 维的. 它将 W^s_{loc} 划分为两个分枝. 如果回路 Γ 位于 W^{ss} 上, 则小扰动可使得它失去 W^{ss}_{loc}, 故它从 W^s_{loc} 的任一个分枝进入鞍点. 我们

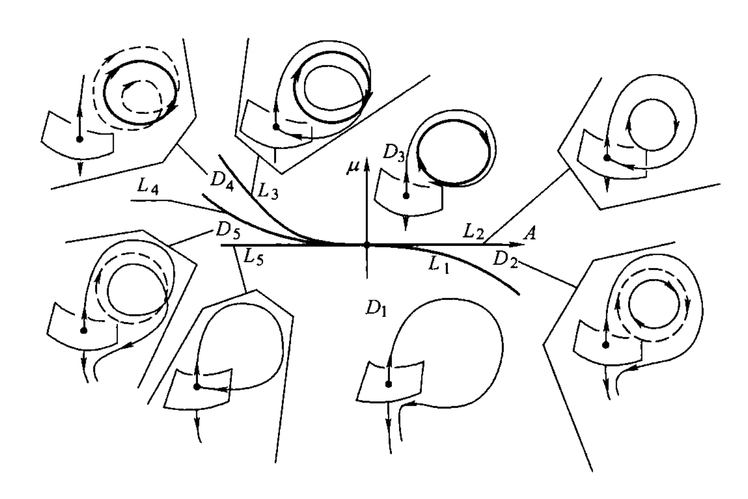


图 13.6.4 轨道 – 翻转分支和倾角 – 翻转分支的分支开折在最简单情形是相同的.

将证明 (13.6.2 小节) 当回路从一个分枝移向另一个时, 将伴随着分界线量 A 符号的改变.

情形 B 的分支图由 [126] (也见 [127,129]) 和 [77] 独立提出, 情形 C 的由 [119] 提出. 这里我们对这两种情形给出一个统一且自相容的证明, 它包括分支图的完全性的证明. 在西方, 情形 B 称为**倾角-翻转分支**, 情形 C 称为**轨道 – 翻转分支**.

在鞍点附近引入坐标使得系统局部地呈现下面的形式 [见 13.8 节公式 (13.8.28)]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\nu x + f_{11}(x,y)x + f_{12}(x,u,y)u,\\ \dot{u} &= Bu + f_{21}(x,y)x + f_{22}(x,u,y)u, \qquad (13.6.1)\\ \dot{y} &= y,\end{aligned}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^1$ 和 $y \in \mathbb{R}^1$ 是主坐标, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ 是稳定非主坐标向量. $\nu = \left|\dfrac{\lambda_1}{\gamma}\right|$ 是鞍点指标, 以及矩阵 B 的特征值是 $-\nu_2, \cdots, -\nu_n$, 其中 $\nu_j = \left|\dfrac{\mathrm{Re}\,\lambda_j}{\gamma}\right|$. 回忆 $1 < \nu_j, j = 2, \cdots, n$. 在情形 B 我们有 $\dfrac{1}{2} < \nu < 1$, 在情形 C 有 $\nu < 1$. 在情形 A, 在分支点 $\nu = 1$, 因此我们可以在这里令 $\nu = 1 + \varepsilon$, 其中 ε 是小参数. $\mathbb{C}^{r-1}$ – 函数 f_{ij} 满足

$$f_{i1}(x,0) \equiv 0, \quad f_{1j}(0,0,y) \equiv 0. \qquad (13.6.2)$$

在这些坐标下, 稳定流形局部地由 $y = 0$ 给出, 局部不稳定流形由 $\{x = 0, u = 0\}$ 给出. 强稳定流形的方程是 $\{x = 0, y = 0\}$.

由假设, 回路 Γ 局部地与 y 半轴重合, 它在 $t = -\infty$ 离开 O. 由于在情形 A 和 B, $\Gamma \not\subset W^{ss}$, 当 $t \to +\infty$ 时它沿着 x 轴进入 O. 在情形 C, 当分界线 Γ 回到鞍点时,

它局部地位于 $\{x=0, y=0\}$ 中. 我们也假设当 $t\to-\infty$ 时回路从正 y 这边与 O 连接, 以及在前面两个情形当 $t\to+\infty$ 时从正 x 这边与 O 连接.

选择回路 Γ 的两个横截面 S_0 和 S_1. 设 S_1 由 $\{y=d\}$ 给出, S_0 在情形 C 由 $\{||u||=d\}$ 给出或者在情形 A 和 B 由 $\{x=d\}$给出, 其中 $d>0$ 是小数. S_1 上的坐标记为 (x_1, u_1), S_0 上的坐标在情形 A 和 B 记为 (y_0, u_0) 或者在情形 C 记为 (y_0, x_0, u_0).

在 S_0 的上半部分 $S_0^+ : \{y_0 \geqslant 0\}$, 局部映射 $T_0 : S_0^+ \to S_1$ 由系统的轨道定义. 由此从 (13.6.1) 的最后一个方程得知从 S_0^+ 到 S_1 的飞行时间是

$$\tau = -\ln\frac{y_0}{d}. \tag{13.6.3}$$

在 13.8 节将证明 [见公式 (13.8.30)—(13.8.36)] , 利用恒等式 (13.6.2) 得知系统从在 $t=0$ 的点 (x_0, u_0) 开始在 $t=\tau$ 于 $\{y=d\}$ 终止的解有下面估计:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= e^{-\nu\tau}x_0 + \xi_1(x_0, u_0, \tau) + \bar{\xi}_1(u_0, \tau), \\ u(\tau) &= \xi_2(x_0, u_0, \tau) + \bar{\xi}_2(u_0, \tau), \end{aligned} \tag{13.6.4}$$

其中

$$\begin{gathered} \xi_{1,2}(0, u_0, \tau) \equiv 0, \\ ||\xi_{1,2}||_{C^{r-2}} = o(e^{-\tilde{\nu}\tau}), \quad ||\bar{\xi}_{1,2}||_{C^{r-2}} = o(e^{-(1+\delta)\tau}), \\ ||\xi_{1,2}||_{C^{r-1}} + ||\bar{\xi}_{1,2}||_{C^{r-1}} = o(e^{-\nu\tau}), \end{gathered} \tag{13.6.5}$$

这里 $\tilde{\nu}$ 可以取得从下面任意接近于 $\min\{2\nu, 1+\nu, \nu_2, \cdots, \nu_n\}$ (故 $\tilde{\nu}>\nu$, 此外在我们有 $2\nu>1$ 的情形 A 和 B 中, $\tilde{\nu}>1$), 以及取 δ 使得 $0<\delta<\min\{\nu, \nu_2-1, \cdots, \nu_n-1\}$.

将飞行时间的公式 (13.6.3) 代入 (13.6.4) 和 (13.6.5) , 得到在情形 C 时局部映射 $T_0 : S_0^+ \to S_1$ 下面的估计 (其中截面 S_0 是 $||u_0||=d$)

$$x_1 = x_0 y_0^{\nu} d^{-\nu} + \varphi_1(x_0, y_0, u_0), \quad u_1 = \varphi_2(x_0, y_0, u_0), \tag{13.6.6}$$

其中

$$\begin{gathered} \varphi = o(|x_0|y_0^{\tilde{\nu}} + y_0^{1+\delta}), \\ \frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial u_0^p \partial y_0^q} = o(|x_0|y_0^{\tilde{\nu}-q} + y_0^{1+\delta-q}) \quad (p+q \leqslant r-3), \\ \frac{\partial^{r-2}\varphi}{\partial u_0^p \partial y_0^q} = o(y_0^{\tilde{\nu}-q}), \quad \frac{\partial^{s+p+q}\varphi}{\partial x_0^s \partial u_0^p \partial y_0^q} = o(y_0^{\tilde{\nu}-q}) \quad (s+p+q \leqslant r-2), \\ \frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial (x_0, u_0)^p \partial y_0^q} = o(y_0^{\nu-q}) \quad 在\ p+q=r-1. \end{gathered} \tag{13.6.7}$$

在情形 A 和 B, 其中在 S_0 上满足 $x_0 = d$, 对 T_0 有下面的公式:

$$x_1 = y_0^\nu d^{1-\nu} + \varphi_1(y_0, u_0), \quad u_1 = \varphi_2(y_0, u_0), \tag{13.6.8}$$

函数 $\varphi_{1,2}$ 满足

$$\begin{gathered} \varphi = o(y_0^{\tilde{\nu}}), \\ \frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial u_0^p \partial y_0^q} = o(y_0^{\tilde{\nu}-q}) \quad (p+q \leqslant r-2), \quad \frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial u_0^p \partial y_0^q} = o(y_0^{\nu-q}). \end{gathered} \tag{13.6.9}$$

回忆这里的 $\tilde{\nu} > 1$, 与 (13.6.7) 相反, 那里我们只有 $\tilde{\nu} > \nu$.

13.6.1　A = 0 的情形 —— 倾角 – 翻转

在 O 的小邻域外部由接近于 Γ 的轨道的流定义大范围映射 $T_1 : S_1 \to S_0$. 在情形 B, 映射 T_1 在点 $M^-(0,0) = W^u_{\text{loc}} \bigcap S_1$ 的小邻域内可表示为

$$\begin{aligned} \bar{y}_0 &= \mu + Ax_1 + a_{12}u_1 + \cdots, \\ \bar{u}_0 &= u^+ + a_{21}x_1 + a_{22}u_1 + \cdots, \end{aligned} \tag{13.6.10}$$

其中 A 是分界线量, 假设它在分支点为零. 在这个公式中, $(\mu, u^+(\mu, A))$ 是点 $M^+ = T_1 M^-$ 的坐标, 在这点分界线 Γ_1 第一次与 S_0 相交. 同宿回路在 $\mu = 0$ 存在 (因为此时 $M^+ \in W^s_{\text{loc}} \bigcap S_0$).

结合公式 (13.6.8) 和 (13.6.10), 我们得到 Poincaré 映射 T 在情形 B 时的下面表达式:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \mu + Ay^\nu + \varphi_1(y, u), \quad y \geqslant 0, \\ \bar{u} &= u^+ + a_{21}y^\nu + \varphi_2(y, u) \end{aligned} \tag{13.6.11}$$

(我们在这里省略了下标 “0”, 且在 (13.6.8) 中尺度化变量使得 $d = 1$. 变换后的函数 $\varphi_{1,2}$ 仍满足估计 (13.6.9), 注意大范围映射 T_1 的 Taylor 展开中的二次项在新函数 $\varphi_{1,2}$ 下起到 $O(y^{2\nu})$ 阶作用, 但它在与 (13.6.9) 的比较中可忽略, 因为 $\nu > \dfrac{1}{2}$).

设 α 是方程

$$\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{A}{\alpha^{1-\nu}}\right)^2 = 1 \tag{13.6.12}$$

的根. 注意到 α 由 (13.6.12) 唯一确定, 且当 μ, $A \to 0$ 时收敛于零. 从 (13.6.11) 我们看到对 $y > \dfrac{\alpha}{1-\nu}$ 有 $\bar{y} < y$. 因此, 在映射 T 的迭代下, y 值减少直到它变成 $O(\alpha)$ 的大小. 因此, 通过下面的变量和参数的尺度化是合适的:

$$y \mapsto \alpha y, \quad u \mapsto u^+ + \alpha^\nu u, \quad \mu = \alpha \sin\phi, \quad A = \alpha^{1-\nu}\cos\phi,$$

其中 (α, ϕ) 是 (μ, A) – 平面上的一类极坐标. 于是我们可以将这个映射重写为形式

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \sin\phi + \cos\phi \; y^\nu + \cdots, \\ \bar{u} &= a_{21}y^\nu + \cdots, \end{aligned} \tag{13.6.13}$$

其中省略号表示这样的项, 它们以及它们关于 y^ν 和 u 的一阶导数当 $\alpha \to +0$ 时为零. 此外, 它们所有直到 $(r-1)$ 阶的导数在任何有界但不为零的 y 区间上一致趋于零. 这类收敛性对证明映射 (13.6.13) 与一维极限映射

$$\bar{y} = \sin \phi + \cos \phi \, y^\nu, \quad y \geqslant 0 \tag{13.6.14}$$

产生相同分支已经足够了. 这个映射的 Lamerey 图如图 13.6.5 所示. 映射的右端或者是单调递增 (当 $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$), 或者单调递减 (当 $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$). 这类映射分别地只可能有不动点和周期 2 轨道. 此外, 在这类映射中出现的分支只可能是鞍 – 结点分支以及原来的倍周期分支 ("原来的" 仅适用于不动点). 再者, 不动点或者周期 2 轨道在映射定义域的边界 (由 $y=0$ 给出) 可消失. 这对应于原系统的同宿回路 (分别是简单和二重) 分支. ϕ 的分支值由系统

$$\begin{aligned} y &= \sin \phi + y^\nu \cos \phi, \\ \pm 1 &= \nu y^{\nu-1} \cos \phi \end{aligned} \tag{13.6.15}$$

求得, 其中 "+" 对应于不动点的鞍 – 结点分支, " − " 对应于不动点的倍周期分支. 这个系统对鞍 – 结点分支情形可重写为

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\nu}{1-\nu} \sin \phi, \\ \frac{(1-\nu)^{1-\nu}}{\nu^\nu} &= \frac{\cos \phi}{(-\sin \phi)^{1-\nu}}, \end{aligned} \tag{13.6.16}$$

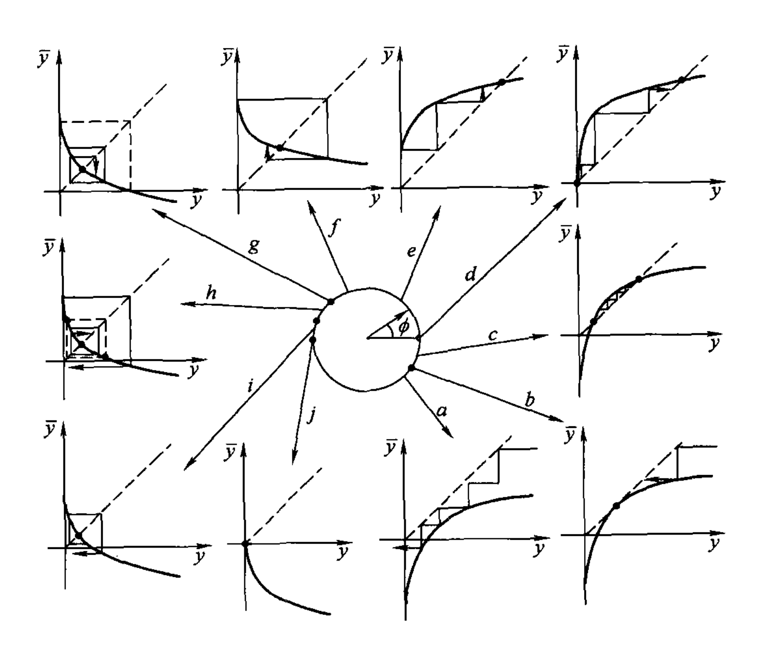


图 13.6.5 映射 (13.6.14) 的 Lamerey 图.

或者, 对倍周期情形写为

$$y = \frac{\nu}{1+\nu} \sin \phi,$$
$$-\frac{(1+\nu)^{1-\nu}}{\nu^{\nu}} = \frac{\cos \phi}{(\sin \phi)^{1-\nu}}. \tag{13.6.17}$$

其中, y 是分支不动点的坐标. 这些方程对每一个分支确定了 ϕ 的唯一值. 此外, 两个分支都是非退化的: Lyapunov 量在鞍 – 结点分支不为零, 在倍周期分支非零且正.

因此, 鞍 – 结点分支导致出现一对不动点, 稳定与不稳定的, 而倍周期导致出现不稳定周期 2 轨道. 当 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$ 时不稳定不动点在 $y = 0$(对应于单圈同宿回路) 消失. 不稳定周期 2 轨道当

$$0 = 1 + \frac{\cos \phi}{(\sin \phi)^{1-\nu}} \tag{13.6.18}$$

时趋于 $y = 0$ (二重同宿回路). 为了确认没有其它分支值 (在那些值也可能出现周期 2 轨道的鞍 – 结点分支), 只要指出映射 (13.6.14) 的第二次迭代的三阶导数永不为零. 这意味着映射的二次迭代不能有多于 3 个不动点, 包括它们的重次. 因此, 这保证这个映射不会出现其它周期 2 轨道.

我们已经完成了对一维映射 (13.6.14) 的分析. 退化的高维映射 $\tilde{T}$

$$\bar{y} = \sin \phi + \cos \phi \; y^{\nu}, \quad \bar{u} = a_{21} y^{\nu} \tag{13.6.19}$$

的相图可容易构造. 由于 Poincaré 映射 T 接近于上面的映射 [见 (13.6.13)], 每一个没有从区域 $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{2}{1-\nu}$ 跑出的轨道必须到达由 (13.6.19) 给出的映射 $\tilde{T}$ 的 α – 极限集或 ω – 极限集的小邻域. 由上面分析得知这些极限集是不动点或周期 2 的周期轨道. 当它们不接近于 $y = 0$ 时, 映射 T 及至少它的三阶导数接近于 $\tilde{T}$ [为此我们在上面已经假设考虑的系统是 $\mathbb{C}^r$ – 光滑, $r \geqslant 4$. 见公式 (13.6.13) 后面的说明]. 这保证当 (13.6.19) 的所有周期点都是粗时这两个映射具有相同的相图, 以及, 这些映射在使得 $\tilde{T}$ 产生非退化鞍 – 结点或倍周期分支的 ϕ 值附近产生同样的分支. 在使得 $\tilde{T}$ 的不动点或周期 2 轨道接近于 $y = 0$ 时的 ϕ 值附近 [这些值分别由方程 $\sin \phi = 0$ 和 (13.6.18) 给出], 这个不动点或周期 2 轨道永远是鞍点型. 此外, 映射 $\tilde{T}$ 的一次或二次迭代在 $y = 0$ 附近按 3.15 节的意义是鞍点映射. 对映射 T 同样成立: 由于它关于 y^{ν} 的一阶导数一致地接近于 $\tilde{T}$ 的一阶导数, 我们可以找到 y 作为 $\bar{y}$ 和 u 的函数, 并对所得的交叉映射验证定义 3.7 中的条件 (3.15.10) 满足. 由于鞍点映射只可能有单个鞍点不动点, 得知映射 T 只可能有单个接近于 $y = 0$ 的鞍点周期轨道, 且这个周期轨道接近于映射 $\tilde{T}$ 的鞍点周期轨道.

因此, 映射 T 与一维映射 (13.6.14) (对小 α) 产生相同分支. 回到原来的参数 (μ, A), 我们得到分支曲线 (13.6.16)—(13.6.18) 下面的渐近表达式:

- $\mu \sim -\dfrac{\nu^{\nu/1-\nu}}{1-\nu}A^{1/1-\nu}, \quad A > 0$ —— 鞍 - 结点.
- $\mu \sim \dfrac{\nu^{\nu/1-\nu}}{1+\nu}(-A)^{1/1-\nu}, \quad A < 0$ —— 倍周期分支. 以及
- $\mu \sim (-A)^{1/1-\nu}, \quad A < 0$ —— 二重回路.

也回忆直线 $\mu = 0$ 对应于原来的同宿回路.

综上所述, 我们得到在情形 B, (A, μ) - 平面上的分支的下面描述 (见图 13.6.4): 在区域 D_1 没有轨道 (除了鞍点) 对所有时间都停留在同宿回路 Γ 的小邻域 U 内. 穿过对应于鞍 - 结点分支的曲线 L_1, 产生一个稳定和一个鞍点单回路周期轨道. 在曲线 L_2 上这个鞍点周期轨道附有 $A > 0$ 时的同宿回路. 此后这单个稳定周期轨道在区域 D_3 中存在. 穿过直线 L_3 时从二重同宿回路分支出鞍点二重周期轨道. 这个二重回路周期轨道与单回路周期轨道在直线 L_4 上合并, 因此后面的周期轨道失去稳定性 (反向倍周期分支) 而变成鞍点型. 在分支曲线 L_5 上新鞍点周期轨道消失在单个不可定向/扭转 $(A < 0)$ 的同宿回路中.

13.6.2 $\Gamma \subset W^{ss}$ 的情形—— 轨道 - 翻转

下面我们证明在情形 C ($\Gamma \subset W^{ss}$) 的分支可完全一样进行. 这里截面 S_0 为 $\{|u| = d\}$. 由接近于 Γ 的轨道定义的大范围映射 $T_1 : S_1 \to S_0$ 现在表示为

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_0 &= \mu + a_{11}x_1 + a_{12}u_1 + \cdots, \\
\bar{x}_0 &= \eta + a_{21}x_1 + a_{22}u_1 + \cdots, \\
\bar{u}_0 &= u^+ + a_{31}x_1 + a_{32}u_1 + \cdots,
\end{aligned}
\tag{13.6.20}
$$

其中 $(\mu, \eta, u^+(\mu, \eta))$ 是点 $M^+ = T_1 M^- = \Gamma_1 \bigcap S_0$ 的坐标. 在 $(\mu, \eta) = (0, 0)$ 系统有位于 W^{ss} 上的同宿回路 (因为这时 $M^+ \in W^{ss}_{\rm loc} \bigcap S_0$). 因此必须对小的 η 和 μ 考虑分支.

注意, W^{uE} 和 W^s 的横截性假设等价于条件 $a_{11} \neq 0$ (见 13.4 节).

结合 (13.6.20) 和局部映射的公式 (13.6.6), 我们得到在情形 C 的 Poincaré 映射 T 的下面表达式:

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \mu + a_{11}xy^\nu + \varphi_1(x, y, u), \quad y \geqslant 0, \\
\bar{x} &= \eta + a_{21}xy^\nu + \varphi_2(x, y, u), \\
\bar{u} &= u^+ + a_{31}xy^\nu + \varphi_3(x, y, u)
\end{aligned}
\tag{13.6.21}
$$

(这里省略了下标 "0" 且在 (13.6.6) 作了变量尺度化而使 $d = 1$. 函数 $\varphi_{1,2,3}$ 满足估计 (13.6.7), 即 $\varphi_{1,2,3} = o(|x|y^{\tilde{\nu}} + y^{1+\delta})$).

我们定义分界线量为

$$A = \eta a_{11}.$$

注意在 $\mu=0$ 和 $\eta\neq 0$, 分界线 Γ_1 组成同宿回路, 按 η 的符号回路趋近 $W^s_{\rm loc}\backslash W^{ss}_{\rm loc}$ 的两个分枝之一. 由于定理 13.7 的非退化条件对 $\eta\neq 0$ 满足, Poincaré 映射 T 有通过点 $M^+(0,\eta,u^+)$ 且与稳定流形横截的光滑不变曲线. 当我们限制在这条曲线上时, 映射 T 呈现形式

$$\bar{y}=a_{11}\eta y^\nu+o(y^\nu),$$

即我们的分界线量 A 的定义与 13.4 节对非退化 (余维 1) 同宿回路情形的定义是相容的. 于是注意到同宿回路从 $W^s_{\rm loc}\backslash W^{ss}_{\rm loc}$ 的一个分枝移动到另一个分枝时, 分界线量改变其符号, 如图 13.6.6 所示.

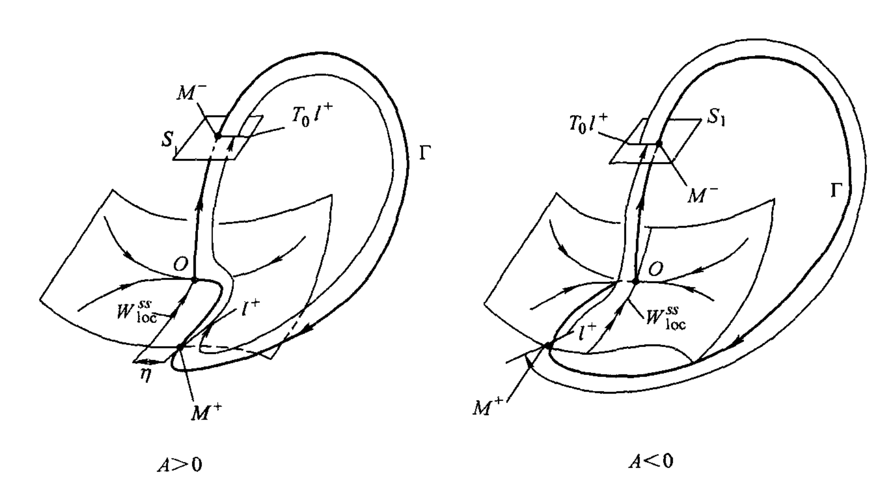


图 13.6.6 轨道 - 翻转同宿分支: 改变分界线 Γ 趋于鞍点的方式导致分界线量 A 的符号的改变.

作 x - 变量变换: $x\to x+\eta$. 于是映射 T 可写为

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\mu+Ay^\nu+a_{11}xy^\nu+\varphi_1(x+\eta,y,u),\quad y\geqslant 0,\\ \bar{x}&=a_{21}\eta y^\nu+a_{21}xy^\nu+\varphi_2(x+\eta,y,u),\\ \bar{u}&=u^++a_{31}\eta y^\nu+a_{31}xy^\nu+\varphi_3(x+\eta,y,u).\end{aligned}$$

经尺度化变换 $y\mapsto y\alpha,\quad x\mapsto \alpha x,\quad u\mapsto u^++\alpha u$ (其中 α 取自 (13.6.12)) 后, 这个映射化为类似于 (13.6.13) 的形式. 经过这些工作以后, 现在就可用与情形 B 一样的方法进行且得到完全相同的结果.

13.6.3 $\sigma=0$ 的情形

现在我们来研究情形 A, 即 $\sigma=0$ 时的同宿回路分支. 这里从 S_0 到 S_1 的局部映射由公式 (13.6.8) 给出, 其中 $\nu=1+\varepsilon$. 从 S_1 到 S_0 的大范围映射由公式 (13.6.10) 定义 (其中 A 不再假设是小的. 此外现在它依赖于小参数 (μ,ε)). 我们也假设 $|A|<1$

(可改变时间方向对情形 $|A|>1$ 作类似处理). 结合公式 (13.6.8) 和 (13.6.10), 我们可以将 Poincaré 映射 T 写为形式

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\mu+A(\mu,\varepsilon)y^{1+\varepsilon}+\varphi_1(y,u),\quad y\geqslant 0,\\ \bar{u}&=u^{+}+a_{21}y^{1+\varepsilon}+\varphi_2(y,u),\end{aligned}\tag{13.6.22}$$

其中 $\varphi_{1,2}$ 满足估计 (13.6.7) (这里关于 x 的依赖性必须被禁止).

注意在情形 A 中的条件 2 和 3 与定理 6.2 的条件 (见 13.4 节的详细解释) 重合, 这些条件保证对所有小的 μ, 二维光滑不变吸引流形$\mathcal{M}$ 的存在性. 一般地, 它仅为 $\mathbb{C}^1$ 光滑. 因此, 我们不能直接应用 13.3 节的二维结果到我们的情形, 因为前者要求更高阶的光滑性. 尽管如此, 不变流形 $\mathcal{M}$ 与 S_0 的交是 Poincaré 映射 T 的光滑吸引不变曲线 l_0 (与 $y=0$ 横截). 当限制在这条曲线时, Poincaré 映射是一维映射, 它的右端当 $A>0$ 时单调递增, $A<0$ 时单调减少. 这为我们对原映射 T 的预期分支提供了重要的定性信息: 当 $A>0$ 时它们可仅包含不动点的鞍 – 结点分支和倍周期分支, 以及当 $A<0$ 时包含事实上的周期 2 轨道的鞍 – 结点分支. 此外, 不动点或者当 $A<0$ 时的周期 2 轨道可以跑到这个映射定义域的边界 $\{y=0\}$ (这分别对应于简单的或者二重的同宿回路).

简单同宿回路对应于 $\mu=0$. 如果 $TM^{+}\in W^s_{\rm loc}$, 即当

$$0=\mu+A(\mu,\varepsilon)\mu^{1+\varepsilon}+\varphi_1(\mu,u^{+}),$$

二重同宿回路对 $A<0$ 存在 (见 (13.6.22)). 这给出对应分支曲线的渐近表达式:

$$\mu=|A(0,\varepsilon)|^{1/|\varepsilon|}[1+o(1)],\quad \varepsilon<0.$$

不动点的分支从系统 (与 (13.6.22) 比较)

$$\begin{aligned}y&=\mu+Ay^{1+\varepsilon}+\varphi_1(y,u),\quad y\geqslant 0,\\ u&=u^{+}+a_{21}y^{1+\varepsilon}+\varphi_2(y,u),\\ \pm\begin{pmatrix}1\\ z\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}A(1+\varepsilon)y^{\varepsilon}+\varphi'_{1y} & \varphi'_{1u}\\ a_{21}(1+\varepsilon)y^{\varepsilon}+\varphi'_{2y} & \varphi'_{2u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ z\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{13.6.23}$$

求得. 这里 “+” 对应于鞍 – 结点分支, “−” 对应于倍周期分支. (y,u) 是分支不动点的坐标, $(1,z)$ 是对应于乘子 ±1 的特征向量.

由于 $\varphi'_{(1,2)y}=o(y^{\delta})$ 和 $\varphi'_{(1,2)u}=o(y^{1+\delta})$, 我们可容易地用 y 表达 z 和 u:

$$z\sim\pm a_{21}(1+\varepsilon)y^{\varepsilon},\quad u\sim u^{+}.$$

因此系统取形式

$$\begin{aligned}y&=\mu+Ay^{1+\varepsilon}+o(y^{1+\delta}),\quad y\geqslant 0,\\ \pm1&=A(1+\varepsilon)y^{\varepsilon}+o(y^{\delta}),\end{aligned}\tag{13.6.24}$$

它类似于在二维情形定义映射 T 的不动点分支曲线的方程组 (13.3.9) 和 (13.3.13) (13.3 节). 它们给出分支曲线 ($\varepsilon < 0$) 下面的渐近表达式:

- $\mu = \dfrac{1}{e}A(0,\varepsilon)^{1/\varepsilon}(1+o(1))$ —— 鞍 – 结点不动点 ($A > 0$). 以及
- $\mu = \dfrac{2}{e}|A(0,\varepsilon)|^{1/\varepsilon}(1+o(1))$ —— 倍周期 ($A < 0$).

容易证明这些分支是非退化的, 即第一个 Lyapunov 量在两种情形都非零. 此外, 在倍周期分支这个 Lyapunov 量为正. 因此, 在这个分支产生周期 2 的鞍点轨道.

所有这些结果与我们在二维情形得到的相同. 因此分支图是相同的. 剩下最后一步验证对 $A < 0$ 可不存在周期 2 轨道的鞍 – 结点分支. 周期 2 轨道 $\{(y_1,u_1),(y_2,u_2)\}$ 必须满足方程

$$\begin{aligned}
y_2 &= \mu + A(\mu,\varepsilon)y_1^{1+\varepsilon} + \varphi_1(y_1,u_1),\\
y_1 &= \mu + A(\mu,\varepsilon)y_2^{1+\varepsilon} + \varphi_1(y_2,u_2),\\
u_2 &= u^+ + a_{21}y_1^{1+\varepsilon} + \varphi_2(y_1,u_1),\\
u_1 &= u^+ + a_{21}y_2^{1+\varepsilon} + \varphi_2(y_2,u_2),
\end{aligned} \tag{13.6.25}$$

其中 $y_1 \geqslant 0$ 且 $y_2 \geqslant 0$.

由于对小的 y, φ'_{2u} 是小的, 我们可以从 (13.6.25) 中的最后两个方程求得作为 (y_1,y_2) 函数的 (u_1,u_2). $y_{1,2}$ 的方程可以写为

$$\begin{aligned}
y_2 &= \mu + A(\mu,\varepsilon)y_1^{1+\varepsilon} + \varphi(y_1,y_2),\\
y_1 &= \mu + A(\mu,\varepsilon)y_2^{1+\varepsilon} + \varphi(y_2,y_1), \quad y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{13.6.26}$$

其中, 函数 φ 有下面估计:

$$\begin{aligned}
\varphi(y_1,y_2) &= o(y_1^{1+\delta}),\\
\frac{\partial^q\varphi}{\partial y_1^q} &= o(y_1^{1-q+\delta}) \quad (q = 1,\cdots,r-2),\\
\frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial y_1^{r-1}} &= o(y_1^{2-r+\varepsilon}),\\
\frac{\partial^{q+p}\varphi}{\partial y_1^q\partial y_2^p} &= o(y_1^{1-q+\delta}y_2^{1-p+\varepsilon}) \quad (1 \leqslant p \leqslant r-2-q),\\
\frac{\partial^{q+p}\varphi}{\partial y_1^q\partial y_2^p} &= o(y_1^{1-q+\delta}y_2^{1-p+\varepsilon}) \quad \text{在 } p+q = r-1, p \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{13.6.27}$$

回忆我们有假设 $-1 < A < 0$. 因此, 对 $\varepsilon \geqslant 0$, (13.6.26) 的右端是压缩. 从而, 系统对 $\varepsilon \geqslant 0$ 可能只有一个解. 由对称性在这个解上有 $y_1 = y_2$, 即它对应于映射 T 的不动点. 因而, 映射 T 对 $\varepsilon \geqslant 0$ 没有周期 2 轨道, 于是我们将限于考虑负 ε 情形.

由于 $A<0$, (13.6.26) 的第一个方程的右端当 y_1 增加时减少. 因此, $y_2 \leqslant \mu$. 类似地 $y_1 \leqslant \mu$. 因此可尺度化变量: $y_1 \to y_1\mu, y_2 \to y_2\mu$, 使得所得系统有形式

$$
\begin{aligned}
y_2 &= 1 - Cy_1^{1+\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\varphi(\mu y_1, \mu y_2), \\
y_1 &= 1 - Cy_2^{1+\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\varphi(\mu y_2, \mu y_1),
\end{aligned} \tag{13.6.28}
$$

其中

$$
C = \frac{|A|}{\mu^{|\varepsilon|}}, \tag{13.6.29}
$$

并且尺度化的两个变量 $y_{1,2}$ 属于区间 [0,1]. 不失一般性, 可以假设 $y_1 \geqslant y_2$ 以及对有界常数 C, y_1 有界不为零.

容易看出, 如果 C 保持有界不等于 1, 则对小的 μ 和 ε 系统 (13.6.28) 有唯一解. 注意到由系统的对称性得知在这种情形下 $y_1 = y_2$, 这意味着当 C 不接近于 1 时, 映射 T 不可能有周期 2 轨道.

因此, 在参数平面内有关的区域仅对应于 $\mu^{|\varepsilon|} \sim |A|$. 由于由假设 $|A|<1$, 得知 μ 关于 ε 是指数式地小, 即对某正数 K 有

$$
\mu < e^{-K/|\varepsilon|}.
$$

由此得知, (13.6.28) 中的 φ – 项是可以忽略的, 且容易验证从 (13.6.28) 中的第二个方程用 y_2 求解 y_1, 再将所得表达式代入第一个方程, 所得方程右端的三阶导数对小 $\varepsilon<0$ 将永不为零.

这表明系统不可能有多于三个解. 每一个周期 2 轨道给出两个解 $[(y_1, y_2)$ 和 $(y_2, y_1)]$. 因此映射 T 不可能有多于一个的周期 2 轨道, 即使考虑到重次, 即也不可能存在周期 2 的鞍 – 结点轨道.

13.7　8 字形同宿分支和异宿环分支

在这一节, 我们将回顾 8 字形同宿分支, 以及含有一对不引起复杂动力学的鞍点的异宿环分支. 在这里我们跳过所有的证明, 因为我们的目的仅仅是告诉读者在 [148,149,151] 和 [50] 中得到的 8 字形同宿分支的结果, 以及在 [121—125] 和 [34—35] 中对不同类型的我们还没有广泛知道的异宿环的结果.

8 字形同宿是由一对鞍点同宿回路组成, 当 $t=-\infty$ 时它的两条不稳定分界线 Γ_1 和 Γ_2 从鞍点的相反方向出来 (图 13.7.1). 我们将考虑鞍点 O 的不稳定流形是一维的情形, 即鞍点仅有一个正特征指数 $\gamma>0$, 所有其它的特征指数都具有负实部: $\operatorname{Re}\lambda_j<0, j=1,\cdots,n$. 此外, 假设**鞍点量** σ **是负的**:

$$
\sigma = \gamma + \max \operatorname{Re}\lambda_j < 0.
$$

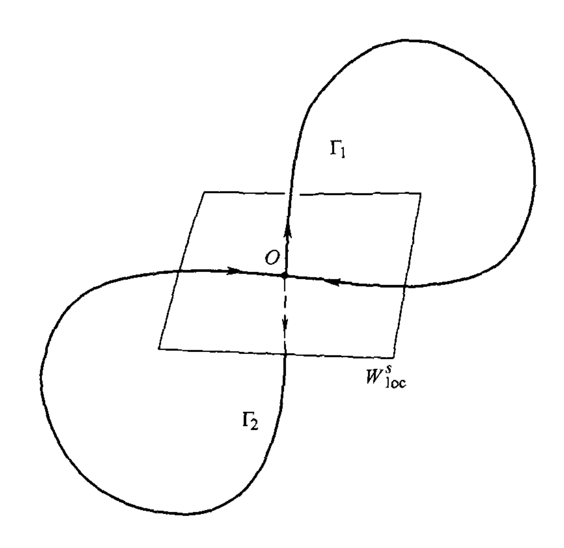


图 13.7.1 8 字形同宿 —— 分界线从相反方向离开鞍点.

我们还假设系统是 $\mathbb{C}^r$ - 光滑, $r \geqslant 1$, 因此可以研究它在 $\mathbb{C}^r$ - 光滑扰动下的分支. 考虑 8 字形同宿 $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup O$ 的充分小邻域 U. 以 N 记整个地位于 U 内的所有轨道的集合. 下面的定理断言, 集合 N 除了在分支点的两条同宿回路和 O, 不包含其它轨道. 它也刻画了任何附近系统的这个集合的结构.

定理 13.11 对具有 8 字形同宿满足 $\sigma < 0$ 的系统的任何充分接近的系统, 集合 N 是分界线 $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ 并的闭包, 它可以是下面六种可能的类型:

(1) $N \backslash O$ 包含两个稳定周期轨道, 一个是 Γ_1 的 ω - 极限集, 另一个是 Γ_2 的 ω - 极限集.

(2) $N \backslash O$ 包含一个稳定周期轨道, 它是两条分界线 Γ_1 和 Γ_2 的 ω - 极限集.

(3) $N \backslash O$ 包含一个稳定周期轨道, 它是一条分界线的 ω - 极限集, 第二条分界线构成同宿回路.

(4) $N = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup O$, 其中一条分界线形成同宿回路,第二条分界线以这个回路为 ω - 极限集.

(5) $N = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup O$, 其中两条分界线形成同宿回路 (因此形成 8 字形同宿). 以及

(6) N 是吸引的拟极小集. 它包含两条 P^+ - 稳定分界线 Γ_1 和 Γ_2, 一条是 $W^s(O)$中的 P^- - 轨道以及非闭 Poisson - 稳定轨线的连续统.

注意只有情形 (1) 和 (2) 对应于结构稳定系统, 其它情形是非粗的. 本质上, 具有负鞍点量的 8 字形同宿分支是 Morse-Smale 类中的内分支.

对对称系统作特殊考虑, 那里两个分界线回路一起趋于一个鞍点. 这样的情况相当平凡. 即当回路向内分裂时, 由定理 13.4, 每一个产生单个稳定极限环. 当回路

向外分裂时, 稳定性转移到从 8 字形同宿回路分支出的大振幅对称的稳定周期轨道, 如图 13.7.2 所示. 而且就这些了. 这就是为什么下面我们主要集中对非对称系统理论的研究.

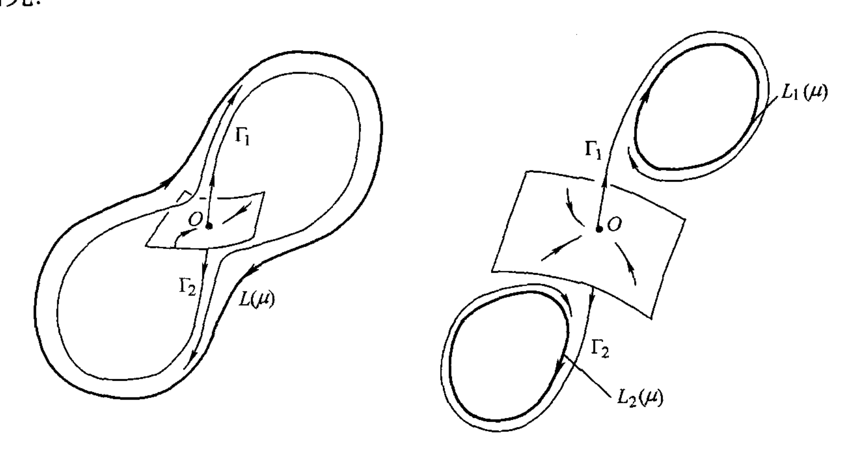


图 13.7.2 对称情形的 8 字形同宿分支. 两个同宿回路 “向外” 破裂导致产生大对称周期轨道. 当回路向内分裂时从每一个回路分支出一个周期轨道.

引入 8 字形同宿的邻域 U 为包含鞍点 O 和分界线在其内部的黏有两个柄 U_1 和 U_2 的小球 U_0. 从而, 对整个位于 U 中的任何轨道存在一个自然**编码** —— 符号 1 和 2 的序列, 它描述一个旅程, 按照这旅程轨道沿着柄 U_1 和 U_2 的内部游弋. 对同宿回路这个编码是有限的. 此外我们也对极限环指定用这两个符号循环排列按模定义的有限长编码. 为了对周期轨道和同宿回路 (它们可以由 8 字形同宿产生) 刻画可能的编码, 我们构造类似于数论中 Farey 树的二叉树. 在第一个顶点我们指定符号偶 (1,2); 由它两个箭头向下指向顶点 (1,21) 和 (12,1), 并按照下面规则继续进行, 即对顶点 (p, s) 存在箭头指向 (p, sp) 和 (ps, s) (如图 13.7.3 所示), 其中 p 和 s 表示由阿拉伯字 $\{1, 2\}$ 组成的有限个字. 称偶 (p, s) 是**可允许的**, 如果它是如此构造的树的一个顶点. 两个符号 1 和 2 的无穷序列偶 (p, s) 可允许, 如果存在由树的枝组成的一个无穷路径, 它通过顶点 (p_i, s_i), 使得当 $i \to +\infty$ 时 $p_i \to p$ 和 $s_i \to s$. 一个字称为可允许的, 如果它是可允许偶的元素.

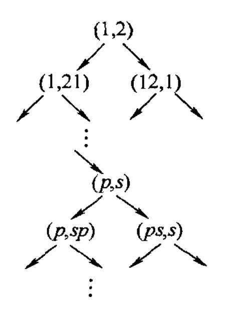


图 13.7.3 二叉树描述周期轨道和同宿回路可能的类型, 它们可从不对称情形的 8 字形同宿产生.

定理 13.12　对任何系统, 它充分接近于具有负鞍点量的 8 字形同宿的系统, U 中的周期轨道或者同宿回路必须有可允许的编码. 如果存在一对周期轨道, 或者一对同宿回路, 或者一个极限环和一个同宿回路, 则它们的编码必须形成一个可允许偶. 如果分界线 Γ_1 和 Γ_2 是 P^+ – 稳定 (即 N 是拟极小集), 则它们的编码形成一个无穷序列的可允许偶.

拟极小集的局部结构在这里由分界线编码完全确定. 我们用下面公式对符号 1 和 2 的无穷序列 $s = \{s_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 引入**旋转数** $\beta(s)$:

$$\beta(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\{\text{ 序列 } \{s_i\}_{i=0}^{n} \text{ 中 1 的个数}\}, \tag{13.7.1}$$

假设这个极限存在. 容易证明, 如果无穷序列偶 (p, s) 可允许, 则旋转数 $\beta(p)$ 和 $\beta(s)$ 事实上存在. 此外, 它们彼此相等:

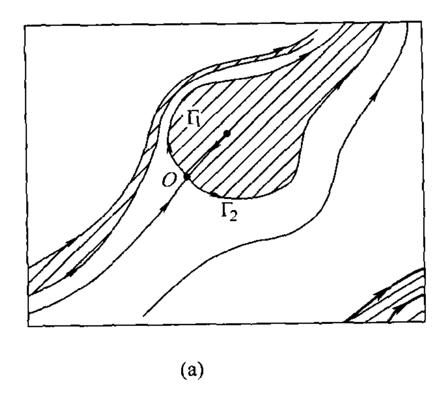
$$\beta(p) = \beta(s),$$

且是无理数. 对区间 [0,1] 中任何一个无理数 β, 存在唯一可允许无穷序列偶, 它的旋转数等于 β.

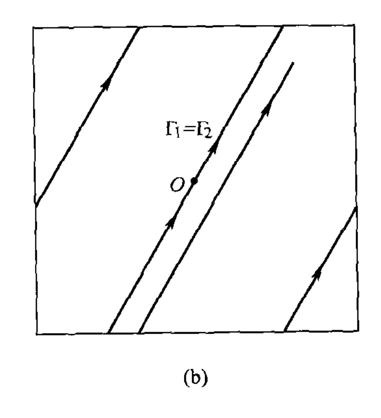
因此, 我们可以对每个从 8 字形同宿分支产生的拟极小集指定旋转数 β.

定理 13.13　如果定理 13.11 中的集合 N 是具有旋转数 β 的拟极小集, 则 N 上的流拓扑共轭于具有旋转数 β 的特殊 Cherry 流 (限制在它的拟极小集上).

Cherry 流是二维环面上具有两个平衡态的流, 这两个平衡态是鞍点和不稳定结点. 两条不稳定分界线是 P^+ – 稳定的. 一条稳定的分界线是以结点为 α – 极限, 另一条位于不稳定分界线的闭包内, 它是 P^- – 稳定的 [见图 13.7.4(a)]. 不稳定分界线的闭包是拟极小集, 它包含鞍点 O 以及非闭 P – 稳定轨线的连续统. 这种流的旋转数定义与在无平衡态的环面上流的旋转数的定义方法相同. 由于在 Cherry 流中没



(a)



(b)

图 13.7.4　(a) 环面上的 Cherry 流. (b) 由鞍点分界线黏合的 Cherry 流得到的拟周期流.

有周期轨道, 它的旋转数是无理数. Cherry 流是**特殊的**, 如果它处处收缩面积, 除了不稳定结点的小邻域. 两个特殊的 Cherry 流拓扑共轭, 当且仅当它们的旋转数相同(更多详情见 [104,16]). 我们看到定理 13.13 对拟极小吸引子给以完全描述, 这种吸引子可从具有负鞍点量的 8 字形同宿产生. 注意, 我们可以将不稳定分界线 Γ_1 和 Γ_2 黏合在一起, 使得在拟极小集上的流经过这个 "黏合" 运算变成拓扑共轭于在环面 $\{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ 上的系统

$$\dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = (x^2 + y^2)\beta$$

[见图 13.7.4(b)].

一般地, 我们必须区别下面两个情形:

情形 1　鞍 – 焦点: $\lambda_{1,2}$ 是复数且

$$0 > \text{Re}\ \lambda_1 = \text{Re}\ \lambda_2 > \text{Re}\ \lambda_j \quad (j = 3, \cdots, n).$$

情形 2　鞍点: λ_1 是实数且

$$0 > \lambda_1 > \text{Re}\ \lambda_j \quad (j = 2, \cdots, n).$$

在这两个情形, 我们假设在分支点有

- 同宿回路 $\Gamma_{1,2}$ 不位于强稳定流形 W^{ss} 内, 以及
- 分界线量 $A_{1,2}$ 在两个回路上不为零.

后一个条件可解释为二维扩展不稳定流形 W^{uE} 与稳定流形沿着两个回路的横截性. 分界线量在鞍点情形由公式 (13.4.8) 定义, 在鞍 – 焦点情形由公式 (13.4.15) 定义.

考虑光滑双参数族 $X_{\mu_1\mu_2}$, 它与具有负鞍点量 8 字形同宿的系统的余维 2 分支集横截, 且满足上述非退化条件. 控制参数 $\mu_{1,2}$ 是同宿回路的分裂参数: 当 $\mu_i > 0$ 时, 假设回路 Γ_i 向内分裂.

设 C_s 表示在 (μ_1, μ_2) – 平面上对应具有编码 s 的同宿回路存在性的分支集. 由定义, $\{\mu_1 = 0\}$ 定义曲线 C_1, 以及 $\{\mu_2 = 0\}$ 对应于曲线 C_2. 对在下面情形中的其它编码, C_s 或者是由方程 $\mu_1 = h_s(\mu_2)$ 定义的曲线 (如果字 $\{s\}$ 中最后一个符号是 1) , 或者是由 $\mu_2 = h_s(\mu_1)$ 定义 (如果 $\{s\}$ 中最后一个符号是 2), 其中 h_s 是对 $\mu < 0$ 定义的光滑函数, 它的一阶导数当 $\mu \to -0$ 时趋于零 (对所有可能的编码 $\{s\}$ 一致), 或者 C_s 是这曲线开弧 (区间) 的无限集.

在鞍 – 焦点情形, 由定理 13.11 和定理 13.12 所有可能性允许在任何横截族 $X_{\mu_1\mu_2}$ 中遇到. 这个情形的分支图如图 13.7.5 所示. 注意到对应于编码以 1 结尾的同宿回路的分支曲线接近于 μ_2 的负半轴, 因此, 它们都位于扇形 $|\mu_1| < |\mu_2|$ 内. 对应于其编码以 2 结尾的同宿回路的曲线则位于扇形 $|\mu_2| < |\mu_1|$ 内. 由于在这里两个

扇形内的图像是对称的, 我们只需叙述对应于编码以 1 结尾的同宿回路的分支曲线的结构.

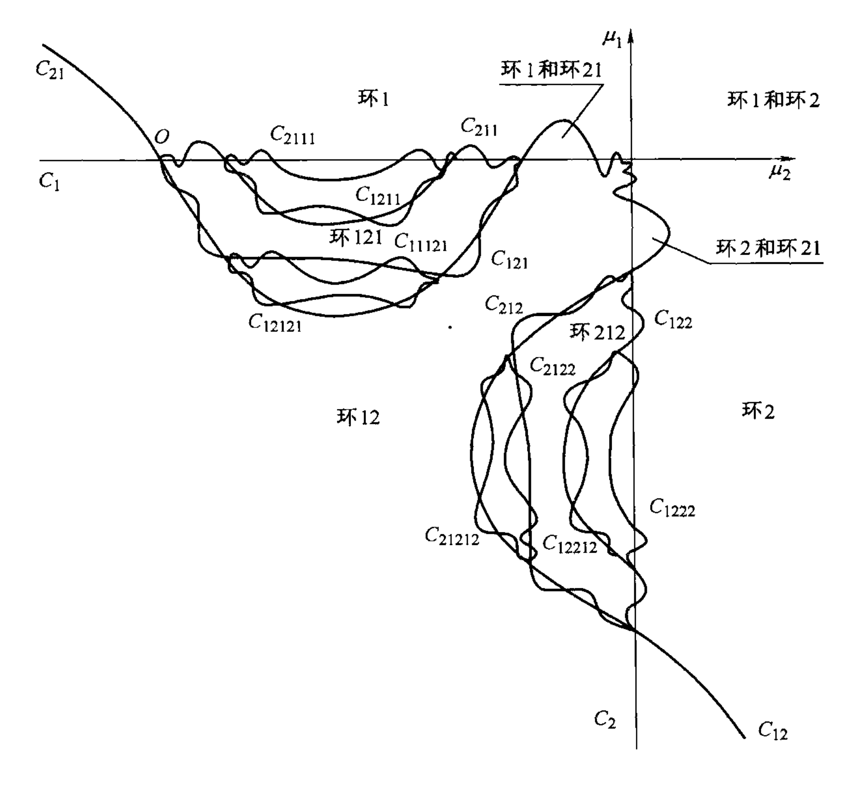


图 13.7.5　具有负鞍点量的鞍 - 焦点 8 字形同宿分支图.

这里, $\mu_1 = 0$ 对应于曲线 C_1, 曲线 C_{21} 也朝向 μ_2 的负值离开点 $(0,0)$, 曲线 C_{21} 与 L_1 相交于无穷多个点. 于是我们可以按照下面规则归纳地继续进行: 设 (p,s) 是以 1 结尾的字的可允许偶, 则 C_p 和 C_s 相交于无穷多个点, 如果 P 和 Q 是 C_p 和 C_s 的两个相邻交点, 使得在 P 和 Q 之间的区间上 $h_p > h_s$, 则 P 和 Q 进一步由分别与 C_s 和 C_p 相交无穷多次的 C_{ps} 和 C_{sp} 的弧连接, 等等. 在由 C_{ps} 和 C_{sp} 的弧所围的区域内, 具有编码 $\{ps\}$ 的稳定极限环存在. 相反, 如果在 P 和 Q 之间的区间上 $h_p < h_s$, 则对 μ_2 的这些值不存在具有以字 p 和 s 组成的编码的同宿回路. 此外, 如果 $h_p < h_s$, 则在由曲线 C_p 和 C_s 从 P 到 Q 的线段所围成的区域内的每一处, 存在一对具有编码 $\{p\}$ 和 $\{s\}$ 的稳定极限环.

拟极小吸引子对应于曲线 C_s 的并的极限点.

在鞍点情形 (主特征指数 λ_1 是实数), 分支图依赖于分界线量 A_1 和 A_2 的符号, 以及在 $t = +\infty$ 同宿回路 Γ_1 和 Γ_2 进入鞍点的方式. 我们首先考虑 Γ_1 和 Γ_2 彼此相切地进入鞍点的情形, 即稳定蝴蝶同宿分支情形.

这里, 如果 $A_1 > 0$ 和 $A_2 > 0$ (见图 13.7.6), 区域 $(\mu_1 > 0, \mu_2 > 0)$ 对应具有编

码 $\{1\}$ 和编码 $\{2\}$ 的一对环的存在性, 区域 $(\mu_1 > 0, \mu_2 < 0)$ 对应具有编码 $\{1\}$ 的唯一环的存在性. 区域 $(\mu_1 < 0, \mu_2 > 0)$ 对应具有编码 $\{2\}$ 的唯一环的存在性. 在区域 $(\mu_1 < 0, \mu_2 < 0)$, 分支集是从原点出发的曲线组成的 Cantor 笔, 它是由可数多条对应于同宿回路的曲线, 以及对应于拟极小集的曲线的连续统所组成. 这个区域有下面的结构: 对有限字的任何可允许偶 (p,s), 存在曲线 C_p 和 C_s; 在由 C_p 和 C_s 界定的区域内, 曲线 C_{ps} 和 C_{sp} 处于这样的位置: C_{sp} 位于 C_p 与 C_{ps} 之间. 由曲线 C_{ps} 和 C_{sp} 界定的区域对应编码为 $\{ps\}$ 的单个稳定极限环的存在性. 在每条曲线 C_s 上一条不稳定分界线形成具有编码 s 的同宿回路, 但第二条分界线趋于这个同宿回路 (即它属于同宿回路的稳定流形, 见 13.4 节的末尾).

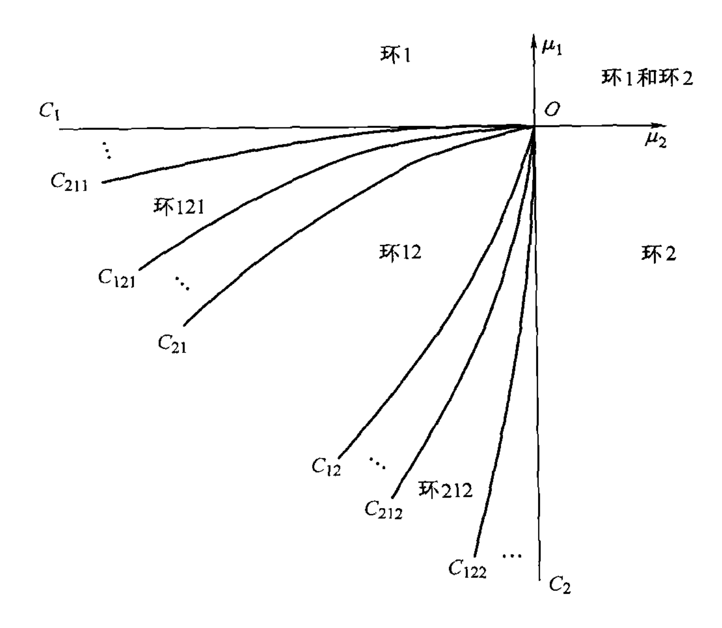


图 13.7.6　具有负鞍点量的鞍点可定向 $(A_{1,2} > 0)$ 的蝴蝶同宿分支图.

对无穷序列的每一个可允许偶 (p,s), 存在对应于具有旋转数 $\beta(p) = \beta(s)$ 的拟极小吸引子存在性的曲线 $C(p,s)$. 曲线 $C(p,s)$ 由

$$\lim\ C_{s_i} = \lim\ C_{p_i}$$

求得, 其中 (p_i, s_i) 是接近 (p,s) 的有限字可允许偶序列.

在其它余下情形, 拟极小吸引子不出现. 在情形 $A_1 > 0$ 和 $A_2 < 0$ (见图 13.7.7), 存在仅具有编码 $\{1\},\{2\}$ 和 $\{21^k\}$ 的环, $k = 1, 2, \cdots$ (其中 $\{1^k\}$ 表示由 k 个 "1" 组成的字), 参数平面被曲线 $C_1, C_2, C_{12}, C_{21^k}$ 以及 C_{121^k} $(k = 1, 2\cdots)$ 划分为可数多个区域. 注意, 这些曲线凝聚到 μ_2 的负半轴上, 其中分界线 Γ_1 形成简单同宿回路, 分界线 Γ_2 当 $t \to +\infty$ 时趋于这个回路.

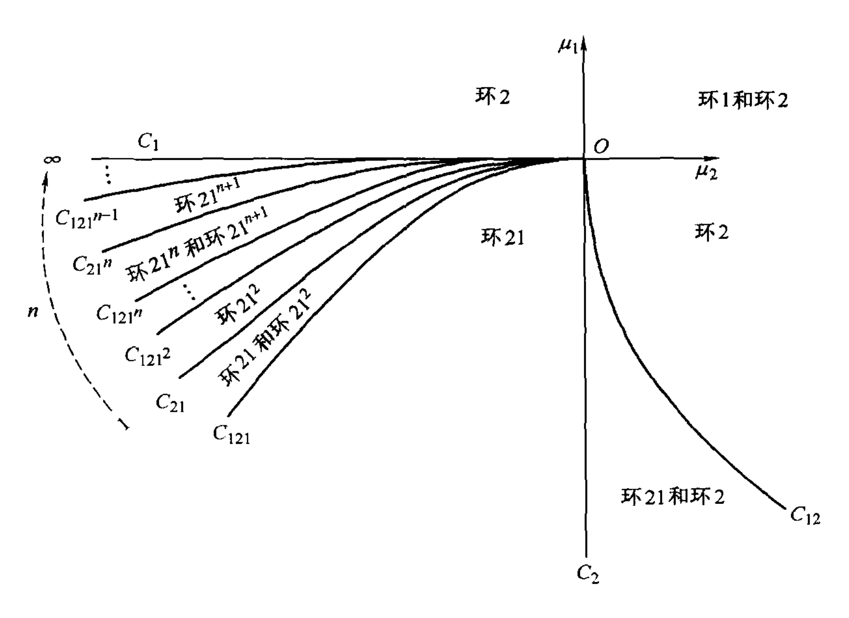


图 13.7.7　具有负鞍点量的鞍点的半可定向 ($A_1 > 0$ 和 $A_2 < 0$) 的蝴蝶同宿分支图.

在情形 $A_1 < 0$ 和 $A_2 < 0$ (如图 13.7.8 所示), 只存在具有编码 $\{1\},\{2\}$ 和 $\{12\}$ 的环, 参数平面被划分为 6 个区域.

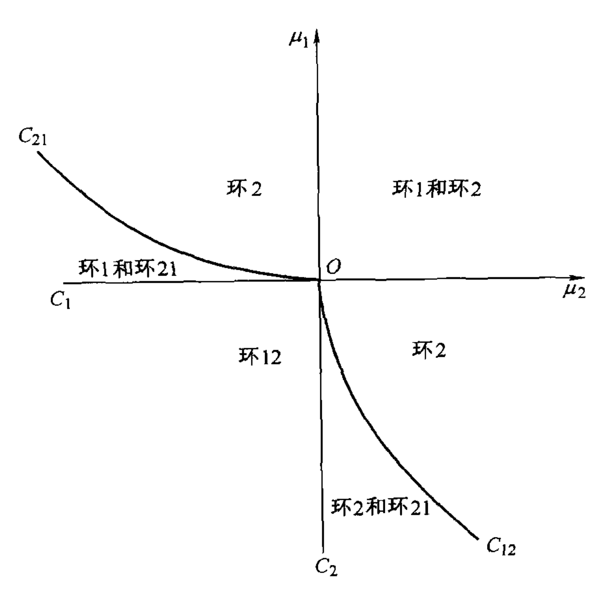


图 13.7.8　具有负鞍点量的鞍点的不可定向 ($A_{1,2} < 0$) 的蝴蝶同宿分支图.

对 Γ_1 和 Γ_2 从相反方向到达鞍点的情形的分支图如图 13.7.9 — 图 13.7.11 所示. 在这种情形下, 不存在拟极小吸引子, 以及极限环的编码只可能是 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{12\}$,

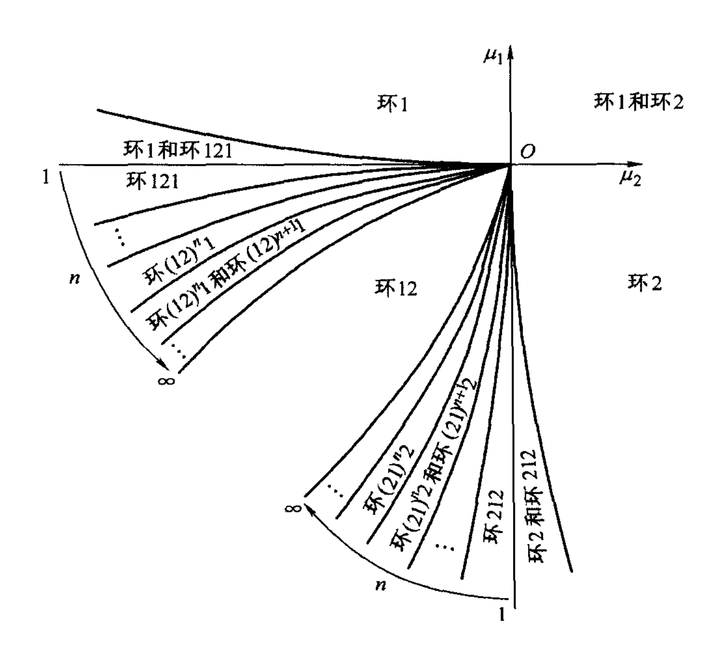


图 13.7.9　具有负鞍点量的鞍点的不可定向 ($A_{1,2} < 0$) 的 8 字形同宿分支图.

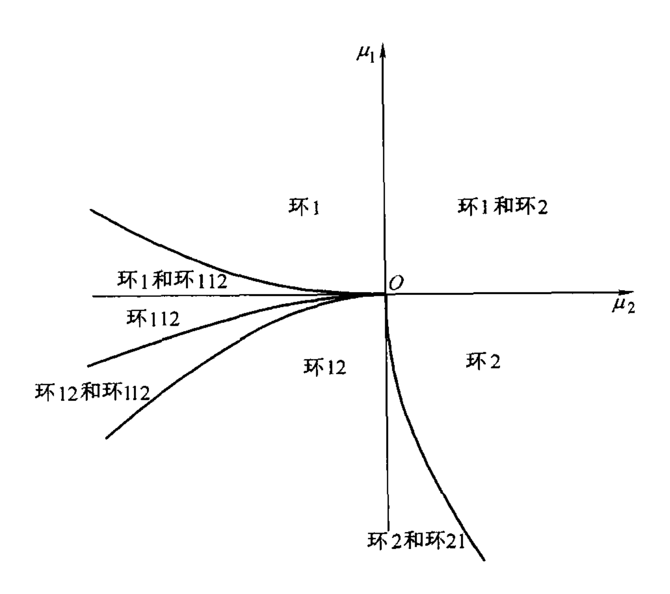


图 13.7.10　具有负鞍点量的鞍点的半可定向 ($A_1 > 0$ 和 $A_2 < 0$) 的 8 字形同宿分支图.

$\{1(21)^k\}$ 和 $\{2(12)^k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 在情形 $A_1 > 0, A_2 > 0$ 和 $A_1 < 0, A_2 > 0$, 分支集由有限多条曲线组成. 在情形 $A_1 < 0, A_2 < 0$, 它由可数多条凝聚在曲线 C_{12} 和

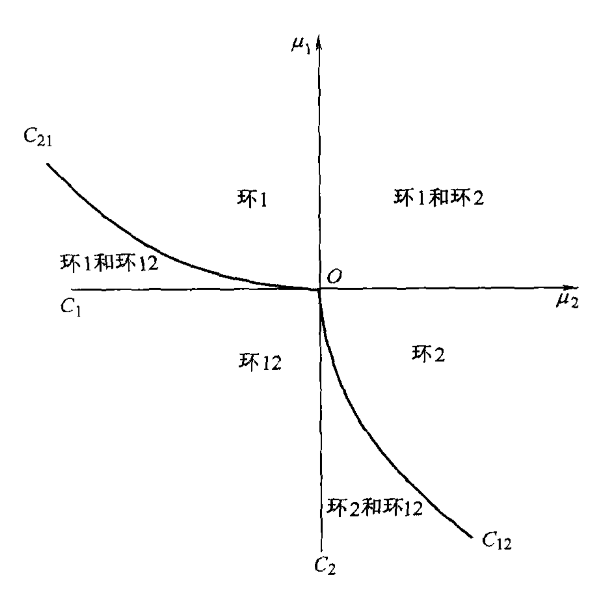


图 13.7.11 具有负鞍点量的鞍点的可定向 $(A_{1,2} > 0)$ 8 字形同宿分支图.

C_{21} 上的曲线组成. 在这些曲线上, 一条不稳定分界线形成二重回路的同宿回路, 另一条分界线当 $t \to +\infty$ 时收敛于它.

我们注意, [69] 中有关于作为另一条分界线之极限集的同宿回路分支的系统研究.

我们还得注意, 这些结果可以立刻推广到鞍点具有高维不稳定流形的情形. 即, 如果 O 有几个特征指数具有正实部但是主特征指数 γ_1 是实数, 即如果

$$\gamma_1 < \text{Re}\ \gamma_j,$$

以及如果两个同宿回路都不属于强不稳定流形 W^{uu} 且按相反方向离开鞍点, 以及如果扩展稳定流形在两个回路上与不稳定流形横截, 则定理 6.3 可以应用以保证排斥的 $(n+1)$ 维 $\mathbb{C}^1$ - 光滑不变流形的存在性. 由于在不变流形上系统在 O 只有一个正特征指数, 故所有上面的结果在这里可应用, 唯一的区别是极限环和拟极小集不再保持吸引而是变成鞍点.

我们现在考虑具有两个鞍点 O_1 和 O_2 的异宿环情形. 设两个鞍点的不稳定流形是一维的, 并设 O_1 的不稳定分界线 Γ_1 当 $t \to +\infty$ 时趋于 O_2, O_2 的不稳定分界线 Γ_2 当 $t \to +\infty$ 时趋于 O_1. 并 $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup O_1 \bigcup O_2$ 是异宿环. 关于这样环的小邻域 U 内的分支问题在 [121] 中有详细的考虑.

整个这一节我们假设两个鞍点的鞍点量都是负的. 在这种情形下, 从异宿环**可分支出的周期轨道不多于一个**. 此外这个唯一轨道是稳定的 (吸引的).

当系统有对称性, 使得 O_1 关于 O_2 对称, 分界线 Γ_1 关于分界线 Γ_2 对称, 这时

分支相当简单: 当分界线向内分裂时, 产生稳定周期轨道; 当分界线向外分裂时, 几乎所有轨线 (除了 $O_{1,2}$) 都离开 U.

在一般情形, 由于出现多重回路的异宿连接, 图像可能更加复杂.

取光滑双参数族 $X_{\mu_1\mu_2}$, 它与具有所考虑类型的异宿环的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑 $(r \geqslant 1)$ 系统之余维 2 分支曲面横截. 设 μ_1 和 μ_2 是分裂参数, 它们控制异宿轨道 Γ_1 和 Γ_2, 使得当 $\mu_i > 0$ 时异宿连接 Γ_i 向内分裂.

在 (μ_1, μ_2) – 平面上, 存在两条分别对应于鞍点 O_1 和 O_2 的同宿回路的曲线 L_1 和 L_2. 这两条曲线分别是某两个对正 μ 有定义且满足 $h(0) = 0, h'(0) = 0$ 的光滑函数 $\mu_1 = h_1(\mu_2)$ 和 $\mu_2 = h_2(\mu_1)$ 的图像. 在 L_1 和 L_2 之间的区域内存在稳定的周期轨道. 注意, 当鞍点量为负时, 多重回路的同宿回路不可能出现.

对族 $X_{\mu_1\mu_2}$ 的分支图也可以包含曲线 C_{12}^k 和 C_{21}^k $(k = 1, \cdots)$ 使得在 $\mu \in C_{ij}^k$, $O_i(i = \{1, 2\})$ 的不稳定分界线 Γ_i 沿着 U 作 k 次完全旋转而进入鞍点 Q_j $(i \neq j)$, 因此, 它们形成异宿连接. 曲线 C_{ij}^k 由方程 $\mu_j = h_{kij}(\mu_i)$ 定义, 其中 h_{kij} 是定义在正 μ_i – 轴的开子集上且使得 h_{kij} 的一阶导数当 $\mu_i \to 0$ 时 (关于 k) 一致地趋于零的光滑函数. 对应于异宿连接的分支集的确切结构依赖于平衡点 O_i 是鞍点还是鞍 – 焦点而完全不同.

对 O_1 和 O_2 都是鞍点情形的分支图如图 13.7.12 — 图 13.7.15 所示. 其中, 如果两个分界线量是正的, 则仅有可能的异宿连接是原来在 $\mu_1 = 0$ 或在 $\mu_2 = 0$ 存在的连接. 当 $A_1 > 0$ 和 $A_2 < 0$ 时, 仅有的新分支曲线用 C_{21}^1 标记. 在 $A_1 < 0$ 和 $A_2 < 0$ 的情形, 存在对应于所有可能的异宿连接的无穷多条分支曲线. 曲线 C_{ij}^k 凝聚在曲线 C_j 上, 使得对 $\mu \in C_j$, 分界线 Γ_j 在 O_j 形成简单同宿回路, 而 O_i 的分界线 Γ_i 当 $t \to +\infty$ 时趋于这个回路.

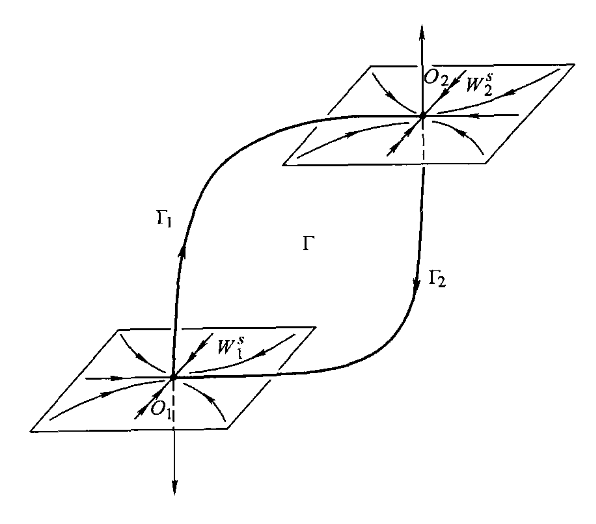


图 13.7.12 两个鞍点之间的两种方式的一维异宿连接.

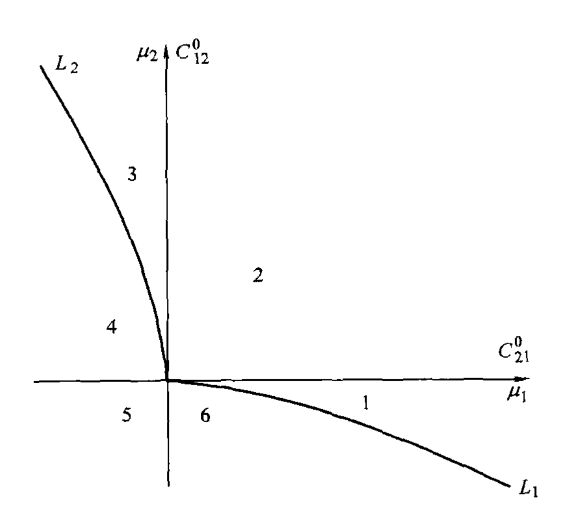


图 13.7.13　对 $A_1 > 0$,　$A_2 > 0$ 和 $\nu_{1,2} > 1$ 的情形, 图 13.7.12 中异宿环分支的 (μ_1, μ_2) - 平面. 在区域 1,2 和 3 中只存在一条稳定周期轨道.

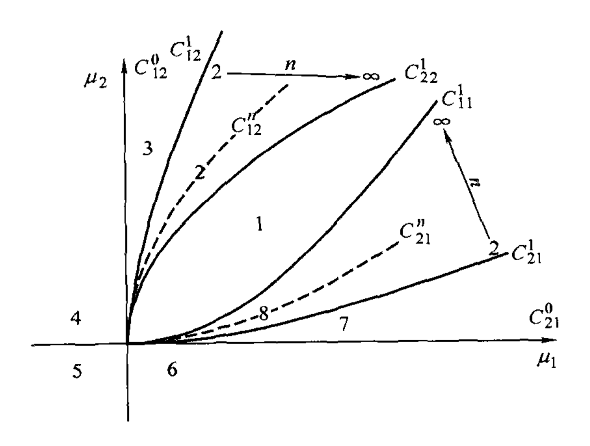


图 13.7.14　与图 13.7.13 相同, 但 $A_1 < 0, A_2 < 0$. 系统在区域 1 中有一条稳定周期轨道, 而在其它地方没有周期轨道.

在异宿轨道上分界线量 $A_{1,2}$ 的定义与同宿回路的情形一样. 注意, 情形 $\{A_1 > 0, A_2 > 0\}$ 和 $\{A_1 < 0, A_2 < 0\}$ 对定义在平面上的系统都有可能 (见图 13.7.16), 但在后一个情形两条轨道 Γ_1 和 Γ_2 都是游荡的.

O_1 和 O_2 都是鞍 - 焦点情形的分支图如图 13.7.17 所示. 其中, 对应同宿回路的曲线 L_1 和 L_2 与曲线 $C^0_{21}: \{\mu_1 = 0\}$ 和 $C^0_{12}: \{\mu_2 = 0\}$ 相交无穷多次. 接下来, 对每个 $k = 0, 1, 2, \cdots$, 对 L_1 与 C^k_{21} 的连通分支 (L_2 与 C^k_{12} 的连通分支) 的任何两个相邻交点使得不等式 $h_1(\mu_2) > h_{k12}(\mu_2)$ (相应地, $h_2(\mu_1) > h_{k21}(\mu_1)$) 在这些点之间

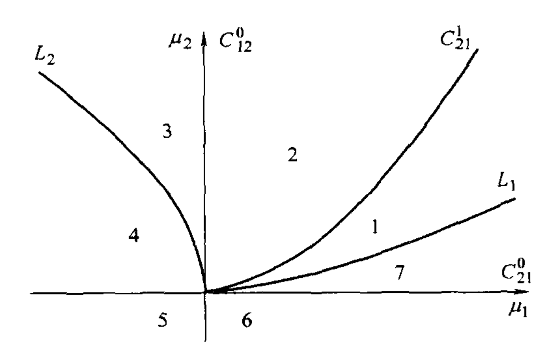


图 13.7.15 与图 13.7.13 相同, 但 $A_1>0$, $A_2<0$. 系统在区域 1—3 中有一条稳定周期轨道, 而在别处没有周期轨道.

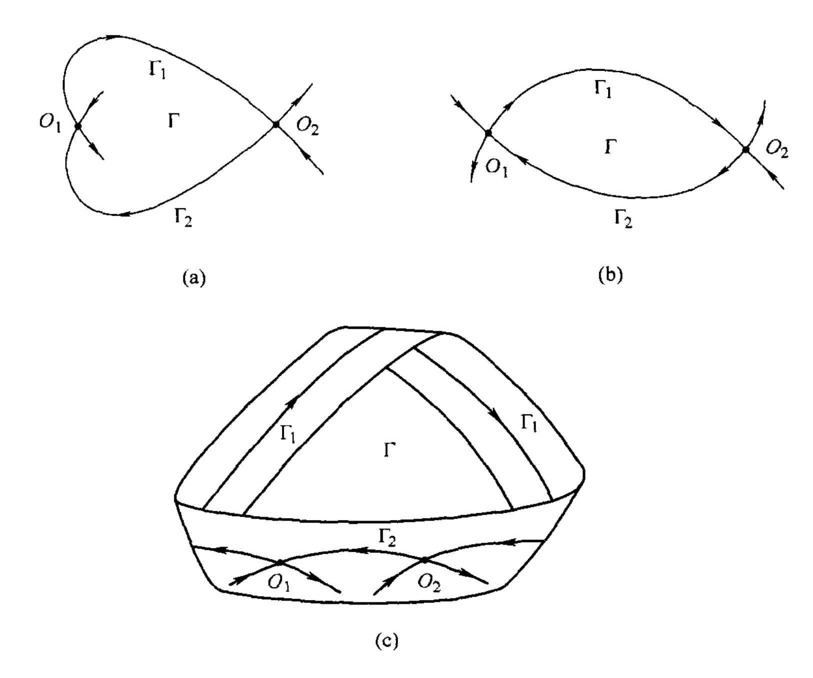


图 13.7.16 三类异宿环: (a) $A_{1,2}>0$; (b) $A_{1,2}<0$; (c) $A_1<0$, $A_2>0$ 时, Möbius 带上两个鞍点之间的半可定向异宿连接.

成立, 存在曲线 C_{21}^{k+1} (相应地 C_{12}^{k+1}) 的分枝连接这些点. 依次地这个分枝与 L_1(相应地 L_2) 相交无穷多次, 等等.

这个过程的极限点对应于同宿回路的存在性, 这个同宿回路是另一个鞍 - 焦点的分界线的 ω - 极限集.

对 O_1 是鞍 - 焦点以及 O_2 是鞍点情形的分支图如图 13.7.18 和图 13.7.19 所示. 这里, 图像依赖于沿着异宿轨道 Γ_2 计算的分界线量 A_2 的符号. 对 $A_2>0$ 不存在如 C_{21}^k 的曲线, 其中 $k\geqslant 1$. 当 $A_2<0$ 时曲线 C_{21}^1 与 L_1 相交无穷多次, 曲线 C_{21}^k 的集

合对 $A_2 < 0$ 时的结构与 $O_{1,2}$ 都是鞍 - 焦点的情形相同.

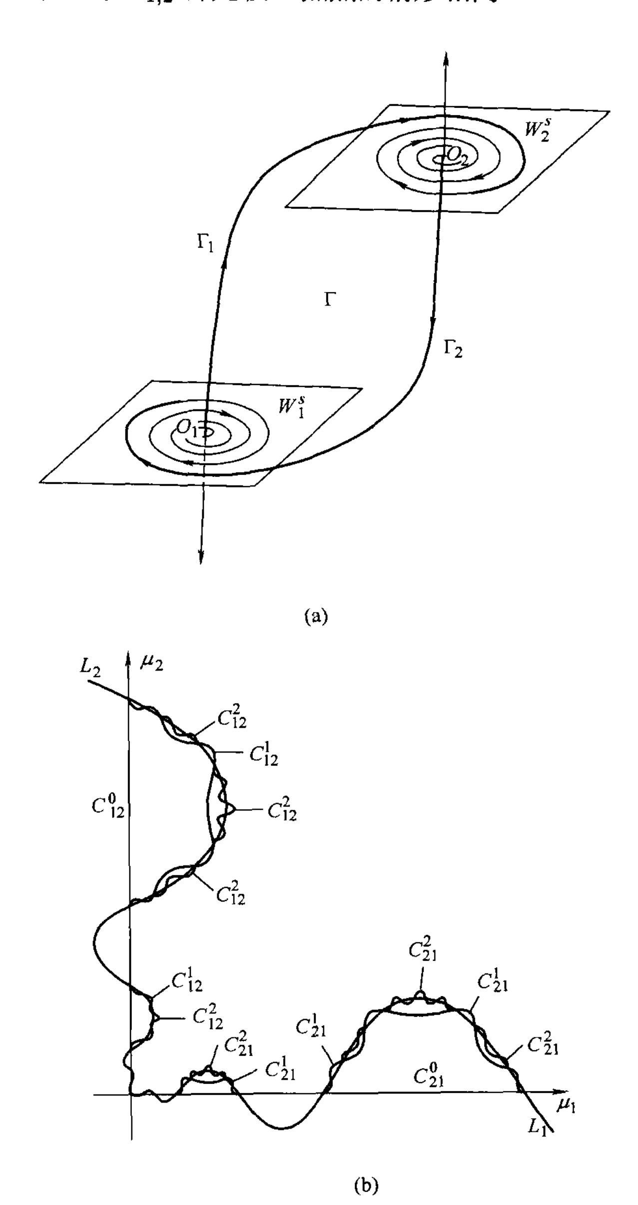


图 13.7.17　(a) 一对鞍 - 焦点之间的两种方式的一维异宿连接. (b) 对应的分支图.

曲线 C_{12}^k 的集合的组织如下: 注意到曲线 L_2: $\mu_2 = h_2(\mu_1)$ 交直线 $C_{12}^0 : \{\mu_2 = 0\}$ 无穷多次. 设 $P(\mu_1', 0)$ 和 $Q(\mu_1'', 0)$ 是使得在这两点之间 $h_2 > 0$ 的两个相邻交点. 设 $\mu_1' > \mu_1''$. 则当 $A_2 > 0$ 时从点 P 出发的 (或者当 $A_2 < 0$ 时从点 Q 出发的) 无穷多条曲线 C_{12}^k, 它们中的每一条与 L_2 相交于一点. 曲线 C_{12}^1 终止于 Q(如果 $A_2 < 0$ 则

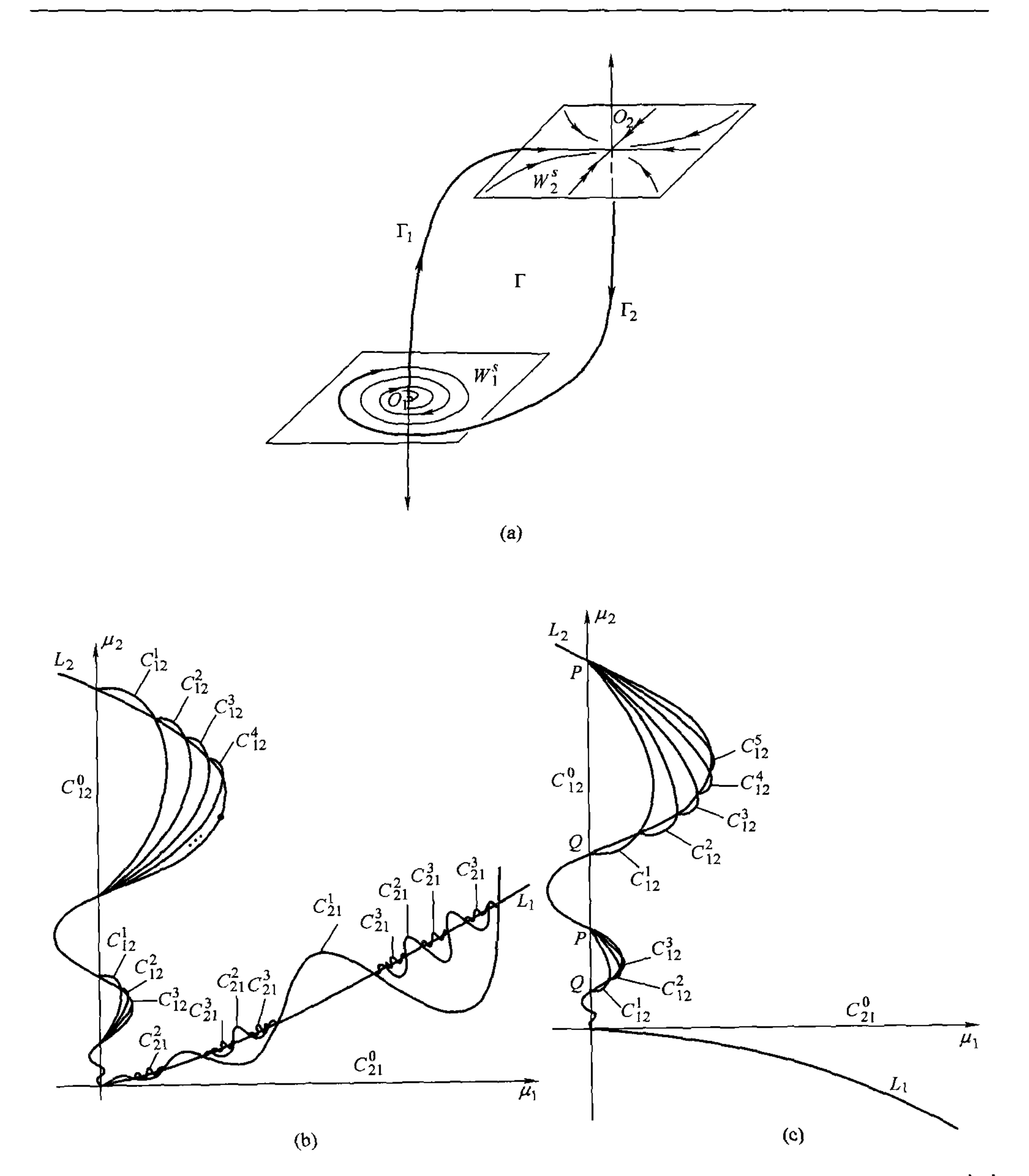


图 13.7.18 (a) 鞍 - 焦点和鞍点之间的两种方式的异宿连接. 情形 (b)$A_2 < 0$ 和 (c)$A_2 > 0$ 时对应的分支图.

终止于 P), 曲线 C_{12}^2 终止于交点 $C_{12}^1 \bigcap L_2$, 等等: 曲线 C_{12}^{k+1} 终止于点 $C_{12}^k \bigcap L_2$.

所有这些交点对应于 O_2 的**不可定向**的同宿回路 (回路上的分界线量为负), 它们凝聚在回路上分界线量为零的点. L_2 上的这点与点 P ($A_2 < 0$ 时的点 Q) 之间的线段对应于可定向的同宿回路, O_1 的分界线 Γ_1 当 $t \to +\infty$ 时盘旋趋于它. 曲线

C_{12}^k 从左边凝聚在这个线段上.

我们必须指出, 这个图像被证明仅当系统至少是 $\mathbb{C}^3$, 且满足

$$2\rho\nu < \rho\bar{\nu} + 2$$

时才成立. 这里 ρ 是在鞍 - 焦点 O_1 的鞍点指标, ν 是在鞍点 O_2 的鞍点指标, 以及 $\bar{\nu} = |\mathrm{Re}\,\dfrac{\lambda_2}{\gamma}|$, 其中 γ 表示 O_2 的正特征指数, λ_2 是 O_2 最靠近虚轴的**非主**特征指数 (λ_1 是主指数, 故 $\nu = |\dfrac{\lambda_1}{\gamma}|$ 和 $1 < \nu < \bar{\nu}$; 由假设也有 $\rho > 1$——鞍点量为负).

如果上面这个不等式不满足, 则曲线 C_{12}^k 集的结构可能不同: 从 P 或 Q 出发的曲线 C_{12}^k 仍可有无穷多条, 但在某些情形它们中只有有限多条曲线与 L_2 相交, 其余曲线将终止于最后的交点.

注意所有这些结果 (除了在 O_1 是鞍 - 焦点, O_2 是鞍点情形的曲线 C_{12}^k 集的精细结构) 是对 $\mathbb{C}^1$ - 光滑系统证明的. 因此, 如同 8 字形同宿情形, 这些结果可以直接推广到 O_1 和 O_2 的不稳定流形是高维的情形 (但是它们这时必须有相同的维数), 只要本书第一卷的定理 6.4 中保证在异宿环附近的 $\mathbb{C}^1$ - 光滑不变流形存在的条件满足.

[121] 中研究的另外情形对应于在平衡态 O_1 和 O_2 的鞍点量有相反符号的异宿环分支 (两个鞍点量是正的情形或者当 O_1 和 O_2 都是鞍 - 焦点时将导致复杂动力学, 或者通过改变时间方向并化到不变流形上而化为之前的情形). 这里的主要假设是 O_1 和 O_2 都是简单鞍点 (不是鞍 - 焦点).

特别地, 设 O_1 的不稳定流形的维数等于 O_2 的不稳定流形的维数. 除此以外, 设在 O_1 和 O_2 的稳定和不稳定主特征指数是实数. 还假设两条异宿轨道 $\Gamma_{1,2}$ 沿着主方向进入和离开鞍点. 我们也假设一个鞍点的扩展不稳定流形与另一个鞍点的稳定流形沿着每个轨道 $\Gamma_{1,2}$ 横截, 以及一个鞍点的扩展稳定流形与另一个鞍点的不稳定流形沿着 $\Gamma_{1,2}$ 也是横截的. 在这些假设下, 定理 6.4 确保存在的二维不变流形, 它捕获对所有时间停留在异宿环小邻域内的所有轨道. 因此, 这里的动力学本质上是二维的. 再次注意, 由于不变流形一般只有 $\mathbb{C}^1$ - 光滑, 为了研究这个问题我们必须对原来的高维系统进行计算.

设 ν_1 和 ν_2 分别是在 O_1 和 O_2 的鞍点指标. 假设 $\nu_1 \neq 1$, $\nu_2 \neq 1$ 以及 $\nu_1\nu_2 \neq 1$. 则从所考虑的异宿环可分支出**不多于两个周期轨道**.

分支图如图 13.7.19 — 图 13.7.22 所示. 分界线量 A_1 和 A_2 定义为二维不变流形上异宿轨道 Γ_1 和 Γ_2 附近的大范围映射的导数. 注意, $A_{1,2}$ 的符号与鞍点量的符号的组合的其它情形可以通过改变时间方向和排列下标 " 1 " 和 "2" 类似地得到.

我们可以看到, 与鞍点量有相同符号的情形不同, 这个情形的特性是这里可能出现鞍 - 结点分支, 单回路周期轨道的倍周期分支以及二重回路的同宿回路.

[34, 35] 第一个研究其不稳定流形有**不同维数**的鞍点的异宿环. 这个研究主要集中在具有复杂动力学的系统. 但是, 我们在这里考虑一个动力学是简单的情形. 设三

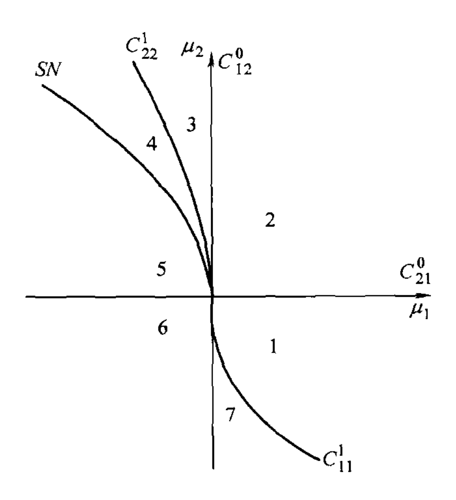


图 13.7.19 对于 $A_{1,2}>0$, $\nu_1>1$, $\nu_2<1$ 和 $\nu_1\nu_2>1$, 异宿环的两个平衡态都是鞍点时的分支图 (见图 13.7.12). 系统在区域 1—3 有一个极限环, 在区域 4 有两个极限环, 在区域 5—7 没有极限环. 在曲线 SN 上由鞍 - 结点产生一对极限环; 在曲线 L_2 上不稳定环变成同宿回路, 而稳定极限环终止于 L_1.

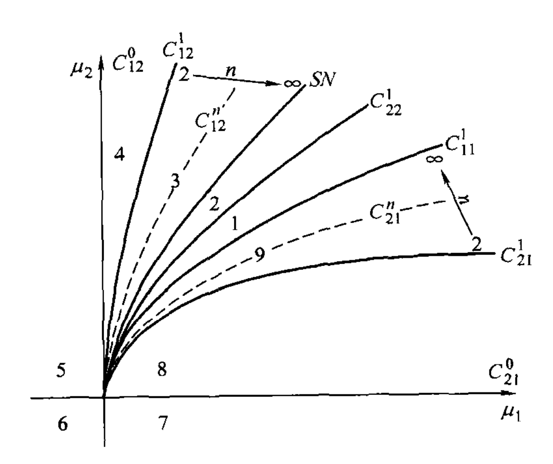


图 13.7.20 图 13.7.12 中对 $A_{1,2}<0$, $\nu_1>1$, $\nu_2<1$ 和 $\nu_1\nu_2>1$ 情形的异宿环的分支图. 这个系统在区域 1 有一个极限环, 在区域 2 有两个极限环, 在其他区域没有极限环.

维无穷光滑系统有两个平衡态 O_1 和 O_2, 它们分别具有实特征指数 $\gamma>0>\lambda_1>\lambda_2$ 和 $\eta_2>\eta_1>0>\xi$ (即 O_1 的不稳定流形是一维的, 以及 O_2 的不稳定流形是二维的). 假设二维流形 $W^s(O_1)$ 和 $W^u(O_2)$ 沿着异宿轨线 Γ_0 (它既不位于对应的强稳定流形上又不位于强不稳定流形上) **横截**相交. 也假设 O_1 的一维不稳定分界线与 O_2 的一维稳定分界线重合, 故存在结构不稳定的异宿轨道 Γ (图 13.7.23). 额外的非退化假设在这里是鞍点量非零, 以及 O_1 的扩展不稳定流形与 O_2 的扩展稳定流形在结构不稳定异宿轨道 Γ 上的点处横截.

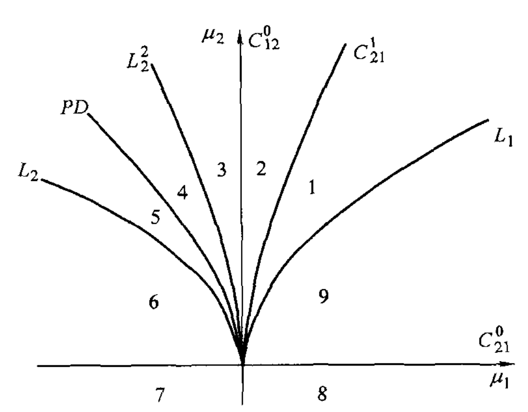


图 13.7.21 当 $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 < 1$ 和 $\nu_1\nu_2 > 1$ 时, 图 13.7.12 中的异宿连接分支图. 系统在区域 1,2,3 和 5 有一个简单周期轨道, 在区域 4 有两个周期轨道 (一个是简单的另一个是倍周期的), 在其他地方没有周期轨道. 稳定周期轨道在对应于倍周期 (翻转) 分支的曲线 PD 上失去稳定性. 二重周期的不稳定极限环在 L_2^2 上变成二重分界线回路. 稳定的简单极限环终止在 L_1 上.

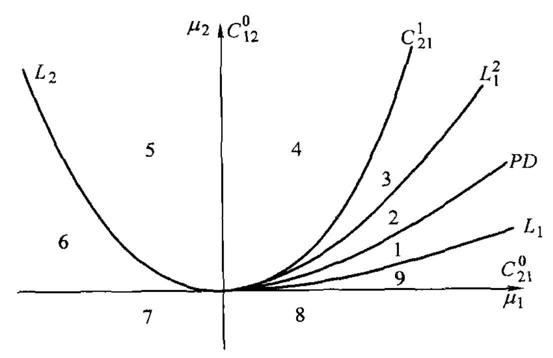


图 13.7.22 图 13.7.12 中当 $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $\nu_1 < 1$, $\nu_2 > 1$ 和 $\nu_1\nu_2 > 1$ 时的异宿连接分支图. 这个系统在区域 1,2,3 和 5 有一个简单周期轨道, 在区域 4 有两个周期轨道 (一个是简单的另一个是倍周期的), 在其他地方没有周期轨道.

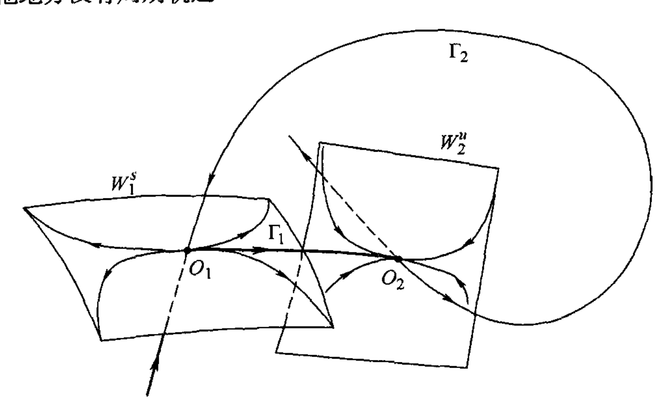


图 13.7.23 两个鞍点之间的异宿环. 注意连接 O_1 和 O_2 的异宿轨线 Γ_1 是结构稳定的.

这个分支是余维 2 的: 控制参数 (μ_1, μ_2) 在这里选择为 O_1 的一维不稳定分界线与某个截面的交点的坐标, 该截面与另一个鞍点 O_2 的一维稳定分界线横截. 由于对应的分支图十分复杂, 我们在这里就不叙述它了, 有兴趣的读者建议参考原来的文章 [34,35]. 尽管如此, 在这种情形下, 从这样的异宿连接分支出**不多于两个周期轨道 (永远是鞍点周期轨道)**.

13.8 鞍点平衡态附近轨线性态的估计

这一节我们证明在整个这一章中已经用过的鞍点平衡态附近的解的估计.

考虑在具有 m 维稳定和 n 维不稳定不变流形的鞍点平衡态邻域内的 $\mathbb{C}^r$ – 光滑 $(r \geqslant 3)$ 系统.

设鞍点的特征指数是 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ 和 $(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, 其中 $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ (i = 1, \cdots, m)$ 且 $\mathrm{Re}\,\gamma_i > 0\ (i = 1, \cdots, n)$. 假设 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_1})$ 的实部等于某个 $-\lambda < 0$, 其余的稳定特征指数 $(\lambda_{m_1+1}, \cdots, \lambda_m)$ 严格位于直线 $\mathrm{Re}\,(\cdot) = -\lambda$ 的左边. 考虑到不稳定特征指数, 我们假设 $\mathrm{Re}\,\gamma_1 = \cdots = \mathrm{Re}\,\gamma_{n_1} = \gamma > 0$ 以及对 $i > n_1$ 有 $\mathrm{Re}\,\gamma_i > \gamma$.

如同在本书第一卷附录 A 中的证明, 满足上面假设的 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的系统可以用变量的 $\mathbb{C}^{r-1}$ – 变换化为形式

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= B_1 x + f_{11}(x, y, v)x + f_{12}(x, u, y, v)u, \\
\dot{u} &= B_2 u + f_{21}(x, y, v)x + f_{22}(x, u, y, v)u, \\
\dot{y} &= C_1 y + g_{11}(x, u, y)y + g_{12}(x, u, y, v)v, \\
\dot{v} &= C_2 v + g_{21}(x, u, y)y + g_{22}(x, u, y, v)v,
\end{aligned}
\tag{13.8.1}
$$

其中 B_1 的特征值是 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_1})$, B_2 的特征值是 $(\lambda_{m_1+1}, \cdots, \lambda_m)$, C_1 的特征值是 $(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1})$, C_2 的特征值是 $(\gamma_{n_1+1}, \cdots, \gamma_n)$. 此外, $\mathbb{C}^{r-1}$ – 光滑函数 f_{ij} 和 g_{ij} 满足

$$
\begin{aligned}
f_{11}(x, 0, 0) &\equiv 0, \quad & g_{11}(0, 0, y) &\equiv 0, \\
f_{12}(x, u, 0, 0) &\equiv 0, \quad & g_{12}(0, 0, y, v) &\equiv 0, \\
f_{j1}(0, y, v) &\equiv 0, \quad & g_{j1}(x, u, 0) &\equiv 0, \\
f_{22}(0, 0, 0, 0) &= 0, \quad & g_{22}(0, 0, 0, 0) &= 0.
\end{aligned}
\tag{13.8.2}
$$

设 $\lambda_0 > 0$ 和 $\gamma_0 > 0$ 使得对一切 $t \geqslant 0$ 有

$$
||e^{B_1 t}|| \leqslant e^{-\lambda_0 t}, \quad ||e^{-C_1 t}|| \leqslant e^{-\gamma_0 t}. \tag{13.8.3}
$$

例如, 当只存在一个稳定主特征指数 ($m_1 = 1$ 和 $\lambda_1 = -\lambda$ 是实数), 或者如果存在一对复共轭的稳定主特征指数 ($m_1 = 2$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\lambda + i\omega, \omega \neq 0$), 则 $\lambda_0 = \lambda$. 类似地, 如果 $n_1 = 1$, 或者如果 $n_1 = 2$ 以及 $\gamma_1 = \gamma_2^*$ 不是实数, 则 $\gamma_0 = \gamma$.

我们也选择某量 λ' 和 γ', 满足

$$0 < \lambda_0 < \lambda' < \min\{2\lambda_0, \lambda''\} \quad 和 \quad 0 < \gamma_0 < \gamma' < \min\{2\gamma_0, \gamma''\}, \tag{13.8.4}$$

其中 λ'' 和 γ'' 使得对一切 $t \geqslant 0$ 有

$$||e^{B_2 t}|| \leqslant e^{-\lambda'' t}, \quad ||e^{-C_2 t}|| \leqslant e^{-\gamma'' t}. \tag{13.8.5}$$

我们也取某 $\tilde{\lambda}$ 和 $\tilde{\gamma}$ 使得

$$0 < \lambda_0 < \tilde{\lambda} < \min\{\lambda', \lambda_0 + \gamma_0\} \quad 和 \quad 0 < \gamma_0 < \tilde{\gamma} < \min\{\gamma', \gamma_0 + \lambda_0\}. \tag{13.8.6}$$

设 $M_0(x_0, u_0, y_0, v_0)$ 和 $M_1(x_1, u_1, y_1, v_1)$ 是鞍点小邻域内的两点, 令 M_0 的在时间 $t = \tau$ 到达 M_1 的轨道不离开鞍点的邻域. 在 2.8 节已经证明 (x_1, u_1) 和 (y_0, v_0) 对任何小的 (x_0, u_0, y_1, v_1) 和 $\tau \geqslant 0$ 是唯一确定的. 此外, (x_1, u_1, y_0, v_0) 光滑依赖于 $(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau)$.

引理 13.5 **(Ovsyannikov-Shilnikov [101])** 记

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{B_1 \tau} x_0 + \xi_1(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau), \\ y_0 &= e^{-C_1 \tau} y_1 + \eta(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau), \\ u_1 &= \xi_2(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau), \\ v_0 &= \eta_2(x_0, u_0, y_1, v_1, \tau). \end{aligned} \tag{13.8.7}$$

如果恒等式 (13.8.2) 成立, 则有下面估计:

$$||\xi_1||_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\tilde{\lambda}\tau}), \quad ||\eta_1||_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\tilde{\gamma}\tau}), \tag{13.8.8}$$

$$||\xi_2||_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\lambda'\tau}), \quad ||\eta_2||_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\gamma'\tau}), \tag{13.8.9}$$

其中 $||\cdot||_{\mathbb{C}^{r-2}}$ 表示函数本身的范数以及它所有直到 $(r-2)$ 阶导数的范数的最大值.

证明 记

$$f_i = f_{i1} x + f_{i2} u \quad 和 \quad g_i = g_{i1} y + g_{i2} v. \tag{13.8.10}$$

只需证明 (见 2.7 节), 给定小的 (x_0, u_0, y_1, v_1), 系统

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{B_1 t} x_0 + \int_0^t e^{B_1(t-s)} f_1(x(s), u(s), y(s), v(s)) ds, \\ u(t) &= e^{B_2 t} u_0 + \int_0^t e^{B_2(t-s)} f_2(x(s), u(s), y(s), v(s)) ds, \\ y(t) &= e^{-C_1(\tau - t)} y_1 - \int_t^\tau e^{-C_1(s-t)} g_1(x(s), u(s), y(s), v(s)) ds, \\ v(t) &= e^{-C_2(\tau - t)} v_1 - \int_t^\tau e^{-C_2(s-t)} g_2(x(s), u(s), y(s), v(s)) ds \end{aligned} \tag{13.8.11}$$

的解 $(x(t), u(t), y(t), v(t))$ 对 $t \in [0, \tau]$ 满足下面的估计

$$
\begin{aligned}
&||x(t) - e^{B_1 t}x_0|| \leqslant K_1 e^{-\lambda_0 t} e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda_0)\tau},\\
&||u(t)|| \leqslant K_2 e^{-\lambda' t},\\
&||y(t) - e^{-C_1(\tau-t)}y_1|| \leqslant K_1 e^{-\gamma_0(\tau-t)} e^{-(\tilde{\gamma}-\gamma_0)\tau},\\
&||v(t)|| \leqslant K_2 e^{-\gamma'(\tau-t)},
\end{aligned}
\tag{13.8.12}
$$

其中 $K_{1,2}$ 是某些常数.[16]

此外, 类似的估计必须对 (13.8.12) 的左端表达式关于 (x_0, u_0, y_1, v_1) 的所有导数成立, 其中诸 K 的值可依赖于导数的阶. 注意, 不需要去估计关于 t 和 τ 的导数, 因为由简单恒等式 (见引理 5.1 和 5.2 节中的说明) 它们与其它导数有关.

如同在 2.8 节证明的, (13.8.11) 的解是从初始猜测 $(x^{(1)}(t), u^{(1)}(t), y^{(1)}(t), v^{(1)}(t)) = 0$ 开始以如下方式计算的逐次逼近 $(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), y^{(k)}(t), v^{(k)}(t))(k \to +\infty)$ 的极限:

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)}(t) &= e^{B_1 t}x_0 + \int_0^t e^{B_1(t-s)} f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds,\\
u^{(k+1)}(t) &= e^{B_2 t}u_0 + \int_0^t e^{B_2(t-s)} f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds,\\
y^{(k+1)}(t) &= e^{-C_1(\tau-t)}y_1 - \int_t^\tau e^{-C_1(s-t)} g_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds,\\
v^{(k+1)}(t) &= e^{-C_2(\tau-t)}v_1 - \int_t^\tau e^{-C_2(s-t)} g_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds.
\end{aligned}
\tag{13.8.13}
$$

因此, 为了证明 (13.8.11) 的解的某些估计, 按归纳法我们可假设 k 次逐次逼近满足这些估计, 然后以这些假设为基础, 验证 $(k+1)$ 次逼近也满足它们. 当然, 这些估计必须与 k 无关.

现在假设对某 $K_{1,2}$, k 次近似满足 (13.8.12). 由此得知

$$
||x^{(k)}(t)|| \leqslant 2\varepsilon e^{-\lambda_0 t}, \quad ||y^{(k)}(t)|| \leqslant 2\varepsilon e^{-\gamma_0(\tau-t)} \tag{13.8.14}
$$

与 K_1 的值无关, 只要 τ 足够的大, 其中 ε 是所考虑的鞍点邻域的大小 (故 $||x_0|| \leqslant \varepsilon, ||y_1|| \leqslant \varepsilon$).

基于恒等式 (13.8.2), 函数 f_1 可有估计

$$
||f_1|| \leqslant \sup ||f''_{11x(y,v)}|| \cdot ||x||^2 ||y, v|| + \sup ||f'_{12(y,v)}|| \cdot ||u|| \cdot ||y, v||. \tag{13.8.15}
$$

[16] 严格地讲, 这给出 (13.8.8) 和 (13.8.9) 右端的 $O(\cdot)$ - 型估计, 但是只要将 $\tilde{\lambda}, \lambda', \tilde{\gamma}, \gamma'$ 稍微靠近零, 就可用 o 符号代替符号 O.

由此, 由 (13.8.14) 和假设 (13.8.12) 成立, 得知对充分小 ε 有

$$\begin{aligned}
&\|f_1(x^{(k)}(s),u^{(k)}(s),y^{(k)}(s),v^{(k)}(s))\| \\
&\leqslant e^{-2\lambda_0 s}e^{-\gamma_0(\tau-s)}+K_0K_2^2e^{-\lambda' s}e^{-\gamma_0(\tau-s)} \\
&\leqslant (1+K_0K_2^2)e^{-\tilde{\lambda}s}e^{-\gamma_0(\tau-s)},
\end{aligned} \tag{13.8.16}$$

其中 K_0 是某常数. 注意, 我们在这里用了诸 λ 之间的关系式 (13.8.4) 和 (13.8.6).

类似地, 如果 ε 充分小, 则

$$\|f_2(x^{(k)}(s),u^{(k)}(s),y^{(k)}(s),v^{(k)}(s))\| \leqslant (\varepsilon+\delta K_2)e^{-\lambda' s}, \tag{13.8.17}$$

其中可缩小鞍点邻域的大小使得 $\delta\equiv\sup\|f_{22}\|$ 选择为任意小.

由 (13.8.16) 和 (13.8.17) 分别得到

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t e^{\lambda_0 s}f_1(x^{(k)}(s),u^{(k)}(s),y^{(k)}(s),v^{(k)}(s))ds\right\| \\
&\leqslant (1+K_0K_2^2)e^{-\gamma_0\tau}\int_0^\tau e^{(\gamma_0+\lambda_0-\tilde{\lambda})s}ds
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t e^{\lambda'' s}f_2(x^{(k)}(s),u^{(k)}(s),y^{(k)}(s),v^{(k)}(s))ds\right\| \\
&\leqslant (\varepsilon+\delta K_2)\int_0^t e^{(\lambda''-\lambda')s}ds.
\end{aligned}$$

由此 [见 (13.8.13), (13.8.3) 和 (13.8.5)], $(x,u)^{(k+1)}$ 满足具有相同的 K_1 和 K_2 的 (13.8.12), 如果

$$K_1 \geqslant (1+K_0K_2^2)\frac{1}{\lambda_0+\gamma_0-\tilde{\lambda}}$$

和

$$K_2 \geqslant \varepsilon+(\varepsilon+\delta K_2)\frac{1}{\lambda''-\lambda'}.$$

由问题的对称性, 立刻得到关于 $K_{1,2}$ 的不等式, 它们对 $(y,v)^{(k+1)}$ 满足 (13.8.12) 已经足够了. 总之, 这给出

$$\begin{aligned}
&K_1 \geqslant (1+K_0K_2^2)\frac{1}{\lambda_0+\gamma_0-\max\{\tilde{\gamma},\tilde{\lambda}\}}, \\
&K_2 \geqslant \varepsilon+(\varepsilon+\delta K_2)\max\left\{\frac{1}{\gamma''-\gamma'},\frac{1}{\lambda''-\lambda'}\right\},
\end{aligned} \tag{13.8.18}$$

其中当缩小鞍点邻域的大小 ε 时 δ 趋于零.

这些不等式对 $K_2=O(\varepsilon)$ 和 $K_1=O(1)$ 容易满足. 因此, 我们事实上可以选择适当的常数 $K_{1,2}$ 使得估计 (13.8.12) 满足. 为了完成引理的证明, 必须证明类似的估计对 (13.8.11) 的解 $(x(t),u(t),y(t),v(t))$ 的所有导数成立.

在 2.8 节已经证明逐次逼近收敛于边值问题的解和它的所有导数. 因此我们可以假设 k 次逼近满足[17]

$$\begin{aligned}
&||D_p x^{(k)}(t) - D_p(e^{B_1 t}x_0)|| \leqslant K_1^{(p)} e^{-\lambda_0 t} e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda_0)\tau},\\
&||D_p u^{(k)}(t)|| \leqslant K_2^{(p)} e^{-\lambda' t},\\
&||D_p y^{(k)}(t) - D_p(e^{-C_1(\tau-t)}y_1)|| \leqslant K_1^{(p)} e^{-\gamma_0(\tau-t)} e^{-(\tilde{\gamma}-\gamma_0)\tau},\\
&||D_p v^{(k)}(t)|| \leqslant K_2^{(p)} e^{-\gamma'(\tau-t)},
\end{aligned} \tag{13.8.19}$$

其中某 $K_{1,2}$ 与 k 无关但可依赖于导数的阶 p. 于是, 基于这个假设, 我们必须证明下一个逼近 $(x^{(k+1)}(t), u^{(k+1)}(t), y^{(k+1)}(t), v^{(k+1)}(t))$ 的导数满足相同的估计.

事实上, 只需对 $x^{(k+1)}(t)$ 和 $u^{(k+1)}(t)$ 进行计算, 对 $y^{(k+1)}(t)$ 和 $v^{(k+1)}(t)$ 的公式由问题的对称性得到.

微分 (13.8.13) 给出

$$D_p x^{(k+1)}(t) = D_p(e^{B_1 t}x_0) + \int_0^t e^{B_1(t-s)} D_p f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds,$$

$$D_p u^{(k+1)}(t) = D_p(e^{B_2 t}u_0) + \int_0^t e^{B_2(t-s)} D_p f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds.$$

由 (13.8.3) 和 (13.8.5), 我们有

$$\begin{aligned}
&||D_p x^{(k+1)}(t) - D_p(e^{B_1 t}x_0)||\\
&\leqslant e^{-\lambda_0 t}\int_0^t e^{\lambda_0 s}||D_p f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))||ds,\\
&||D_p u^{(k+1)}(t)||\\
&\leqslant e^{-\lambda'' t}\left[1 + \int_0^t e^{\lambda'' s}\left\|D_p f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))\right\| ds\right].
\end{aligned} \tag{13.8.20}$$

现在用早先我们在证明引理时的相同方法, 我们还必须验证对任意 p, 类似于 (13.8.16) 和 (13.8.17) 的估计对导数 $D_p f_{1,2}$ 也成立:

$$||D_p f_1(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))|| \leqslant \tilde{K}_1 e^{-\gamma_0(\tau-s)} e^{-\tilde{\lambda} s} \tag{13.8.21}$$

以及

$$||D_p f_2(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))|| \leqslant (\tilde{K}_2 + \delta K_2^{(p)}) e^{-\lambda' s}, \tag{13.8.22}$$

其中可以将考虑的鞍点邻域缩小使得 δ 选择为任意小. $\tilde{K}_2$ 与 (13.8.19) 中的常数 $K_{1,2}^{(p)}$ 的特殊选择无关, $\tilde{K}_1$ 与 $K_1^{(p)}$ 无关 (然而, $\tilde{K}_{1,2}$ 可依赖于对应较低阶导数的 $K_{1,2}$).

---

[17] 我们用记号 $D_p = \dfrac{\partial^p}{\partial(x^0, u^0, y^1, v^1)^p}$.

由链规则, 导数

$$D_p f_i(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))$$

可由和式

$$\begin{aligned}&\text{常数}\cdot\sum_{q_1,q_2}\left\|\frac{\partial^p f_i}{\partial(x,u)^{q_1}\partial(y,v)^{q_2}}(x^{(k)}(s),u^{(k)}(s),y^{(k)}(s),v^{(k)}(s))\right\|\\&\times\|D_{l_1}(x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))\|\cdots\|D_{l_{q_1}}(x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))\|\\&\times\|D_{l_{q_1+1}}(y^{(k)}(s),v^{(k)}(s))\|\cdots\|D_{l_{q_1+q_2}}(y^{(k)}(s),v^{(k)}(s))\|\end{aligned}\tag{13.8.23}$$

估计, 其中 $q_{1,2}$ 是满足 $1\leqslant q_1+q_2\leqslant p$ 的非负整数, l_i $(i=1,\cdots,q_1+q_2)$ 是满足 $l_1+\cdots+l_{q_1+q_2}=p$ 的正整数.

由假设, 对导数 $\|D_l u^{(k)}(s)\|$ 和 $\|D_l v^{(k)}(s)\|$ 的估计由 (13.8.19) 给出. 对大的 τ, 由估计 (13.8.19) 得

$$\|D_l x^{(k)}(s)\|\leqslant 2e^{-\lambda_0 s},\quad \|D_l y^{(k)}(s)\|\leqslant 2e^{-\gamma_0(\tau-s)}.\tag{13.8.24}$$

因此估计 (13.8.23) 可重写为

$$\text{常数}\cdot\sum_{q_1,q_2}\left\|\frac{\partial^p f_i}{\partial(x,u)^{q_1}\partial(y,v)^{q_2}}(x^{(k)}(s),u^{(k)}(s),y^{(k)}(s),v^{(k)}(s))\right\|e^{-q_1\lambda_0 s}e^{-q_2\gamma_0(\tau-s)}.\tag{13.8.25}$$

显然, 在 f_1 的估计中, 满足 $q_1\geqslant 2$ 和 $q_2\geqslant 1$ 的项满足 (13.8.21), f_2 的估计中使得 $q_1\geqslant 2$ 的所有项满足 (13.8.22). 也注意

$$\frac{\partial^{q_2} f_i}{\partial(y,v)^{q_2}}\equiv\frac{\partial^{q_2} f_{i1}}{\partial(y,v)^{q_2}}\cdot x^{(k)}(s)+\frac{\partial^{q_2} f_{i2}}{\partial(y,v)^{q_2}}\cdot u^{(k)}(s)=O(e^{-\lambda' s}).\tag{13.8.26}$$

其中, 我们利用了 (13.8.12), (13.8.14), (13.8.4) 和恒等式 (13.8.2), 在 $x=0$ 它们给出 $\dfrac{\partial^{q_2} f_{i1}}{\partial(y,v)^{q_2}}=0$. 由于 $q_2\leqslant r-2$ 和 $f_{i1}\in\mathbb{C}^{r-1}$, f_{i1} 的 q_2 阶导数是光滑函数. 因此, 一旦在 $x=0$ 它等于零, 它可由 $\dfrac{\partial^{q_2} f_{i1}}{\partial(y,v)^{q_2}}=O(x)$ 估计.

因此, 由 (13.8.26) 得知, 对 f_1 的估计 (13.8.25) 中满足 $q_1=0$ 和 $q_2\geqslant 1$ 的项, 以及对 f_2 的估计中满足 $q_1=0$ 的所有项分别地也满足 (13.8.21) 和 (13.8.22).

类似地, 由于 f_1 在 $(y,v)=0$ 恒等于零, 得知

$$\frac{\partial^{q_1} f_1}{\partial(x,u)^{q_1}}=O(e^{-\gamma_0(\tau-s)}).$$

因此, f_1 的估计 (13.8.25) 中满足 $q_1\geqslant 2$ 的所有项满足 (13.8.21).

在 (13.8.25) 中最后余下要研究的项是 $(q_1 = 1)$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{q_2} f_i}{\partial(y,v)^{q_2}}\right\| \cdot e^{-q_2\gamma_0(\tau-s)}e^{-\lambda_0 s}$$

和

$$\left\|\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{q_2} f_i}{\partial(y,v)^{q_2}}\right\| \cdot e^{-q_2\gamma_0(\tau-s)}e^{-\lambda' s}.$$

注意在 $(x,u) = 0$, $f'_{ix} = 0$ [见 (13.8.2)]. 因此, 它以及它关于 (y,v) 的所有直到 $q_2 \leqslant r-3$ 阶导数都是 $O(x,u)$ 阶的. 由此, 从 (13.8.12), (13.8.14) 和 (13.8.4) 得知上面两项可以由 (常数 $\cdot\, e^{-q_2\gamma_0(\tau-s)}e^{-\lambda' s}$) 估计, 即它们满足 (13.8.22), 以及若 $q_2 \geqslant 1$, 满足 (13.8.21).

剩下对 f_1 考虑情形 $q_1 = 1, q_2 = 0$. 为满足 (13.8.21), 我们必须证明

$$e^{-\lambda_0 s}\frac{\partial f_1}{\partial(x,u)} = O(e^{-\gamma_0(\tau-s)}e^{-\tilde{\lambda} s}),$$

但这显然可从 (13.8.14) 和 (13.8.12) 得到, 因为 $f_1 = f_{11}x + f_{12}u$, 以及 f_{1i} 在 $(y,v) = 0$ 等于零 [见 (13.8.2)].

我们已经证明导数 $D_p f_i(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), y^{(k)}(s), v^{(k)}(s))$ 满足估计 (13.8.21) 和 (13.8.22). 注意对 $x^{(k)}(s)$ 和 $y^{(k)}(s)$ 的导数我们仅仅用了估计 (13.8.24), 它与 (13.8.19) 中的 $K_{1,2}$ 的选择无关. 因此, (13.8.21) 中的估计因子 $\tilde{K}_1$ 事实上与 $K_1^{(p)}$ 无关. (13.8.23) 中依赖于 $K_{1,2}^{(p)}$ 的对 (13.8.22) 起作用的项仅为

$$||f'_{2u}|| \cdot ||D_p u^{(k)}(s)|| \text{ 和 } ||f'_{2v}|| \cdot ||D_p v^{(k)}(s)||.$$

这里的第一项可由 $\delta K_2^{(p)} e^{-\lambda' s}$ 估计, 由缩小所考虑的鞍点邻域 ε 的大小可使得其中的 δ 任意小. 第二项可以由

$$\begin{aligned} &K_2^{(p)} e^{-\gamma'(\tau-s)} \cdot (||f'_{21v}|| \quad ||x^{(k)}(s)|| + ||f'_{22v}|| \quad ||u^{(k)}(s)||) \\ &= K_2^{(p)} \cdot O(||x^{(k)}(s)||^2 + ||u^{(k)}(s)||) = K_2^{(p)} \cdot O(\varepsilon e^{-\lambda' s}) \end{aligned}$$

估计 [见 (13.8.14), (13.8.12) 和 (13.8.18)]. 所有这些与 (13.8.22) 完全一致.

现在, 对下一个逼近 $(x^{(k+1)}(t), u^{(k+1)}(t), y^{(k+1)}(t), v^{(k+1)}(t))$ 估计 (13.8.19) 的正确性由 (13.8.21), (13.8.22) 得知, 它们与由 (13.8.16) 和 (13.8.17) 得 (13.8.12) 的正确性的方法完全一样.

这就完成了引理 13.5 的证明.

注 1 根据本书第一卷附录 B 对微分同胚的鞍点不动点附近轨线估计的完全相同的步骤, 我们也可以证明

$$||\xi_{1,2}||_{\mathbb{C}^{r-1}} = o(e^{-\lambda_0\tau}), \quad ||\eta_{1,2}||_{\mathbb{C}^{r-1}} = o(e^{-\gamma_0\tau}) \tag{13.8.27}$$

以及对 $r = 2$ 这个估计也成立.

注 2　回忆当系统 ($\mathbb{C}^r$) 光滑依赖于某些参数时, 坐标变换将系统化为 $\mathbb{C}^{r-2}$ - 光滑依赖于参数的形式 (13.8.1) 和 (13.8.2) (确切地说, 它关于所有变量和参数的直到 $(r-1)$ 阶导数连续, 除了只有关于参数的最后 $(r-1)$ 阶导数可能不存在). 此时矩阵 $B_{1,2}$ 和 $C_{1,2}$ 是参数的 $\mathbb{C}^{r-2}$ - 光滑函数.

引理 13.5 的估计在这里仍成立. 事实上, 贯穿我们的证明 (与本书第一卷附录 B 中的类似叙述相比较) 容易追踪关于参数额外的 q 次 ($q \leqslant r-2$) 微分只能得到在估计 (13.8.8) 和 (13.8.9) 的右端出现 τ^q 因子, 但这个因子可以在 λ 和 γ 接近于零时被 $o(e^{-\lambda\tau})$ 和 $o(e^{-\gamma\tau})$ 项吸收.

函数 ξ 和 η 的 $(r-1)$ 阶导数现在分别可以用 $o(\tau^q e^{-\lambda_0\tau})$ 和 $o(\tau^q e^{-\gamma_0\tau})$ 估计 (证明与附录 B 中的过程完全相同). 这里 $q=0,\cdots,r-2$ 是关于参数的微分次数, λ_0 和 γ_0 现在以对矩阵指数的估计 (13.8.3) 永远满足的方式依赖于参数.

注 3　我们更多注意鞍点的不稳定流形是一维的情形. 这里没有 v - 变量且 $y \in \mathbb{R}^1$. 由尺度化时间, 系统 (13.8.1) 可以化为形式

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= B_1 x + f_{11}(x,y)x + f_{12}(x,u,y)u,\\
\dot{u} &= B_2 u + f_{21}(x,y)x + f_{22}(x,u,y)u,\\
\dot{y} &= y,
\end{aligned}
\tag{13.8.28}
$$

其中 B_1 的所有特征值 $(\nu_1,\cdots,\nu_{m_1})$ 有相同的实部 $-\nu<0$, B_2 的所有特征值 $(\nu_{m_1+1},\cdots,\nu_m)$ 都位于直线 $\mathrm{Re}(\cdot)=-\nu''<-\nu$ 的左边. $\mathbb{C}^{r-1}$ - 光滑函数 f_{ij} 必须满足

$$
f_{i1}(x,0)\equiv 0, \quad f_{1j}(0,0,y)\equiv 0. \tag{13.8.29}
$$

引理 13.5 在这里断言边值问题的解是

$$
\begin{aligned}
y_0 &= e^{-\tau}y_1,\\
x_1 &= e^{B_1\tau}x_0 + \xi_1(x_0,u_0,y_1,\tau),\\
u_1 &= \xi_2(x_0,u_0,y_1,\tau),
\end{aligned}
\tag{13.8.30}
$$

其中

$$
\|\xi_1\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\tilde{\nu}\tau}), \quad \|\xi_2\|_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\nu'\tau}). \tag{13.8.31}
$$

这里

$$
\nu<\nu'<\min\{2\nu,\nu''\}, \quad \nu<\tilde{\nu}<\min\{\nu',\nu+1\}. \tag{13.8.32}
$$

估计 (13.8.27) 可以写为

$$
\|\xi_{1,2}\|_{\mathbb{C}^{r-1}} = o(e^{-\nu\tau}). \tag{13.8.33}
$$

注 4 对 (13.8.30) 中的函数 $\xi_{1,2}$ 可得到更精细一点的估计. 即, 设

$$\bar{\xi}_{1,2}(u_0, y_1, \tau) = \xi_{1,2}(0, u_0, y_1, \tau). \tag{13.8.34}$$

则函数 $\bar{\xi}_{1,2}$ 分别满足某些比 $\xi_{1,2}$ 更好的估计. 事实上, 我们有

$$||\bar{\xi}_1||_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\bar{\nu}\tau}), \quad ||\bar{\xi}_2||_{\mathbb{C}^{r-2}} = o(e^{-\hat{\nu}\tau}), \tag{13.8.35}$$

对任何 $\bar{\nu}$ 和 $\hat{\nu}$ 满足

$$\nu < \hat{\nu} < \min\{\nu'', 2(1+\nu)\}, \nu < \bar{\nu} < \min\{\nu'', 1+\nu\}. \tag{13.8.36}$$

为了证明这点, 我们指出 $\bar{\xi}_1 = x(\tau)$ 和 $\bar{\xi}_2 = u(\tau)$, 其中 $(x(t), u(t), y(t))$ 是系统 (13.8.28) 边值问题 $\{x(0) = 0, u(0) = u_0, y(\tau) = y_1\}$ 的解. 它满足积分方程系统 [见 (13.8.11)]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{B_1(t-s)} f_1(x(s), u(s), y_1 e^{s-\tau}) ds, \\ u(t) &= e^{B_2 t} u_0 + \int_0^t e^{B_2(t-s)} f_2(x(s), u(s), y_1 e^{s-\tau}) ds, \end{aligned} \tag{13.8.37}$$

对它可从 $(x, u)(t) = 0$ 开始, 用逐次逼近法求解. 可以验证 (与引理 13.5 的证明方法相同), 对所有 $t \in [0, \tau]$ 每一个逐次逼近满足不等式

$$||x(t)||_{\mathbb{C}^{r-2}} \leqslant K_1 e^{-\bar{\nu}t}, \quad ||u(t)||_{\mathbb{C}^{r-2}} \leqslant K_2 e^{-\hat{\nu}t}, \tag{13.8.38}$$

诸 K 为某常数, 对每一步逼近它们都相同. 因此其极限满足相同的不等式, 这就给出了 (13.8.35) [见不等式 (13.8.12) 的说明].

第 14 章　安全和危险的稳定性边界

迄今为止, 本书所叙述的材料涵盖了对两个非瞬时现象分析的理论基础: 驻定态和自激振动. 前一个的数学映像是稳定平衡态, 后一个是稳定周期轨道. 理论上, 系统可观察到的与相空间中代表点的位置相应的状态没必要确切地定位在平衡态或者周期轨道上, 但可仅无限接近.[1] 我们也必须考虑到系统参数可能的变化. 如果参数变化充分慢, 则代表点可在稳定性区域内跟随极限机制发展. 但是, 当研究一个具体的动力系统和选择参数值时, 我们必须注意不仅要考虑机制的稳定性要求, 也要考虑其它问题. 例如, 有可能装置的最佳工作条件只能在它的稳定性区域的阈值附近达到. 另一个问题是系统的参数可向稳定性边界以拟驻定方式发展. 任何进一步的侵入超出了这个边界会导致出现非常不平凡的动力学.[2] 对这种情况的分析就是我们最后这一章的主题: 当在稳定性区域的边界游弋时, 代表点具有什么样的变化?

14.1　平衡态与周期轨道的主要稳定性边界

为了回答上一节提出的问题, 我们必须首先详细说明平衡态和周期轨道稳定性区域边界的主要类型. 为此我们必须对前面各章叙述过的所有信息进行系统地分类. 特别关注区别各类边界的特性.

考虑由

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) \tag{14.1.1}$$

[1] 代表点到极限状态的收敛过程称为**瞬时**机制. 形式上, 极限机制以及附近的瞬时过程不可能明显地加以区别. 然而, 对每个非线性动力学的特殊领域的这些过程的直观理解以及对它们的及时区分通常不会引起困难.

[2] 这种情况照字面意义称为 “在混沌的边缘”.

刻画的 n 维 p - 参数族.

假设系统有平衡态 (为简单起见, 设平衡态在原点, 即 $X(0,\varepsilon)=0$). 在参数空间 $\mathbb{R}^p$, 平衡态的稳定性区域的主要边界是由下面给出的条件定义的两个余维 1 曲面, 在它们上面平衡态变成

(1) 鞍 - 结点

$$X(0,\varepsilon)=0,\quad \Delta_n(\varepsilon)=0,$$
$$\Delta_1(\varepsilon)>0,\cdots,\Delta_{n-1}(\varepsilon)>0,\quad l_2(\varepsilon)\neq 0,$$

其中 $\Delta_i(\varepsilon)$ 是第 i 个 Routh-Hurwitz 子式, $l_2(\varepsilon)$ 是第一个 Lyapunov 量.

(2) 弱焦点

$$X(0,\varepsilon)=0,\quad \Delta_{n-1}(\varepsilon)=0,$$
$$\Delta_1(\varepsilon)>0,\cdots,\Delta_{n-2}(\varepsilon)>0,\quad \Delta_n(\varepsilon)>0,\quad L_1(\varepsilon)\neq 0,$$

其中 $L_1(\varepsilon)$ 是第一个 Lyapunov (焦点) 量.

接下来假设系统 (14.1.1) 在某参数区域内有稳定的周期轨道. 这里, 稳定性区域的边界可以按照在边界是否存在周期轨道而区分为两类主要的不同类型. 如果周期轨道在稳定性边界存在, 则问题化为对应的 Poincaré 映射的不动点的稳定性条件的研究.

设

$$\Xi(\rho,\varepsilon)\equiv\rho^{n-1}+a_1(\varepsilon)\rho^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(\varepsilon)=0 \tag{14.1.2}$$

是在不动点线性化映射的特征方程. 则下面对应的条件给出第一类稳定性边界:

(1) 鞍 - 结点周期轨道 (折分支) $\Xi(+1,\varepsilon)=0$, $l_2(\varepsilon)\neq 0$. 此外, 除了 $\rho=+1$, 特征方程 (14.1.1) 所有其它的根严格位于单位圆内.

(2) 倍周期分支 (翻转分支) $\Xi_n(-1,\varepsilon)=0$, $l_3(\varepsilon)\neq 0$. 除了 $\rho=-1$, (14.1.1) 其它的根必须严格位于单位圆内.

(3) 不变环面的产生 $\Xi(e^{\pm i\omega},\varepsilon)=0$, $\omega\neq\left\{0,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3},\pi\right\}$,$L_1(\varepsilon)\neq 0$. 除了 $\rho_{1,2}=e^{\pm i\omega}$, (14.1.1) 所有其它根必须严格位于单位圆内.

还存在四类已知的主要稳定性边界, 在它们上面周期轨道不再存在.

(4) 周期轨道坍缩为弱焦点 (当它趋于分支点时周期轨道的长度收缩为零). 这个条件与定义平衡态具有单对纯虚特征值的边界条件重合, 只要 Lyapunov 量 $L_1(\varepsilon)<0$.

(5) 周期轨道与鞍 - 结点平衡态 O_ε 的同宿回路 $\Gamma(\varepsilon)$ 合并, 其中 $\Gamma(\varepsilon)\notin W^{ss}(O_\varepsilon)$.

(6) 周期轨道与鞍点平衡态 O_ε 的同宿回路 $\Gamma(\varepsilon)$ 合并, 鞍点的特征指数 $\lambda_1(\varepsilon),\cdots,$

$\lambda_n(\varepsilon)$ 满足下面的条件:

$$\text{Re } \lambda_i(\varepsilon) < 0 \quad (i = 1, \cdots, n-1), \quad \lambda_n(\varepsilon) > 0,$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \lambda_i(\varepsilon) + \lambda_n(\varepsilon) < 0.$$

在这种情形和上一个情形, 周期轨道的周期无限增加, 而其长度保持为有限.

(7) 也是最后一个对应于 "蓝天突变" 的情形, 即当趋于稳定性边界时周期轨道 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的周期和长度都趋于无穷. 这种边界是由鞍 - 结点周期轨道 $\mathcal{L}^*$ 的存在性进行区别, 这里我们假设当 $t \to +\infty$ 时不稳定集 $W^u(\mathcal{L}^*)$ 上的所有轨线都回到 $\mathcal{L}^*$, 其中 $W^u(\mathcal{L}^*) \bigcap W^{ss}(\mathcal{L}^*) = \varnothing$. $W^u(\mathcal{L}^*)$ 中的轨线定义了所谓本质映射 f(详细见第 12 章). 它是圆周映射, 当穿过鞍 - 结点边界中使 f 的度数为零, 且 $\max|f'| < 1$ 的这部分时出现蓝天突变.

这些分支中的大部分其算法已经开发出来了, 因此可在软件中执行, 我们在这里指出一些为这些分支问题而设计的软件包: LOCBIF [76] , AUTO [46] 和 CONTENT [83]. "蓝天突变" 是个例外. 尽管它是余维 1 边界的, 在非线性动力学的应用中还没有找到这个分支, 虽然明显的数学模型已存在 [53].

14.2　稳定性区域的余维 1 边界的分类

稳定性的安全边界和危险边界的概念是 Bautin [24] 在研究平衡态的稳定性边界时提出的.

通过安全边界时, 系统的状态仅仅有小的定量改变. 而在危险边界系统的任何小扰动都会使系统离开危险边界并引起其性态的重大和不可逆的变化.

在这里我们应该注意, 在安全边界情形, 参数慢慢移动回到稳定性区域时系统可回到原来的状态, 而这在危险边界情形一般不可能.

显然, 安全边界和危险边界主要是由在边界上对应的平衡态或周期轨道的稳定性和不稳定性区分.

定义 14.1　在平衡态 O_ε 的稳定性边界上的点 ε_0 称为是安全的, 如果 O_{ε_0} 是渐近稳定的.

定义 14.2　在周期轨道 L_ε 的稳定性边界上的点 ε_0 称为是安全的, 如果 L_{ε_0} 是渐近轨道稳定的.

后一个情形对应 Poincaré 映射的不动点渐近稳定.

在这样的稳定性边界上, 分支平衡态 O_{ε_0} (或周期轨道 L_{ε_0}) 仍具有吸引盆. 因此穿过边界后, 小吸引 "云" (它的大小依赖于我们离开边界有多远) 将继承 O_{ε_0} (或 L_{ε_0}) 的稳定性. 当参数向相反方向变化回到稳定性边界时, 将使云轨迹缩回到一点 (或周期轨道).

这样的情形我们称稳定性的**软**失去. 新建立的机制内吸引轨迹可以是新平衡态、周期轨线、非共振环面, 或者甚至是奇怪吸引子 (这种情况一般归于即时混沌). 当 O_{ε_0} 有三个零特征值时后一个选项是有可能的 (对对称系统见 [18] 或者 [129]).

定义 14.3 在平衡态 O_ε 的稳定性边界上的点 ε_0 称为是危险的, 如果 O_{ε_0} 是 Lyapunov 意义下不稳定.

定义 14.4 周期轨线 L_ε 的稳定性边界上的点 ε_0 称为是危险的, 如果对应的 Poincaré 映射的不动点在 Lyapunov 意义下不稳定.

注意定义 14.2 和定义 14.4 只适用于周期轨道在稳定性边界存在的情形.

这里, 当接近稳定性边界时下面的情景发生: $O_\varepsilon(L_\varepsilon)$ 的吸引盆越来越小, 在 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 的极限, 它退化为稳定集 $W^s(O_{\varepsilon_0})$ $(W^s(L_{\varepsilon_0}))$. 这个集合是非空的, 因为由定义, $O_{\varepsilon_0} \in W^s(O_{\varepsilon_0})$ $(L_{\varepsilon_0} \subseteq W^s(L_{\varepsilon_0}))$. 但是, 它也可能仅由一个点 O_{ε_0} 组成: 例如, 平面上不稳定环坍缩为稳定焦点. 在一般情形, $W^s(O_{\varepsilon_0})$ $(W^s(L_{\varepsilon_0}))$ 是不平凡的. 此外, 在某些情形它还可以是全维 (等于相空间的维数) 的: 例如, 如果 O_{ε_0} 是鞍 - 结点.

通过危险点后, 代表点的性态可有如下情形:

(1) 如果在 O_{ε_0} (L_{ε_0}) 的小邻域内不出现新的极限集, 则代表点从该邻域发散. 此时我们有所谓**刚性**失去稳定性.

(2) 如果出现新吸引子, 则仍存在代表点从该邻域跑出的可能性, 而不是选择一个已经出现的稳定机制. 因此我们也可把这个情形归于刚性失去稳定性.

后面的说明仅仅是启发性的. 它反映小噪声的影响, 这在实际系统中永远存在 (此外, 大家知道在分支阈值附近波动被放大). 因此, 代表点甚至在系统到达危险边界以前就从老机制挣脱了.

从上面的理由得知, 当穿过稳定性边界时系统的动力学问题依赖于系统在临界情形的性态. 这就是为什么即使还没有进一步研究相应的分支现象之前, 研究临界情形仍是非常重要的. 此外, 完全的分支分析在许多情形 (例如, 平衡态至少有 3 个特征指数在虚轴上, 或者周期轨道有 3 个乘子在单位圆上) 原则上是不现实的 (见 [60]).

在稳定性边界上的安全/危险点处周期轨线不存在的情形 (大范围分支情形), 情况变得不太确定, 一般还不能作很好的区分. 但是, 在主要情形已经得到了充分的了解 (见下面).

这一节的余下部分我们仅考虑余维 1 的安全/危险的稳定性边界. 这允许我们只要用一个分支参数. 因此, 我们假设在 $\varepsilon = 0$ 系统

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon) \tag{14.2.1}$$

位于稳定性区域的边界上, $\varepsilon < 0$ 时它在稳定性区域的内部, $\varepsilon > 0$ 时在其外部.

14.2.1　安全边界的准则

(1) 设 O_ε 是平衡态, $O_{\varepsilon=0}$ 有单对纯虚特征值. 此时系统 $X(\varepsilon)$ 写为形式

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \rho(\varepsilon)x - \omega(\varepsilon)y + (L_1(\varepsilon)x - \Omega_1(\varepsilon)y)(x^2+y^2) + \cdots, \\
\dot{y} &= \omega(\varepsilon)x + \rho(\varepsilon)y + (\Omega_1(\varepsilon)x + L_1(\varepsilon)y)(x^2+y^2) + \cdots, \\
\dot{z} &= (A(\varepsilon) + h(x,y,z,\varepsilon))z,
\end{aligned}
\tag{14.2.2}
$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^1$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\omega(0) \neq 0, \rho(0) = 0$, 在 $\varepsilon \neq 0,\rho(\varepsilon)\varepsilon > 0$. 矩阵 $A(\varepsilon)$ 的特征值有负实部. 如果 Lyapunov 量 $L_1(0)$ 是负的, 则对应的边界 S_1 是安全的. 当 ε 从零增加时, 从弱焦点 $O_{\varepsilon=0}$ 产生唯一稳定的周期轨道 (图 14.2.1).

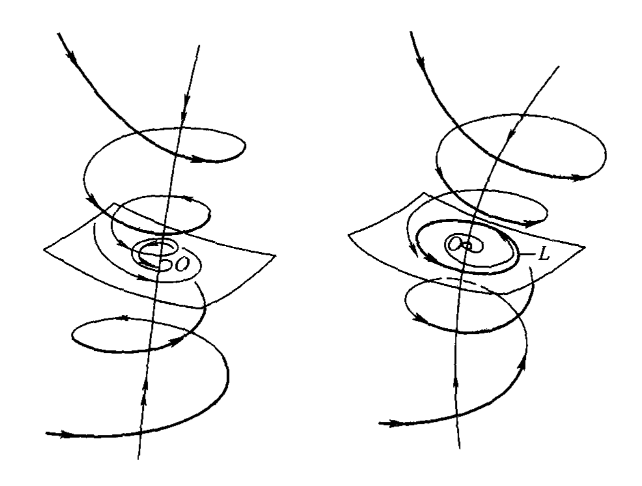


图 14.2.1　在安全边界上出现超临界 Andronov-Hopf 分支.

(2) 设周期轨线 L_ε 的一个乘子在稳定性边界上变成等于 -1. 与周期轨线横截的截面上的 Poincaré 映射 T 可表示为形式

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \rho(\varepsilon)x + a_2(\varepsilon)x^2 + a_3(\varepsilon)x^3 + \cdots, \\
\bar{y} &= (A(\varepsilon) + g(x,y,\varepsilon))y,
\end{aligned}
\tag{14.2.3}
$$

其中 $x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^{n-2}, \rho(0) = 1$, 当 $\varepsilon < 0$ 时 $|\rho(\varepsilon)| < 1$, 当 $\varepsilon > 0$ 时 $|\rho(\varepsilon)| > 1$. $A(\varepsilon)$ 的特征值严格位于单位圆内. 如果 Lyapunov 量 $l_2 = -a_3(0) - a_2^2(0)$ 是负的, 则稳定性边界 S_2 是安全的.

由这个 Poincaré 映射的形式得知, 对应于 $y = 0$ 的不变中心流形在这里是 Möbius 带, 周期轨线为其中线. 在 $\varepsilon > 0$, 其它出现的二重回路的周期轨线继承所有附近轨线的稳定性和吸引性, 见图 14.2.2.

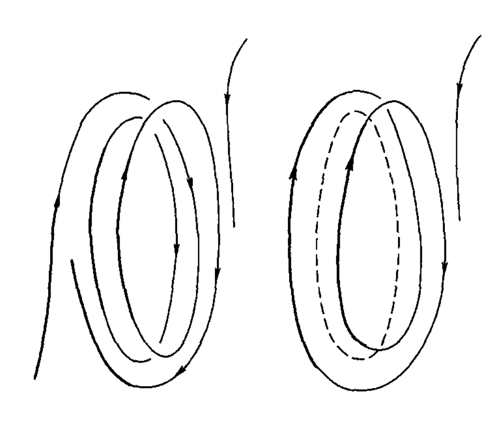


图 14.2.2 倍周期分支或翻转分支.

(3) 设系统有具有一对乘子等于 $e^{\pm i\varphi(\varepsilon)}$ 的周期轨线, 其中 $\varphi(0) \neq \{0, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$. 于是 Poincaré 映射可写为形式

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \rho(\varepsilon)(x\cos\varphi(\varepsilon) - y\sin\varphi(\varepsilon)) + (L_1(\varepsilon)x - \Omega(\varepsilon)y)(x^2+y^2) + \cdots, \\
\bar{y} &= \rho(\varepsilon)(x\sin\varphi(\varepsilon) + y\cos\varphi(\varepsilon)) + (\Omega(\varepsilon)x + L_1(\varepsilon)y)(x^2+y^2) + \cdots, \\
\bar{z} &= (A(\varepsilon) + h(x,y,z,\varepsilon))z,
\end{aligned}
\tag{14.2.4}
$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^1$, $z \in \mathbb{R}^{n-3}$, 当 $\varepsilon < 0$ 时 $|\rho(\varepsilon)| < 1$, 当 $\varepsilon > 0$ 时 $|\rho(\varepsilon)| > 1$, 且 $A(\varepsilon)$ 的特征值严格位于单位圆内. 此时如果 Lyapunov 量 $L_1(0)$ 是负的, 则边界 S_3 是安全的. 穿过 S_3 从周期轨线产生的稳定二维不变环面, 如 Andronov 对这个分支描述的, “环失去它的外形”,见图 14.2.3. 这是一个从自激振动到拍频调制软过渡的可靠机制.

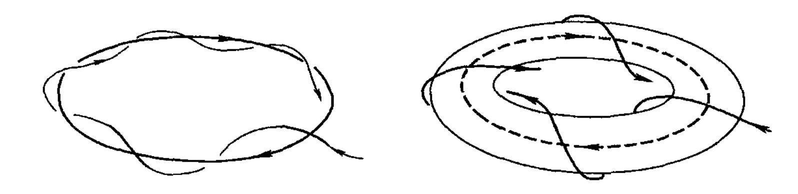
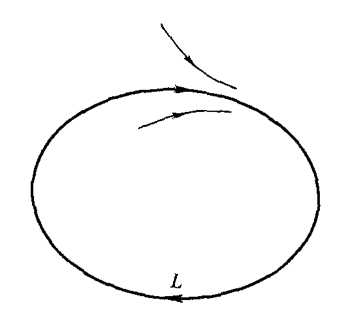


图 14.2.3 不变环面的软生成. 环失去它的外形.

(4) 在这种情形下周期轨线 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时的极限是由简单鞍 - 结点平衡态和它的分界线组成的同宿环 Γ^*, 见图 14.2.4. 我们也假设 Γ^* 是光滑曲线 (即同宿轨线不在鞍 - 结点的非主流形上). 所给的稳定性边界 S_4 是安全的, 因为曲线 Γ^* 稳定 (它吸引位于 Γ^* 小邻域内的每一条轨线). 离开分支点, 当 $\varepsilon > 0$ 时由于稳定点的出现, 出现了驻定机制.

(5) 周期轨线还有一个余维高于 1 的稳定性边界对应于 “蓝天突变”[152]. 它可出现在 $n \geqslant 3$ 维系统中.



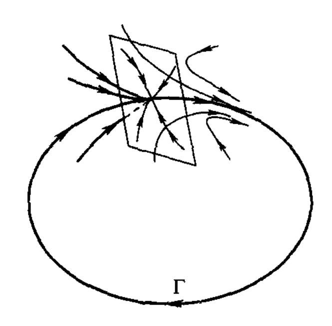


图 14.2.4 稳定环的消失可以导致出现具有双向渐近轨线的鞍 - 结点.

在这种情形下, $\varepsilon \to -0$ 时分支周期运动 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的极限拓扑不包含平衡点, 但鞍 - 结点型的周期轨线 $\mathcal{L}^*$ 当 $\varepsilon < 0$ 时消失. 轨线 $\mathcal{L}^*$ 是在它仅有一个乘子等于 1, 以及第一个 Lyapunov 量不等于零的意义下的简单鞍 - 结点.

在定义稳定性边界 S_5 时需要一般位置的下面条件: 用 $W^u_{\mathcal{L}^*}$ 记 $\mathcal{L}^*$ 的不稳定集. 它局部同胚于半柱面 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$. 我们假设 $W^u_{\mathcal{L}^*}$ 中的所有轨线当 $t \to +\infty$ 时趋于 $\mathcal{L}^*$, 且没有轨线位于强稳定子集 $W^{ss}_{\mathcal{L}^*}$ 上, 即 $W^{ss}_{\mathcal{L}^*} \bigcap W^u_{\mathcal{L}^*} = \varnothing$. 我们另外要求 $W^u_{\mathcal{L}^*}$ 与 $\mathcal{L}^*$ 从结点区域一侧按图 14.2.5 所示的方式连接, 还加上了某些定量限制 (详细见 12.4 节).

边界 S_5 是安全的. 当 $\varepsilon > 0$ 时周期轨道 $\mathcal{L}^*$ 分裂成两部分: 稳定环 $\mathcal{L}^+_\varepsilon$ 和鞍点 $\mathcal{L}^-_\varepsilon$. 因此新稳定的极限机制将由 $\mathcal{L}^+_\varepsilon$ 给出.

14.2.2 危险边界的准则

(6) 此时, 周期轨线 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的极限拓扑是双向渐近于鞍点平衡态的分界线回路 $\bar{\Gamma}$. 要求在鞍点的特征方程的根 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 满足 $\operatorname{Re}\rho_n \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{Re}\rho_2 < 0 < \rho_1$ 且鞍点量 $\sigma = \operatorname{Re}\rho_2 + \rho_1$ 为负. 边界 S_6 是危险的, 因为回路 $\bar{\Gamma}$ 不稳定: 有些轨线当 $t \to \pm\infty$ 时离开它的小邻域, 见图 14.2.6.

(7) 设平衡态 O_ε 的一个特征值在 $\varepsilon = 0$ 为零. 于是系统可以表示为形式

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= R(x,\varepsilon) + f(x,y,\varepsilon)y, \\
\dot{y} &= (A(\varepsilon) + g(x,y,\varepsilon))y,
\end{aligned}
\tag{14.2.5}
$$

其中 $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^{n-2}$, $R(0,\varepsilon) = \varepsilon$, $R_x(0,\varepsilon) = 0$. 选择满足条件 $l_2 = R_{xx}(0,0) \neq 0$ 的一般情形. 由于已经假设从 ε 的负值开始通过边界, 我们假设 $l_2 > 0$. 相应的稳定性边界 S_7 是危险的: 当 $\varepsilon \to -0$ 时, 另一个鞍点平衡态趋于 O_ε 且在 $\varepsilon = 0$ 与它合并. 当 $\varepsilon > 0$ $(R(x,\varepsilon) > 0)$ 时, 所得的鞍 - 结点 O^* 消失, 所有轨线从它发散, 见图 14.2.7.

(8) 这个情形类似于情形 1, 但是现在 $L_1(0) > 0$. 当 $\varepsilon \to -0$ 时鞍点周期轨线收缩到稳定点 O_ε. 通过 $\varepsilon = 0$ 平衡态变成鞍 - 焦点: 它产生二维不稳定不变流形 (即

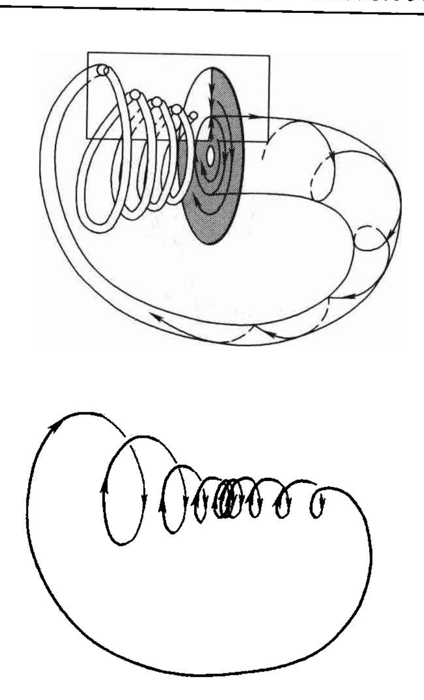


图 14.2.5 蓝天突变的示意图. 周期轨道 $L(\varepsilon)$ 在鞍 – 结点环附近的形状看上去像压缩的螺线.

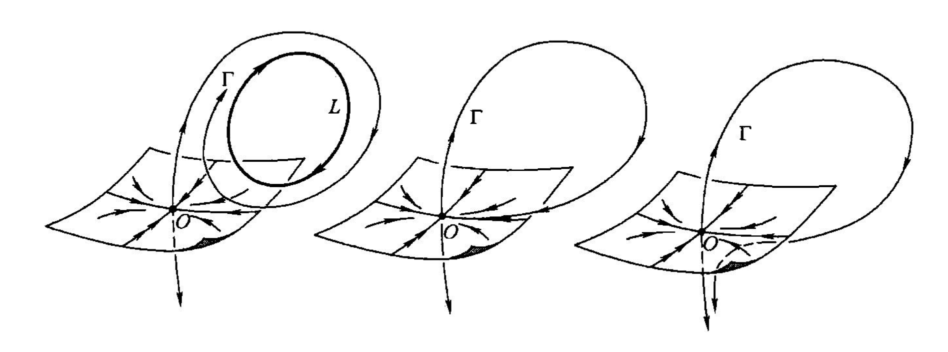


图 14.2.6 周期轨道分支出的鞍点同宿回路.

边界 S_8 是危险的).

(9) 这个情形与情形 2 相同, 但 $l_1 > 0$. 这时候出现不稳定性, 因为周期 2 鞍点周期轨线与稳定周期轨道合并. 当 $\varepsilon \geqslant 0$ 时, 后者变成鞍点, 因此它的不稳定流形同胚于 Möbius 带.

(10) 这个情形与情形 3 相同, 但 $L_1(0) > 0$. 当不稳定二维不变环面收缩到周期轨道时, 稳定周期轨道变成不稳定. 当 $\varepsilon \geqslant 0$ 时, 周期轨线的不稳定不变流形 W^u 是三维的.

(11) 设周期轨线 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的一个乘子在 $\varepsilon = 0$ 变成等于 1. 相应的 Poincaré 映射可

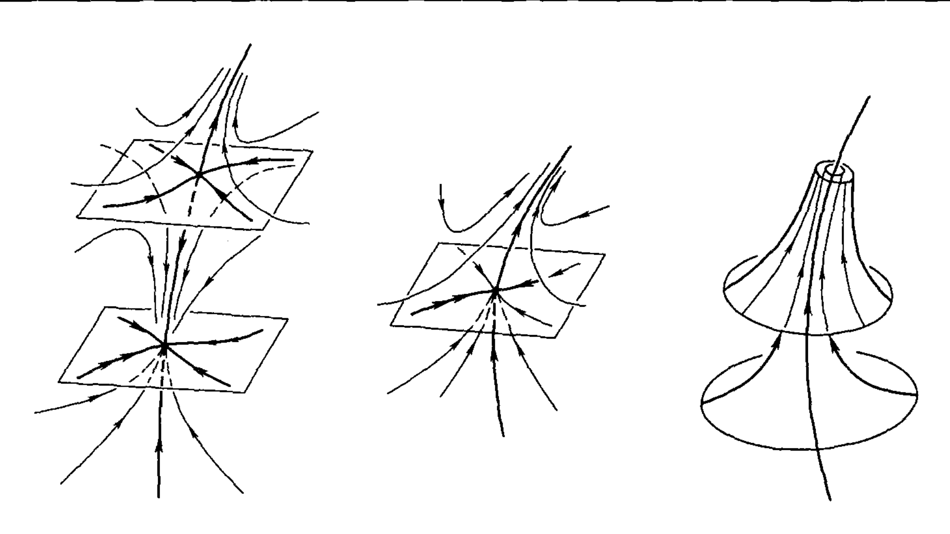


图 14.2.7　没有同宿的鞍 – 结点分支.

表示为下面的形式

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + R(x, \varepsilon), \\ \bar{y} &= (A(\varepsilon) + g(x, y, \varepsilon))y, \end{aligned} \tag{14.2.6}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^{n-2}$. 设 $l_2 = R_{xx}(0,0) > 0$. 则边界 S_{11} 具有危险特性, 因为当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 与鞍点周期轨线结合. 分支轨线 $\mathcal{L}^*$ 是鞍 – 结点型, 它有同胚于柱面 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+$ 的不稳定不变流形 W^u, 见图 14.2.8.

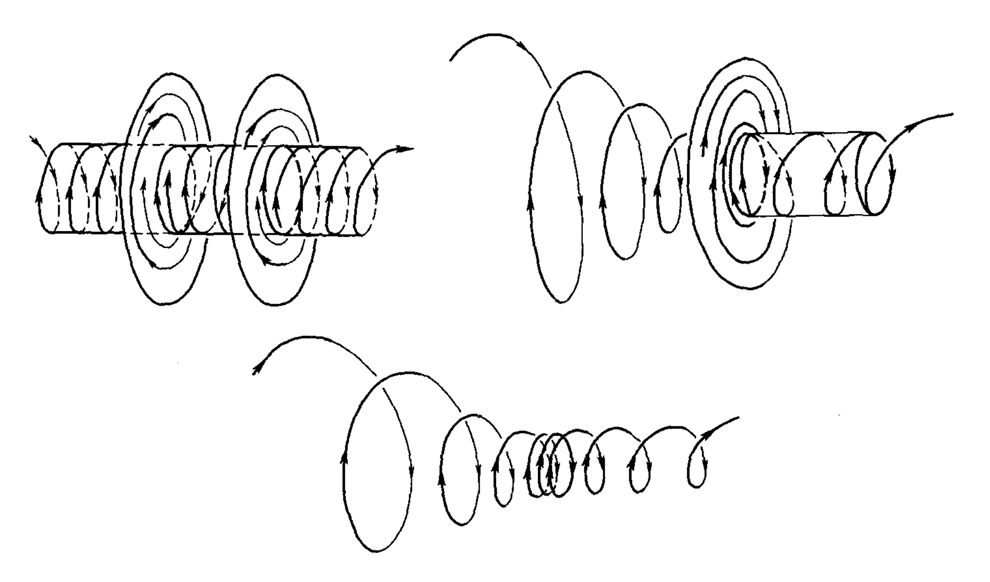


图 14.2.8　$\mathbb{R}^3$ 中周期轨道的鞍 – 结点 (折) 分支.

综上所述: 平衡态的主要稳定性边界集由三类曲面组成: S_1, S_7 和 S_8. 只有 S_1 – 类边界是安全的. 对周期轨道, 存在 9 类主要的稳定性边界: 它们中 S_6, S_9, S_{10}, S_{11} 是危险的, S_2, S_3, S_4, S_5 和 $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ 是安全的 (后面两个分别对应于亚临界 Andronov-Hopf 分支和翻转分支).

14.3 稳定性区域的动力确定和动力不确定边界

在这一节我们将试图回答下面的问题: 当穿过稳定性边界时哪里的点成为代表点? 或者, 换句话说, 什么是它的 Ω – 极限集?

当我们处理稳定性区域的主要安全边界时回答是显然的: 代表点趋于从软分支出现的新稳定机制. 当系统通过危险边界时情况则完全不同: 点脱离旧机制而离开. 此时局部分支理论不能直接回答上面的问题. 不过, 为了解决远离分支会发生什么情况, 我们引入稳定性边界的两个有用的子型 —— **动力确定的边界**和**动力不确定的边界**[137,26]. 我们首先考虑几个例子.

第一个例子由出现在耗散系统中最典型的分支之一阐明. 即附有鞍点同宿回路的稳定周期轨道 L_1. 以 Γ_1 和 Γ_2 记鞍点的不稳定分界线. 设 Γ_1 在分支点形成同宿回路. 用 $\Omega(\Gamma_2)$ 记第二条分界线的极限集. 在一般情形,$\Omega(\Gamma_2)$ 是一个吸引子. 例如, 稳定平衡态、稳定周期轨线, 或者稳定环面等. 由于分支以后代表点立刻沿着 Γ_2 紧跟 $\Omega(\Gamma_2)$, 这看上去像 $\Omega(\Gamma_2)$ 变成它的新吸引子.

第二个例子呈现稳定平衡态, 它与生成的鞍 – 结点的鞍点合并. 以 Γ 记当 $t \to +\infty$ 时离开鞍 – 结点的仅有的不稳定轨线, 它的极限集记为 $\Omega(\Gamma)$. 如果 $\Omega(\Gamma)$ 是个吸引子, 则当鞍 – 结点消失以后代表点将趋于它. 但是, 另一个情景也是有可能的. 就是说, 当 $t \to \pm\infty$ 时 Γ 趋于同一个鞍 – 结点. 于是我们有上面几节描述的情况: 从 $\bar{\Gamma}$ 分支出的稳定周期轨线变成代表点的新极限机制.

在两个分支平衡态的不稳定集都是一维的意义下, 两种情形有许多共同点. 如果临界平衡态的不稳定集是高维的, 则所得的图像可能完全不同. 图 14.3.1 就表明这个情况. 当不稳定环收缩到平衡态时, 我们面临进退两难的局面: 代表点可能跳到稳定结点 O_1 也可能到稳定结点 O_2. 因此这种危险边界必须分类为**动力不确定边界**.

考虑另一个假设的例子. 设二维微分同胚在 $\varepsilon = 0$ 有如图 14.3.2 的相图. 其中 O_2 和 O_3 是稳定不动点, O_1 是鞍点. 鞍 – 结点 O 的不稳定集 W_O^u 与鞍点的稳定流形 $W_{O_1}^s$ 横截相交. 当鞍 – 结点消失时, 存在代表点新机制选择的不确定性, 因为它可能收敛于 O_2 或者 O_3.

我们现在可以断言, 稳定性边界是**动力确定**的, 如果穿过边界时代表点的性态是**唯一确定**的. 这个情况出现在平衡态 (周期轨线) 的不稳定集 W^u 在临界参数值至多包含一个吸引子.

反之, 如果对代表点的新机制选择是不明确的, 则我们可以断言这样的边界是**动力不确定**的. 这种情况出现在如果至少有两个吸引子属于不稳定集的边界. 它也

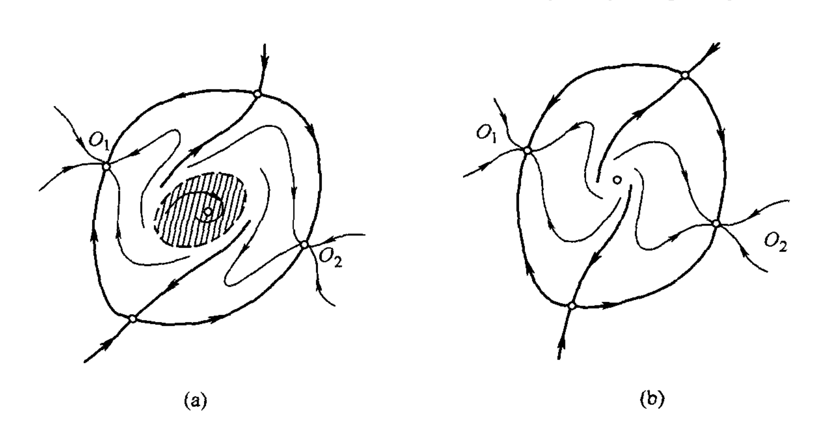


图 14.3.1　在原点的不稳定环消失时出现不确定性.

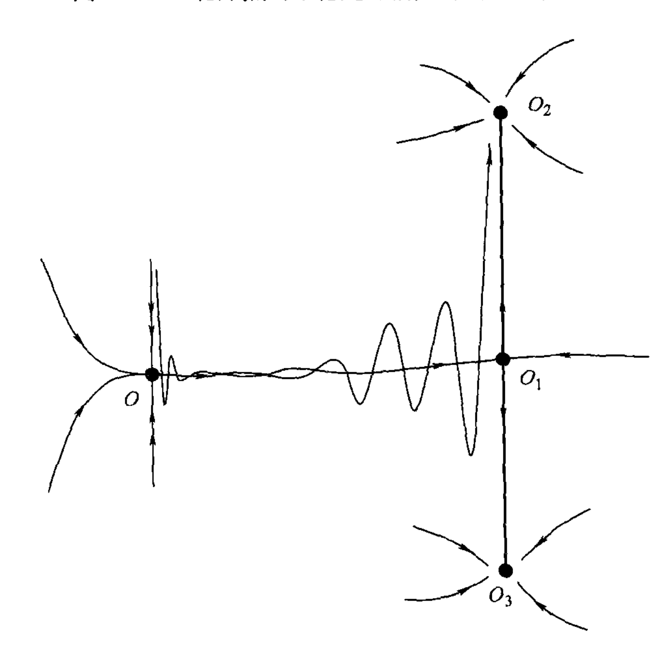


图 14.3.2　由于异宿摆动动力学不确定.

必须包含鞍点, 这些鞍点的不稳定不变流形将这些吸引子的吸引盆分开.

下面考虑对称系统一个典型的特殊情形. 例如考虑族

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3,$$

它关于 $x \to -x$ 是不变的. 容易看出, 稳定性边界 $\varepsilon = 0$ 对在原点的平衡态是安全的. 当 $\varepsilon > 0$, 原点失去稳定性, 其稳定性被两个新平衡点 $O_1(x = \sqrt{\varepsilon})$ 和 $O_2(x = -\sqrt{\varepsilon})$ 所继承. 因此, 按照上面说明的观点, $\varepsilon = 0$ 是动力不确定的安全边界.

更复杂的例子是类 - 摆方程

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \varepsilon),$$

其中 $f(x,\dot{x},\varepsilon)$ 是 x 的周期函数, 且 $f(x,\dot{x},\varepsilon) = -f(-x,-\dot{x},\varepsilon)$. 在这个例子中, 由通过 " 振动" 极限环的稳定性区域边界的转移得知, 出现两个张成柱面的稳定周期轨道, 它们分别对应于摆的两个相反方向的旋转. 这里, 当穿过边界时, 振动环与两个鞍点之间的异宿连合并, 如图 14.3.3 所示. 从下面的图像观察到这个边界是动力不确定的.

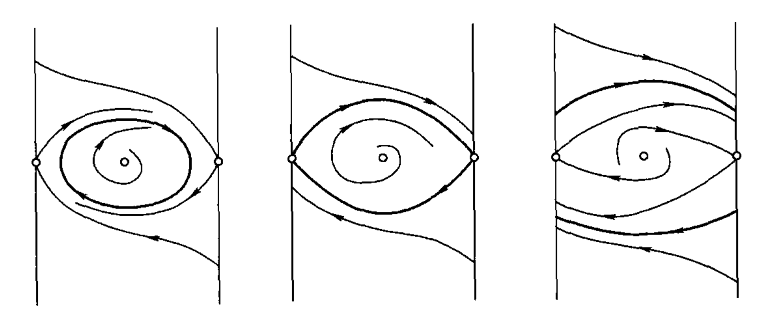


图 14.3.3 相柱面的发展. 任何一个对魔鬼轮有经验的人都清楚从顶点向下观察时的感觉. 经短暂时刻以后, 看上去你永远也不能够告诉我们轮子将怎样向下滚动、顺时针滚动, 还是逆时针滚动. A.L.S.(Andronov, Leontovich, Shilnikov) 曾经亲自做过, 因而对鞍点附近性态的定性理解有了引人注目的改进.

附录 C 例子、问题和练习

我们希望在这个附录里所叙述的例子对本书发展的"定性"理论提供某些教学说明和应用. 例子范围从现象学问题到应用问题. 由于只有非常稀少的非线性系统可以不用计算机进行分析, 因此如果必要我们将执行数值计算. 事实上, 我们在某些方面将避免在技巧上的详细计算而给出具有特性的叙述. 在这个附录的准备工作中我们用了两个软件包, 它们是 Content [182] 和 Dstool [164].

C.1 定性积分

C.1.# 1. 按照下面术语对图 1.3.1 , 图 1.3.2 和图 C.1.1 中的轨线进行分类: 非游荡、Poisson 稳定、周期以及同宿. 这些轨线的 α – 极限集和 ω – 极限集对应什么? □

C.1.# 2. 对 a 的不同参数值, 构造下面平面系统的相图

(a)
$$\dot{r} = r(a - r^2), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

(b)
$$\begin{cases} \dot{y} = x - (y^2 - 1)\left(\dfrac{x^2}{2} - y + \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{2}{3}\right), \\ \dot{x} = 1 - y^2 - x\left(\dfrac{x^2}{2} - y + \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{2}{3}\right). \end{cases}$$

(c)
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 1 - ax^2 + y(x - 2).$$

(d) van der Pol 方程:

$$\ddot{x} + a(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

(e) Duffing 方程:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x - x^3 = 0.$$

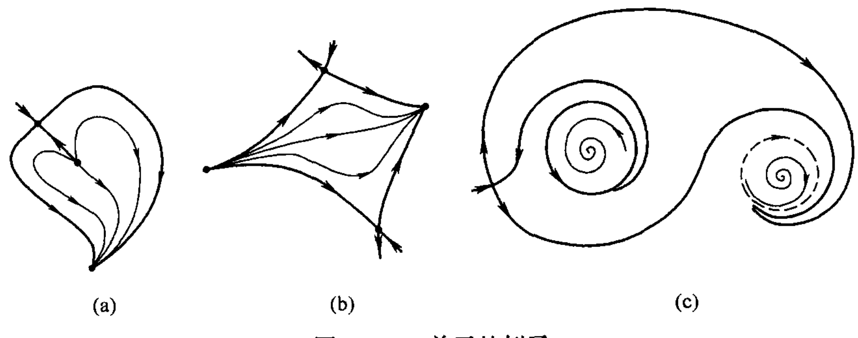
(f) Bogdanov-Takens 规范形:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + ay + x^2.$$

(g) Khorozov-Takens 规范形:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + ay + x^3.$$ □

C.1.# 3. 讨论图 C.1.1 中所示单元的相图. 这里的特殊轨线是什么? □



(a)　(b)　(c)

图 C.1.1　单元的例子.

C.2　粗平衡态和稳定性边界

C.2.1　Routh-Hurwitz 准则

我们在这里将叙述一个无需明显求解特征方程, 而允许我们确定平衡点的结构稳定性和它的拓扑类型的准则.

问题是问特征方程

$$\Xi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

有几个根位于虚轴的左边或右边, 以及有多少个根位于虚轴上. 零根个数容易确定: 当且仅当 $a_n = \cdots = a_{n-s+1} = 0$ 但 $a_{n-s} \neq 0$ 时方程有 s 个零根. 因此, 如果我们有代数重次 s 的零根, 我们就可用 λ^s 除特征方程而得特征方程的最后系数不为零, 下面假设就是这个情形. 下一步是构造下面的 Routh-Hurwitz 矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ \dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} & \dfrac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}a_3 - \dfrac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}a_1}{\dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}} & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{C.2.1}$$

让我们详细叙述上面矩阵构造的算法. 前面两行的元素分别是 $\Xi(\lambda)$ 中下标为偶数和奇数的系数. 第 k 行组成如下: 在第 j 列的元素 r_{kj} 是分数

$$r_{kj}=\frac{r_{k-1,1}r_{k-2,j+1}-r_{k-2,1}r_{k-1,j+1}}{r_{k-1,1}},$$

它的分子是上两行的第一列和第 $(j+1)$ 列所交的 (2×2) 矩阵的行列式的反号, 分母是上一行第一列的元素. 这个算法应用下去, 直到矩阵的总行数变成 $(n+1)$.

这样的矩阵构造仅当第一列所有元素不为零时才可能. 这是**正则情形**. 这里 $\Xi(\lambda)$ 的具正实部的根的个数 (包括重次) 等于第一列元素改变符号的次数 q. 多项式 $\Xi(\lambda)$ 在正则情形没有纯虚根. 因此, 对应的平衡态 O 在正则情形是结构稳定, 它的拓扑类型是 $(n-q,q)$.

可以验证 (C.2.1) 中的第一列可以通过 Routh-Hurwitz 矩阵 (2.1.10) 的主子式 Δ_i 表示如下:

$$a_0,\quad \Delta_1,\quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

特别地, 如果 $a_0>0$ 以及 $\Delta_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 Routh-Hurwitz 条件满足 (见 2.1 节).

在构造矩阵 (C.2.1) 时第一列某个元素 $r_{m+1,1}$ $(1\leqslant m\leqslant n)$ 可能为零. 在这种**非正则情形**下, 我们应该分别求第 $(m+1)$ 行的第一个非零元素 $r_{m+1,k+1}$ 以及第 m 行和 $(m+1)$ 行的最后一个非零元素 $r_{m,p}$ 和 $r_{m+1,s}$. 由下面的规则计算亏格数 S_{m+1}:

$$S_{m+1}=\begin{cases} k & \text{如果}\quad k\leqslant s-p,\\ s-p & \text{如果}\quad k>s-p\quad \text{且}\quad (-1)^{s-p}r_{m,p}r_{m+1,s}<0,\\ s-p+1 & \text{如果}\quad k>s-p\quad \text{且}\quad (-1)^{s-p}r_{m,p}r_{m+1,s}>0.\end{cases}$$

然后, 将第 $(m+1)$ 行向左移 k 个位置, 使得元素 $r_{m+1,k+1}$ 变成该行的第一个, 再将这一行的所有其它元素乘上 $(-1)^k$. 由于第一个元素现在不为零, 我们可以按正则情形进行. 本质上, $\Xi(\lambda)$ 的具正实部的根的个数等于第一列中改变符号的次数与所有非正则行亏格数的和.

还剩下的特殊情形是对某个 m, 矩阵第 $(m+1)$ 行的元素全部由零组成, 即对一切 j 有 $r_{m+1,j}=0$. 这是可能出现纯虚根的仅有情形. 如果遇到这种情况, 我们应该用由下面的数

$$(p-1)r_{m,1},\ (p-2)r_{m,2},\ (p-3)r_{m,3},\ \cdots,$$

组成的行代替第 $(m+1)$ 行, 其中 p 是第 m 行最后一个非零元素的序数, 然后如上进行. 在完成了构造 (如果有其它等于零的行也应该这样代替) 后, 我们就可计算第一列改变符号的数目加上亏格数之和 (如果某非正则行出现). 所得结果等于具正实部根的个数. 这里纯虚根的个数等于 $2(p-1-l)$, 其中 p 是第一个零元素前一行的

最后一个非零元素的序数, l 是第一列改变符号的次数加上在这行后计算的亏格数之和. 仅当 $p=l+1$ 时, 对应的平衡态是结构稳定的.

C.2.# 4. 确定平衡态的稳定性和拓扑类型. 它的特征方程是

$$\Xi(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2-8\lambda-20=0.$$

解　对应的 Rough-Hurwitz 矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -20 \\ 2 & -8 & \\ 5 & -20 & (p=2) \\ 5 & & (\text{零元素由}(p-1)r_{m,1}=5\text{代替}) \\ -20 & & \end{pmatrix}$$

这里第一列的符号改变一次, 即 $\Xi(\lambda)$ 有一个根在右半开平面. 我们计算纯虚根的个数: $2(p-1-l)=2(2-1-1)=0$. 因此, 平衡态 O 结构稳定, 它的拓扑类型是鞍点(3,1). □

C.2.2　3D 情形

考虑三维系统

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=a_1^{(1)}y_1+a_2^{(1)}y_2+a_3^{(1)}y_3+P_1(y_1,y_2,y_3),\\ \dot{y}_2&=a_1^{(2)}y_1+a_2^{(2)}y_2+a_3^{(2)}y_3+P_2(y_1,y_2,y_3),\\ \dot{y}_3&=a_1^{(3)}y_1+a_2^{(3)}y_2+a_3^{(3)}y_3+P_3(y_1,y_2,y_3).\end{aligned}\tag{C.2.2}$$

其中, 函数 P_i 不包含线性项. 系统 (C.2.2) 的特征方程是

$$\Xi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1^{(1)}-\lambda & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)}-\lambda & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)}-\lambda \end{vmatrix}=0.\tag{C.2.3}$$

方程 (C.2.3) 可以写成三次多项式的形式:

$$\lambda^3+p\lambda^2+q\lambda+r=0,\tag{C.2.4}$$

其中

$$p = -(a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}),$$

$$q = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}, \tag{C.2.5}$$

$$r = -\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

这里, Routh-Hurwitz 稳定性条件化为下面的关系

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0 \quad 和 \quad R \equiv pq - r > 0. \tag{C.2.6}$$

稳定性区域的边界是两个曲面 $(r = 0,\ p > 0,\ q > 0)$ 和 $(R = 0, p > 0, q > 0)$. 特征方程至少有一个零根在曲面 $r = 0$ 上, 一对纯虚根在曲面 $(R = 0,\ q > 0)$ 上.

C.2.# 5. 求证在分支曲面 $R = 0$ 上平衡态的特征指数是 $(-p, i\sqrt{q}\ , -i\sqrt{q})$. □

方程 (C.2.4) 的实根个数依赖于三次方程的判别式:

$$\Delta = -p^2q^2 + 4p^3r + 4q^3 - 18pqr + 27r^2 \tag{C.2.7}$$

的符号.

(1) 如果 $\Delta > 0$, 三次方程有一个实根以及两个共轭复根.

(2) 如果 $\Delta < 0$, 三次方程有三个相异实根.

(3) 当 $\Delta = 0$ 时, 又如果 $q = \frac{1}{3}p^2$ 且 $r = \frac{1}{27}p^3$, 方程有一个三重实根, 或者两个实根 (其中一个是二重根).

方程 $\Delta = 0$ 可求解如下:

$$r = \frac{1}{3}pq - \frac{2}{27}p^3 \pm \frac{2}{27}(p^2 - 3q)^{3/2}, \quad q \leqslant \frac{p^2}{3}.$$

因此, 特征方程的三个根都是实数, 当且仅当

$$q \leqslant \frac{p^2}{3} \quad 且 \quad r^-(p, q) \leqslant r \leqslant r^+(p, q), \tag{C.2.8}$$

这里我们记

$$r^{\pm} = \frac{1}{3}pq - \frac{2}{27}p^3 \pm \frac{2}{27}(p^2 - 3q)^{3/2}.$$

当平衡态是拓扑鞍点时, 可以用条件 (C.2.8) 区分它是简单鞍点还是鞍 – 焦点. 但是, 当平衡态是稳定或者完全不稳定时, 出现复特征根并不一定意味着它是焦点.

事实上, 如果最靠近虚轴的 (即主) 特征根是实数, 则稳定 (或完全不稳定) 平衡态是结点且与其它特征根是什么无关.

实根与复主特征根之间的边界由曲面 $\Delta = 0$ 对应于二重根的部分, 以及沿着三重根直线和曲面 $\Delta = 0$ 相连接的曲面

$$r = \frac{p}{3}\left(q - \frac{2p^2}{9}\right), \quad q \geqslant \frac{p^2}{3} \tag{C.2.9}$$

组成. 这个曲面对应于一对共轭复根的存在性, 其实部等于第三个根. 当我们向 $|r|$ 减少的方向穿过这个曲面时, 这对复根离开虚轴比实根更远, 因此平衡态变成结点. 当穿向这个曲面的另外一侧时, 这对共轭复根比实根更接近于虚轴, 故平衡态变成焦点.

当研究同宿分支时, 鞍点平衡点的一个重要特征是**鞍点量** σ 的符号, 它由左右两边最接近于虚轴的两个主特征指数的实部之和定义.

在鞍点情形, 当两个主特征指数 $\lambda_{1,2}$ 是实数时, 条件 $\sigma = 0$ 就是共振关系 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. 借助于三次特征方程的系数, 这个条件化为

$$R \equiv pq - r = 0, \quad -p^2 < q < 0. \tag{C.2.10}$$

当 $q > 0$ 时, 曲面 $R = 0$ 对应于 Andronov-Hopf 分支, 而这个曲面的 $q < -p^2$ 部分对应于一个主特征指数与一个具相反符号的非主特征指数之和为零.

在三维系统的鞍 - 焦点情形, 条件 $\sigma = 0$ 化为 $\lambda_1 + \mathrm{Re}\,\lambda_2 = 0$, 其中 λ_1 是实根, $\lambda_{2,3}$ 是一对共轭复根. 这可写为

$$r = -p(q + 2p^2), \quad -p^2 < q. \tag{C.2.11}$$

当朝 r 增加方向穿过这个曲面时, 鞍点量变成正的.

三维系统鞍点平衡态的另一个重要特征是, 在此平衡态处向量场的**散度**等于特征根的和, 即 $-p$.

综上所述, 我们可以把 $\mathbb{R}^3$ 中的粗平衡态分类如下:

(1) 情形 $p > 0$　(div < 0) (见表 C.1).

(2) 情形 $p < 0$　(div > 0) (见表 C.2).

(3) 情形 $p = 0$　(div $= 0$) (见表 C.3).

C.2.# 6. 对固定的 p, 在 (q, r) - 平面上画出对应的分支图. □

现在考虑下面几个例子. 我们将集中考虑 Lorenz 方程、Chua 电路、Shimizu-

表 C.1

参数区域	平衡点类型	σ	特征值 $\lambda_i,\ i=1,2,3$
$0<r<\begin{cases} r^+(p,q) & 对\ 0<q\leqslant \frac{p^2}{3} \\ \frac{p}{3}\left(q-\frac{2p^2}{9}\right) & 对\ q\geqslant \frac{p^2}{3} \end{cases}$	稳定结点 $\dim W^s=3$ $\dim W^u=0$	—	$0>\lambda_1>\operatorname{Re}\lambda_i$ $(i=2,3)$
$pq>r>\begin{cases} r^+(p,q) & 对\ 0<q\leqslant \frac{p^2}{3} \\ \frac{p}{3}\left(q-\frac{2p^2}{9}\right) & 对\ q\geqslant \frac{p^2}{3} \end{cases}$	稳定焦点 $\dim W^s=3$ $\dim W^u=0$	—	$0>\operatorname{Re}\lambda_{1,2}>\lambda_3$
$r>\begin{cases} r^+(p,q) & 对\ q\leqslant 0 \\ pq & 对\ q\geqslant 0 \end{cases}$	鞍 – 焦点 (1,2)	$\sigma<0$	$\operatorname{Re}\lambda_{2,3}>0>\lambda_1$
$0<r<r^+(p,q),\ q<0$	鞍点 $\dim W^s=1$ $\dim W^u=2$	$\sigma<0$	$\lambda_1<0<\lambda_2<\lambda_3$
$0>r>\begin{cases} r^-(p,q) & 对\ q\leqslant -p^2 \\ pq & 对\ -p^2\leqslant q<0 \end{cases}$	鞍点 $\dim W^s=2$ $\dim W^u=1$	$\sigma>0$	$\lambda_1>0>\lambda_2>\lambda_3$
$r^-(p,q)<r<\begin{cases} pq & 对\ -p^2<q\leqslant 0 \\ 0 & 对\ 0\leqslant q<\frac{p^2}{4} \end{cases}$	鞍点 $\dim W^s=2$ $\dim W^u=1$	$\sigma<0$	$\lambda_1>0>\lambda_2>\lambda_3$
$-p(q+2p^2)<r<\begin{cases} r^-(p,q) & 对\ -p^2<q\leqslant \frac{p^2}{4} \\ 0 & 对\ q\geqslant \frac{p^2}{4} \end{cases}$	鞍 – 焦点 (2,1)	$\sigma<0$	$\lambda_1>0>\operatorname{Re}\lambda_{2,3}$
$r<\begin{cases} r^-(p,q) & 对\ q\leqslant -p^2 \\ -p(q+2p^2) & 对\ q\geqslant -p^2 \end{cases}$	鞍 – 焦点 (2,1)	$\sigma>0$	$\lambda_1>0>\operatorname{Re}\lambda_{2,3}$

Morioka 模型以及其它方程.

Chua 电路 [179] 是

$$\begin{aligned} \dot{x}&=a(y-f(x)),\\ \dot{y}&=x-y+z,\\ \dot{z}&=-by, \end{aligned} \tag{C.2.12}$$

其中三次非线性函数是 $f(x)=-\dfrac{x}{6}+\dfrac{x^3}{6}$. 这里, a 和 b 是某正参数. 系统 (C.2.12) 在

表 C.2

参数区域	平衡点类型	σ	特征值 $\lambda_i,\ i=1,2,3$
$0>r>\begin{cases} r^-(p,q) & 对\ 0<q\leqslant \dfrac{p^2}{3} \\ \dfrac{p}{3}\left(q-\dfrac{2p^2}{9}\right) & 对\ q\geqslant \dfrac{p^2}{3}\end{cases}$	排斥结点 $\dim W^s=0$ $\dim W^u=3$	—	$0<\lambda_1<\operatorname{Re}\lambda_i$ $(i=2,3)$
$pq<r<\begin{cases} r^-(p,q) & 对\ 0<q\leqslant \dfrac{p^2}{3} \\ \dfrac{p}{3}\left(q-\dfrac{2p^2}{9}\right) & 对\ q\geqslant \dfrac{p^2}{3}\end{cases}$	排斥焦点 $\dim W^s=0$ $\dim W^u=3$	—	$0<\operatorname{Re}\ \lambda_{1,2}<\lambda_3$
$r<\begin{cases} r^-(p,q) & 对\ q\leqslant 0 \\ pq & 对\ q\geqslant 0\end{cases}$	鞍 - 焦点 (2,1)	$\sigma>0$	$\operatorname{Re}\ \lambda_{2,3}<0<\lambda_1$
$0>r>r^-(p,q),\ q<0$	鞍点 $\dim W^s=2$ $\dim W^u=1$	$\sigma>0$	$\lambda_1>0>\lambda_2>\lambda_3$
$0<r<\begin{cases} r^+(p,q) & 对\ q\leqslant -p^2 \\ pq & 对\ -p^2\leqslant q<0\end{cases}$	鞍点 $\dim W^s=1$ $\dim W^u=2$	$\sigma<0$	$\lambda_1<0<\lambda_2<\lambda_3$
$r^+(p,q)>r>\begin{cases} pq & 对\ -p^2<q\leqslant 0 \\ 0 & 对\ 0\leqslant q<\dfrac{p^2}{4}\end{cases}$	鞍点 $\dim W^s=1$ $\dim W^u=2$	$\sigma>0$	$\lambda_1<0<\lambda_2<\lambda_3$
$-p(q+2p^2)>r>\begin{cases} r^+(p,q) & 在\ q\in\left(-p^2,\dfrac{p^2}{4}\right) \\ 0 & 在\ q\geqslant \dfrac{p^2}{4}\end{cases}$	鞍 - 焦点 (1,2)	$\sigma>0$	$\lambda_1<0<\operatorname{Re}\ \lambda_{2,3}$
$r>\begin{cases} r^+(p,q) & 对\ q\leqslant -p^2 \\ -p(q+2p^2) & 对\ q\geqslant -p^2\end{cases}$	鞍 - 焦点 (1,2)	$\sigma<0$	$\lambda_1<0<\operatorname{Re}\ \lambda_{2,3}$

变换 $(x,y,z)\longleftrightarrow(-x,-y,-z)$ 下不变.

我们通过求解下面方程组

$$0=a\left(y+\frac{x}{6}-\frac{x^3}{6}\right),$$

$$0=x-y+z,$$

$$0=-by$$

来找 (C.2.12) 中的平衡态. 从这些平衡点方程, 我们得 $y=0, x=-z$ 和 $x(1-x^2)=0$.

表 C.3

参数区域	平衡点类型	特征值 $\lambda_i,\ i=1,2,3$	W^s 和 W^u 的维数
$0<r<\frac{2}{9}\sqrt{3}\lvert q\rvert^{\frac{3}{2}},\ q<0$	鞍点	$\lambda_1<0<\lambda_2<\lambda_3$	$\dim W^s=1$ $\dim W^u=2$
$r>\begin{cases}\frac{2}{9}\sqrt{3}\lvert q\rvert^{\frac{3}{2}} & 对\ q\leqslant 0\\ 0 & 对\ q\geqslant 0\end{cases}$	鞍 - 焦点 (1,2)	$\lambda_1<0<\mathrm{Re}\,\lambda_{2,3}$	$\dim W^s=1$ $\dim W^u=2$
$r<\begin{cases}-\frac{2}{9}\sqrt{3}\lvert q\rvert^{\frac{3}{2}} & 对\ q\leqslant 0\\ 0 & 对\ q\geqslant 0\end{cases}$	鞍 - 焦点 (2,1)	$\mathrm{Re}\,\lambda_{2,3}<0<\lambda_1$	$\dim W^s=2$ $\dim W^u=1$
$0>r>-\frac{2}{9}\sqrt{3}\lvert q\rvert^{\frac{3}{2}},\ q<0$	鞍点	$\lambda_1>0>\lambda_2>\lambda_3$	$\dim W^s=2$ $\dim W^u=1$

因此始终存在三个平衡点 $O(0,0,0)$ 和 $O_{1,2}(\pm 1,0,\mp 1)$. 在原点的 Jacobi 矩阵是

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{6} & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

在 $O(0,0,0)$ 的特征方程是

$$\det\begin{pmatrix} \frac{a}{6}-\lambda & a & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & -b & -\lambda \end{pmatrix}=0,$$

或

$$\lambda^3+\left(1-\frac{a}{6}\right)\lambda^2+\left(b-\frac{7a}{6}\right)\lambda-\frac{ab}{6}=0. \tag{C.2.13}$$

我们可以看到由于常数项是负的, 由 Routh-Hurwitz 准则立刻得知原点是不稳定平衡态. 此外, 当 a 和 b 是正数时可能没有零特征根. 余维 2 点 $(a=b=0)$ 需要特殊考虑. 我们对它的分析推迟到下一节, 在那里讨论具有对称性的系统的双零分支.

条件 $R\equiv pq-r=0$ 现在是

$$b=\frac{7a}{6}-\frac{7a^2}{36}.$$

在 $R=0$ 我们有 $q=-7a^2/36<0$. 这意味着在原点不可能有一对纯虚特征值. 因此, 当 $(a,b)\neq 0$ 时它永远是结构稳定. 按照上面的分类表, 它的拓扑类型是具有二维稳定流形和一维不稳定流形的鞍点.

C.2.# 7. 在 (a,b) – 参数平面上, 求转移边界: 原点从鞍点 → 鞍 – 焦点, 以及它的线性稳定和线性不稳定子空间的方程. 在参数平面内探求与在原点的平衡态的鞍点量为零对应的曲线. 求在何处向量场在鞍 – 焦点的散度等于零. 在 (a,b) – 平面内画出找到的曲线. □

接下来我们确定非平凡平衡点 $O_{1,2}(\pm 1, 0, \mp 1)$ 的稳定性. 首先我们在 O_1 或 O_2 线性化系统. 相应的 Jacobi 矩阵是

$$\begin{pmatrix} -\frac{a}{3} & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

特征多项式是

$$\lambda^3 + (1+\frac{a}{3})\lambda^2 + (b - \frac{2a}{3})\lambda + \frac{ab}{3} = 0. \tag{C.2.14}$$

如同 O, 当 $ab \neq 0$ 时平衡点 $O_{1,2}$ 不可能有零特征指数. 条件 $R=0$ 这时为

$$b = \frac{2}{9}a(3+a).$$

这个分支边界画在图 C.2.1 中. 对应的 q 的表达式是 $q = 2a^2/9 > 0$. 因此, 在 $R=0$, 平衡点 $O_{1,2}$ 有一对纯虚特征指数, 即

$$\lambda_{1,2} = \pm i\frac{a\sqrt{2}}{3} \quad 和 \quad \lambda_3 = -(1+\frac{a}{3}).$$

这对应于 Andronov-Hopf 分支. 当 $R>0$ 时平衡点 $O_{1,2}$ 是稳定焦点, 当 $R<0$ 时它们是鞍 – 焦点 (1,2). $O_{1,2}$ 在临界情形的稳定性依赖于对应的 Andronov-Hopf 分支是亚临界还是超临界 (见 9.3 节和 11.5 节), 即点 $O_{1,2}$ 是稳定弱焦点还是不稳定弱焦点. 为了找出这里出现什么, 我们还需要确定第一个 Lyapunov 量 L_1 的符号. 当 $L_1 < 0$ 时, $O_{1,2}$ 是稳定, $L_1 > 0$ 时它们不稳定. 如果 Lyapunov 量在 Andronov-Hopf 分支曲线上为零, 则必须计算下一个 Lyapunov 量 L_2 的符号, 等等.

考虑 Lorenz 方程 [87]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{C.2.15}$$

其中 σ, r 和 b 是正参数. 此外, 我们将假设 $\sigma > b+1$. 注意这个方程在对合 $(x,y,z) \leftrightarrow (-x,-y,z)$ 下不变.

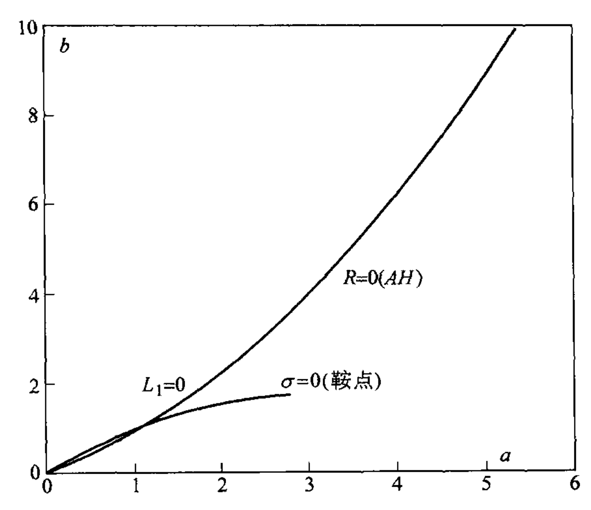


图 C.2.1 Chua 电路的 (a, b) – 分支图的一部分. AH 表示 Andronov-Hopf 分支曲线, $\sigma = 0$ 对应于原点是鞍点时的鞍点量为零.

通过解下面方程组

$$0 = -\sigma(x - y),$$
$$0 = rx - y - xz,$$
$$0 = -bz + xy,$$

求这个系统的平衡态. 得到 $x = y$, $x(r - 1 - z) = 0$ 和 $bz = x^2$. 将最后一个方程代入第二个中, 得到平衡点的坐标方程

$$x(b(r - 1) - x^2) = 0. \tag{C.2.16}$$

可以看出, Lorenz 方程总有一个在原点 O 的平衡态. 当 $r > 1$ 时除了 O 以外还有两个平衡态 $O_{1,2}(x_{1,2} = y_{1,2} = \pm b^{1/2}(r - 1)^{1/2}, z_{1,2} = r - 1)$.

在原点的 Jacobi 矩阵是

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

特征方程

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

有三个实根:

$$\lambda_1 = -b \quad 和 \quad \lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2}.$$

因此, 当 $r<1$ 时, 原点是稳定平衡态. 当 $r=1$ 时, 平衡态有一个零特征根. 当 $r>1$ 时, 原点变成具有一维不稳定流形的鞍点, 它的稳定性由稳定平衡点 $O_{1,2}$ 继承.

不稳定流形 W^u_O 是由鞍点自己和两条 $t \to +\infty$ 时来自 O 的轨线 $\Gamma_{1,2}$ 所组成. 稳定流形 W^s_O 是二维的. W^s_O 中的主稳定方向由对应于最小负特征根的特征向量给出. 在我们的情况, 它是 $\lambda_1=-b$, 对应的特征向量是 $(0,0,1)$. 注意, 在 W^s_O 中存在不变直线 $x=y=0$.

C.2.# 8. 求在原点的 $\mathcal{E}^u_O$ 和 $\mathcal{E}^{ss}_O$ 的方程. □

我们对 $O_{1,2}$ 作稳定性分析. 可以选择一个, 譬如 O_1. 在 O_1 的 Jacobi 矩阵是

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z_1 & -1 & -x_1 \\ x_1 & y_1 & -b \end{pmatrix}.$$

对应的特征方程为

$$\lambda^3 + (\sigma+b+1)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0.$$

平衡点 $O_{1,2}$ 的稳定性边界是由条件

$$R \equiv b(\sigma+r)(\sigma+b+1) - 2b\sigma(r-1) = 0 \tag{C.2.17}$$

确定. 因此, 只要 $\sigma > b+1$, 当

$$1 < r < \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma+b-1}$$

时平衡态 $O_{1,2}$ 稳定. 当 $R \leqslant 0$ 时它们变成鞍 – 焦点 (1,2). 这发生在图 C.2.2 中 (r,σ) – 参数平面上 Andronov-Hopf 分支曲线 AH 的右边.

在临界时刻 $R=0$ 分支平衡点 $O_{1,2}$ 的稳定性由第一个 Lyapunov 量 L_1 确定. 我们将在 C.5 节推导它的解析表达式.

C.2.# 9. 在图 C.2.3 中求 (r,a) – 参数平面内的点, 使得不对称 Lorenz 模型 [189]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10(x-y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz + a, \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy \end{aligned} \tag{C.2.18}$$

的平衡态有一对零特征值. □

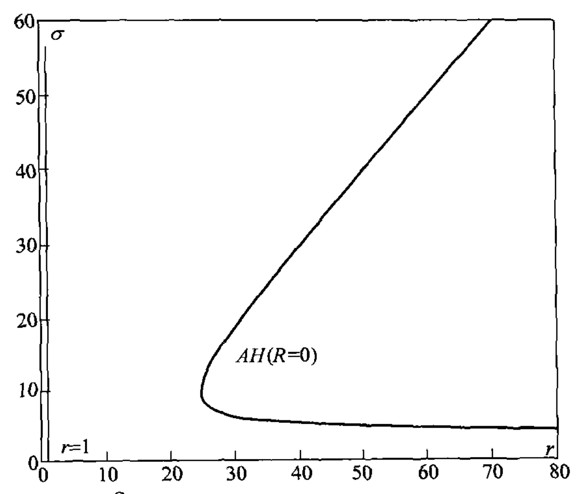


图 C.2.2　Lorenz 模型中 $b=\dfrac{8}{3}$, 在 (r,σ) – 平面内的 Andronov-Hopf 分支曲线 AH 和叉分支曲线 $r=1$.

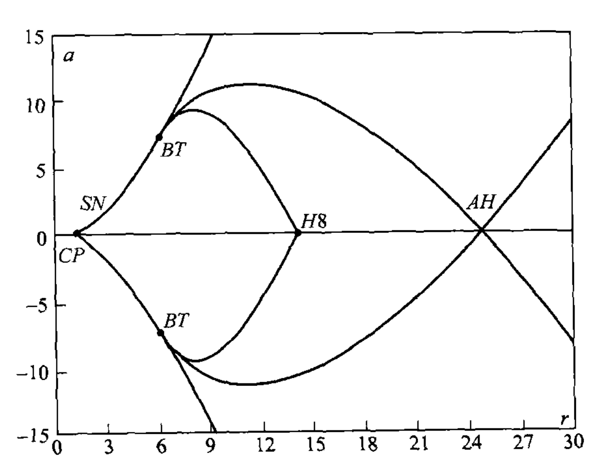


图 C.2.3　不对称 Lorenz 模型的部分分支图. 点 CP 是尖点. 在 BT 系统有具有两个零特征指数的二重退化平衡态 (见 13.2 节).

接下来我们考虑大气物理中下面的三阶系统 [128] 和 [183]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y^2-z^2-ax+aF,\\ \dot{y}&=xy-bxz-y+G,\\ \dot{z}&=bxy+xz-z,\end{aligned}\tag{C.2.19}$$

其中 (a,b,F,G) 是正参数. 为了求它的平衡态 (x_0,y_0,z_0), 我们令 (C.2.19) 的右端等

于零:

$$0 = -y_0^2 - z_0^2 - ax_0 + aF,$$
$$0 = x_0y_0 - bx_0z_0 - y_0 + G, \tag{C.2.20}$$
$$0 = bx_0y_0 + x_0z_0 - z_0.$$

从第二个和第三个方程, 我们得到

$$y_0 = \frac{G(1-x_0)}{1-2x_0+(1+b^2)x_0^2},$$
$$z_0 = \frac{bGx_0}{1-2x_0+(1+b^2)x_0^2}. \tag{C.2.21}$$

将 (C.2.21) 代入 (C.2.20) 中的第一个方程, 得到

$$(1+b^2)x_0^3 - [2+(1+b^2)F]x_0^2 + (1+2F)x_0 + \left(\frac{G^2}{a} - F\right) = 0. \tag{C.2.22}$$

接下来, 引入新参数

$$B = \frac{1}{1+b^2}, \quad G' = \frac{G^2}{a} - \frac{F}{1+b^2},$$

并作变换

$$x_0 = \overline{x} + \frac{2B+F}{3}.$$

于是 (C.2.22) 变换成三次方程标准形

$$\overline{x}^3 + s\overline{x} + t = 0, \tag{C.2.23}$$

其中

$$t = B(1+2F) - \frac{(2B+F)^2}{3},$$
$$s = \frac{B(1+2F)(2B+F)}{3} + G' - \frac{2(2B+F)^3}{27}.$$

方程 (C.2.23) 的判别式为

$$\Delta = \frac{t^2}{4} + \frac{s^3}{27}.$$

由条件 $\Delta = 0$ 确定的对应分支曲线画在图 C.2.4 中. 它将参数平面 (F, G) 划分成几个区域, 其中(C.2.19) 有一个或者三个平衡态 (图 C.2.4 中楔的内部). 三个平衡态重合的尖点的确切位置由 s 和 t 同时为零确定 (这点记为 CP). 这出现在

$$G = \frac{2\sqrt{12}b\sqrt{ab}}{3(1+b^2)}, \quad F = \frac{1+\sqrt{3}b}{1+b^2}.$$

C.2.# 10. 求证这个系统在

$$F^* = \frac{3a^2 + 3a^2b^2 + 12ab^2 + 12b^2 + 4a}{4(a + ab^2 + 2b^2)},$$

$$G^* = \frac{\sqrt{a}(a^2 + a^2b^2 + 4ab^2 + 4b^2)}{4\sqrt{a + ab^2 + 2b^2}}$$

的平衡态其特征指数为 $(0, \pm i\omega)$ (Gavrilov-Guckenheimer 分支).

提示: 利用在这个分支点 Jacobi 矩阵的迹和行列式必须同时为零的事实. □

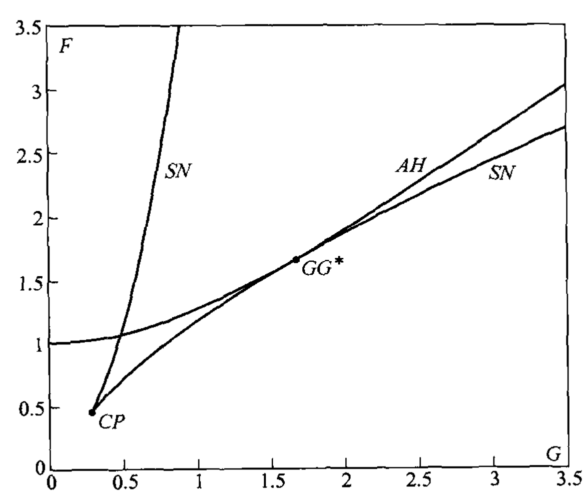


图 C.2.4　对 $a = 1/4$ 和 $b = 4$, 从线性稳定性分析得到的 (F, G) – 分支图的片段.

C.2.# 11. 对下面系统进行线性稳定性分析

$$\dot{r} = r(\mu_1 + az + z^2),$$

$$\dot{z} = \mu_2 + z^2 + br^2,$$

$$\dot{\varphi} = \omega + cz,$$

其中 r, φ 和 z 是柱面坐标, $\mu_{1,2}$ 是控制参数, a, b, c 假设为 ± 1. 这是 Gavrilov-Guckenheimer 分支的截段规范形. □

C.2.# 12. 求坐标和时间变换, 它将 Lorenz 系统 (C.2.15) 化为下面的形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - xz - ay + Bx^3, \\ \dot{z} &= -b'(z - x^2). \end{aligned} \tag{C.2.24}$$

提示: 两个系统参数之间的对应关系是

$$b' = \frac{b}{\sqrt{\sigma(r-1)}}, \quad a = \frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma(r-1)}}, \quad B = \frac{b}{2b - \sigma}.$$ □

系统 (C.2.24) 是出现在对称系统的平衡点和周期轨道的局部余维 3 分支的研究 [129] 中的渐近规范形 (见 C.4 节). 当 $B=0$ 时系统 (C.2.24) 是 Shimizu-Morioka 模型 [127], [191]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - xz - ay, \\ \dot{z} &= -bz + x^2. \end{aligned} \tag{C.2.25}$$

它可看作为 Lorenz 方程对大 Raleigh 数 r 的近似. 它也可以以稍微不同的形式从描述每周一次非线性有限高而细的非线性滚动磁发电机传送 [187] 的 PDE 中导出.

Shimizu-Morioka 模型当 $b>0$ 时有三个平衡点. 原点 $O(0,0,0)$ 是鞍点 (2,1), 特征指数是

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a}{2} \pm \left(\frac{a^2}{4}+1\right)^{1/2}, \quad \lambda_3 = -b.$$

当 $\lambda_2=\lambda_3$ 时 $\mathcal{E}^s$ 中的主方向的改变发生在曲线 $a=\dfrac{b^2-1}{b}$ 上. 鞍点量 $\sigma=\lambda_1+\lambda_3$ 在曲线 $a=\dfrac{1-b^2}{b}$ 上为零.

C.2.# 13. 写出在原点的鞍点的特征空间 $\mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u, \mathcal{E}^{sL}$ 的方程. □

Shimizu-Morioka 模型的非平凡平衡点 $O_{1,2}(\pm\sqrt{b},0,1)$ 的特征方程是

$$\lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + ab\lambda + 2b = 0.$$

图 C.2.5 中的 Andronov-Hopf 分支曲线 AH 由 $(a+b)a-2=0$ 给出. 在 $O_{1,2}$ 的特征指数是

$$\lambda_3 = -2/a, \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2-a^2}.$$

在曲线 AH 的上方, 平衡点 $O_{1,2}$ 是稳定焦点. 在曲线的下方, 它们是鞍 - 焦点 (1,2).

Rössler 系统 [172,188]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= bx - cz + xz \end{aligned}$$

的平衡态是 $O(0,0,0)$ 和 $O_1(c-ab, b-c/a, c/a-b)$. 在 O 的特征方程是

$$\lambda^3 + (c-a)\lambda^2 + (1+b-ac)\lambda + (c-ab) = 0.$$

当

$$a = \frac{(1+c^2)+\sqrt{(1+c^2)^2-4bc^2}}{2c}, \quad \sqrt{c^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} < b < \frac{(1+c^2)^2}{4c^2}$$

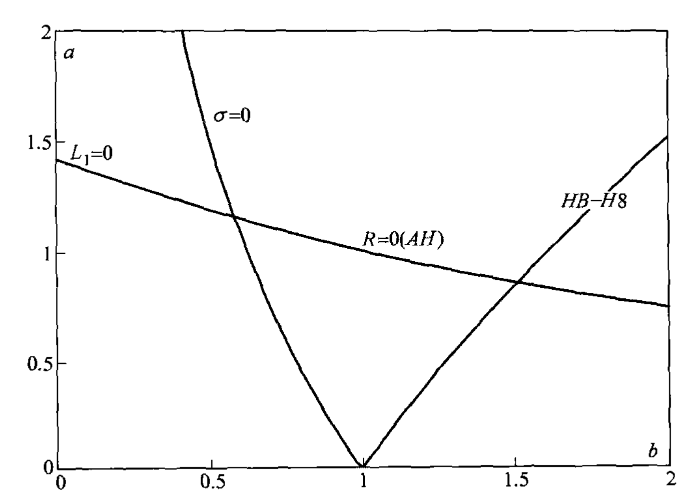


图 C.2.5 从 Shimizu-Morioka 系统的线性稳定性分析得到的 (a, b) – 分支图. AH 表示 Andronov-Hopf 分支曲线, $\sigma = 0$ 对应于零鞍点量, $HB - H8$ 对应于在原点的主方向的改变.

或者

$$a = \frac{(1+c^2) - \sqrt{(1+c^2)^2 - 4bc^2}}{2c}, \quad b < \begin{cases} \sqrt{c^2 + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2} & \text{对 } c \geqslant \sqrt{2+\sqrt{5}} \\ \dfrac{(1+c^2)^2}{4c^2} & \text{对 } c \leqslant \sqrt{2+\sqrt{5}} \end{cases}$$

时有根 $(i\omega, -i\omega, \lambda)$. 这个平衡态在 $a = \dfrac{c}{b}$ 有零特征根.

在 O_1 的特征方程有形式

$$\lambda^3 + a(b-1)\lambda^2 + \left(1 + \frac{c}{a} - a^2 b\right)\lambda + (ab - c) = 0.$$

它在曲线

$$c = \frac{a}{b} + (b-1)a^3, \quad a^2 < 1 + \frac{1}{b}$$

上有一对纯虚根. 此外, 这个平衡态在 $a = \dfrac{c}{b}$ 可有单个零根. 因此当 $ab = c$ 时平衡态 O_1 和 O_2 重合. 这个退化点的其它两个特征指数是

$$\lambda_{1,2} = \frac{a(1-b) \pm \sqrt{a^2(b+1)^2 - 4(b+1)}}{2}.$$

因此, 当

$$b = 1, \quad 0 < a < \sqrt{2}$$

时特征指数 $\lambda_{1,2}$ 变成纯虚数.

值得注意的是, Rössler 系统和新 Lorenz 系统 (C.2.19) 都具有特征指数为 $(0, \pm i\omega)$ 的二重退化平衡态. 这个分支的特征是开折可以包含环面分支曲线, 以及对应于鞍 – 焦点同宿回路的曲线, 因此在分支平衡点的邻域内即刻可呈现非平凡动力学.

C.2.# 14. 研究神经活动的 Hindmarsh-Rose 模型

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - z - x^3 + 3x^2 + I,\\ \dot{y} &= -y - 2 - 5x^2,\\ \dot{z} &= \varepsilon(2(x + 1.6) - z)\end{aligned} \tag{C.2.26}$$

的平衡点 [177], 其中 I 和 ε 是两个控制参数. 从 $\varepsilon = 0$ 开始研究 (见图 C.2.6).

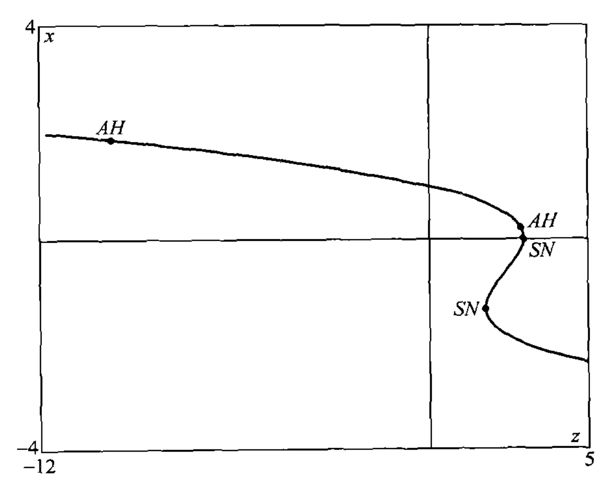


图 C.2.6 快平面系统中在 $I = 5$ 和 $\varepsilon = 0$ 的平衡态的 x 坐标和 z 坐标. AH 和 SN 分别表示平衡点的 Andronov-Hopf 分支和鞍 - 结点分支.

C.2.# 15. 对下面两个系统进行线性稳定性分析, 在 Jacobi 矩阵有完全 Jordan 块的情形下描述具有三个零特征指数的平衡态分支 [162,163]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, & \dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= z, & \dot{y} &= z,\\ \dot{z} &= ax - x^2 - by - z, & \dot{z} &= ax - x^3 - by - z.\end{aligned} \tag{C.2.27}$$

问三次项如何改变系统的对称性质? □

C.2.# 16. Lorenz 方程和 Shimizu-Morioka 模型下面的 "维数" 扰动由以下的增广系统给出

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), & \dot{x} &= y, & \dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= rx - y - xz, & \dot{y} &= -ay + x - xz, & \dot{y} &= -ay + x - xz,\\ \dot{w} &= z, & \dot{z} &= -bz + \mu w + x^2, & \dot{z} &= w,\\ \dot{z} &= -bw - az + xy, & \dot{w} &= -bw - \mu z, & \dot{w} &= -bw - \mu z + x^2 + cz^2.\end{aligned}$$

求这些系统的平衡态并确定它们的类型. □

C.2.# 17. 图 C.2.7 中显示的平衡态的 W^s 和 W^u 的最小维数是什么?

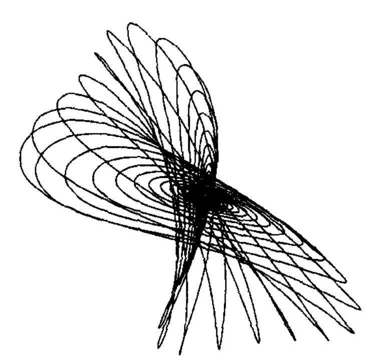


图 C.2.7 鞍 - 焦点 (2,2) 同宿轨线. □

C.3 周期强迫系统

考虑 n 维系统

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{C.3.1}$$

其中 $f(t)$ 是周期为 2π 的连续周期函数.

C.3.# 18. 构造将平面 $(x, y, t = 0)$ 映到平面 $(x, y, t = \tau = 2\pi)$ 的 Poincaré 映射.

解 按照 Lagrange 常数变易法, (C.3.1) 的解为

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

假设 $t = 2\pi$, 我们得到映射

$$x_1 = e^{2\pi A}x_0 + \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau) d\tau. \tag{C.3.2}$$

□

C.3.# 19. 确定上述映射有: (1) 唯一不动点以及 (2) 没有不动点的条件.

解 不动点满足方程

$$(I - e^{2\pi A})x = C,$$

其中 C 表示 (C.3.2) 中的积分. 两种可能的情形是:

(1) $\det(I - e^{2\pi A}) \neq 0$. 在这情形仅存在一个不动点.

(2) $\det(I - e^{2\pi A}) = 0$. 于是, 由 Kroneker-Capelli (相容性) 定理得知, 如果 $(I - e^{2\pi A})$的秩等于增广矩阵 $(I - e^{2\pi A}|C)$ 的秩, 则存在无穷多个不动点, 否则没有不动点. □

C.3.# 20. 求证特征方程 $\det(zI-e^{2\pi A})=0$ 的根 $z_1,\cdots,z_n$ 是 $e^{2\pi\lambda_1},\cdots,e^{2\pi\lambda_n}$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是线性系统

$$\dot{x}=Ax \tag{C.3.3}$$

的特征值. □

C.3.# 21. 证明, 如果原点是系统 (C.3.3) 的结构稳定平衡态, 则映射 (C.3.2) 对应的不动点也结构稳定. 此外, 求证 (C.3.3) 的平衡态的拓扑类型与 (C.3.2) 的不动点类型相同. □

C.3.# 22. 求证仅当特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 之一是零或者等于 $i\omega$ 时 $\det(I-e^{2\pi A})=0$, 其中 ω 是整数. □

C.3.# 23. 确定使得二维系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-\omega y+f(t),\\ \dot{y}&=\omega x+g(t)\end{aligned} \tag{C.3.4}$$

有无穷多个周期为 $2\pi q$ 的周期解的条件, 其中 f 和 g 是周期为 2π 的连续函数, $q\geqslant 1$ 是某整数.

解 映射 $T: t=0\to t=2\pi$ 可以写为形式

$$\begin{aligned}x_1&=x_0\cos(2\pi\omega)-y_0\sin(2\pi\omega)+C_1,\\ y_1&=x_0\sin(2\pi\omega)+y_0\cos(2\pi\omega)+C_2,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}C_1&=\int_0^{2\pi}(f(\tau)\cos\omega(2\pi-\tau)-g(\tau)\sin\omega(2\pi-\tau))d\tau,\\ C_2&=\int_0^{2\pi}(f(\tau)\sin\omega(2\pi-\tau)+g(\tau)\cos\omega(2\pi-\tau))d\tau.\end{aligned}$$

当

$$\det\begin{pmatrix}\cos(2\pi\omega)-1 & -\sin(2\pi\omega)\\ \sin(2\pi\omega) & \cos(2\pi\omega)-1\end{pmatrix}=(\cos(2\pi\omega)-1)^2+\sin^2(2\pi\omega)\neq 0$$

时, 这个映射有唯一不动点. 当 ω 是整数时这个条件被破坏. 在这后一情形, 映射改为

$$x_1=x_0+C_1,\ y_1=y_0+C_2.$$

因此, 如果 $C_1^2+C_2^2\neq 0$, 显然这个映射既没有不动点也没有周期点. 而如果 $C_1=C_2=0$, 则所有点都是不动点.

现在考虑 ω 不是整数的情形. 设 (x^*, y^*) 是不动点的坐标, 应用变换 $x = x^* + \xi$ 和 $y = y^* + \nu$ 将不动点移到原点. 引入极坐标, 映射 T 取形式

$$\rho_1 = \rho_0,$$
$$\theta_1 = \theta_0 + 2\pi\omega \quad \mod 2\pi.$$

可以看到, 这里每一个圆周 ($r =$ 常数) 是不变的, 且在每个圆周上映射相同:

$$\theta_1 = \theta_0 + 2\pi\omega \quad \mod 2\pi.$$

当 ω 是无理数时, 最后这个映射没有周期点. 当 $\omega = p/q$, p 和 q 是整数时, 所有的点都是以 q 为周期的周期点. □

接下来我们考虑拟线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \mu f(x, y),\\ \dot{y} &= By + \mu g(x, y),\end{aligned} \tag{C.3.5}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}^m$, 假定 A 的谱位于虚轴上, B 的谱位于左半平面, 且 $f, g \in \mathbb{C}^k$.

C.3.# 24. 证明下面的定理, 它类似于中心流形定理:

定理 C.1 对任何 $R > 0$ 存在 μ_0, 使得对 $|\mu| < \mu_0$, 球 $\|(x, y)\| \leqslant R$ 包含有吸引 $\mathbb{C}^k$ – 光滑不变流形 $y = \mu\varphi(x, \mu)$. □

由上面定理得知, 对 (C.3.5) 的研究化为对 n 维系统

$$\dot{x} = Ax + \mu f(x, \mu\varphi(x, \mu)) = Ax + \mu\tilde{f}(x) + o(\mu)$$

的研究, 其中 $\tilde{f}(x) = f(x, 0)$.

C.3.# 25. 考虑拟线性映射的类似情形. □

C.3.# 26. 对下面的 $(n + m)$ 维系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + h_1(t) + \mu f(x, y, t),\\ \dot{y} &= By + h_2(t) + \mu g(x, y, t),\end{aligned} \tag{C.3.6}$$

证明与定理 C.1 类似的定理, 其中所有函数都是 2π – 周期函数. A 和 B 的谱分别位于虚轴上和虚轴的左边.

注意截断方程

$$\dot{y} = By + h_2(t)$$

有唯一 2π – 周期解 $y = \alpha(t)$. 因此, 我们总可以使得 $h_2(t) \equiv 0$ (用变换 $\tilde{y} \to y + \alpha(t)$). □

考虑系统

$$\dot{x} = \mu f(x,t), \tag{C.3.7}$$

其中 $f(x,t) = f(x, t+2\pi)$ 是 t 的连续函数, 且关于 x 光滑, $x \in \mathbb{R}^n$.

C.3.# 27. 求直到 μ^2 次项的 Poincaré 映射.

提示: 利用逐次逼近法求积分方程

$$x(t) = x_0 + \mu \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$$

的解:

一次近似为　$x(t) = x_0$,

二次近似为　$x(t) = x_0 + \mu \int_0^t f(x_0, \tau) d\tau$,

n 次近似为　$x_{n+1}(t) = x_0 + \mu \int_0^t f(x_0, \tau) d\tau + O(\mu^2)$.

解

$$x_1 = x_0 + \mu \int_0^{2\pi} f(x_0, \tau) d\tau + O(\mu^2). \tag{C.3.8}$$

□

记 $f_0(x) = \int_0^{2\pi} f(x_0, \tau) d\tau$.

C.3.# 28. 求证沿着系统

$$\dot{x} = \frac{\mu}{2\pi} f_0(x) \tag{C.3.9}$$

的轨线的时间 2π 移位与 (C.3.8) 的直到 μ^2 次项重合. 系统 (C.3.9) 称为**平均系统**.□

C.3.# 29. 证明下面的定理:

定理 C.2　*平均系统的结构稳定平衡态对应于原系统的结构稳定周期轨道: 若 x^* 是 (C.3.9) 的结构稳定平衡态, 则对所有充分小的 μ, 系统 (C.3.7) 的 Poincaré 映射 (C.3.8) 有接近于 x^* 的结构稳定不动点.* □

证明　设 x^* 是系统 (C.3.9) 的结构稳定平衡态. 即

$$f_0(x^*) = 0,$$

且特征方程的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 没有位于虚轴上. 因此, 我们可以视它们为 $\lambda = \frac{\mu}{2\pi}\sigma$:

$$\det\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*) - \sigma I\right) = 0. \tag{C.3.10}$$

(C.3.8) 的不动点可以从方程

$$f_0(x) + O(\mu) = 0$$

求得. 因为 (C.3.10) 没有零根, 所以 $f_0(x^*)=0$ 且 $\left|\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*)\right| \neq 0$. 并由此得知存在不动点 $x=x^*+O(\mu)$. 在这点对应的特征方程为

$$\det\left(I+\mu\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*)+O(\mu^2)-zI\right)=0.$$

我们看到, 这个方程的根有形式 $z=1+\mu\sigma$. 于是我们可把它写为

$$\det\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*)+O(\mu^2)-\sigma I\right)=0.$$

因此, 对所有小的 μ, 根 σ 将接近于 (C.3.10) 的根. 从而, 不动点结构稳定. 此外, 它有与平均系统的平衡态有相同的拓扑类型. □

C.3.# 30. 求证在一般情形

$$\dot{x}=Ax+\mu f(x,t),$$

相应的 Poincaré 映射由

$$x_1=e^{2\pi A}x_0+\mu\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-\tau)}f(e^{A\tau}x_0,\tau)d\tau+O(\mu^2)$$

给出, 其中 $f(x,t)$ 关于时间连续, 关于 x 光滑. □

C.3.# 31. 验证如果 $\det(e^{2\pi A}-I)\neq 0$, 那么对任何给定的 R, 只要 μ 足够小, 在以 R 为半径的球内存在单个不动点 $x^*(\mu)$, 使得当 $\mu\to 0$ 时有 $x^*(\mu)\to 0$. □

我们研究具有两个方程的系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-\omega y+\mu f(x,y,t),\\ \dot{y}&=\omega y+\mu g(x,y,t).\end{aligned}\tag{C.3.11}$$

C.3.# 32. 计算直到 μ^2 次项的映射.

解

$$\begin{aligned}x_1&=x_0\cos 2\pi\omega-y_0\sin 2\pi\omega+\mu\Phi_1(x_0,y_0)+\mu^2(\cdots),\\ y_1&=x_0\sin 2\pi\omega+y_0\cos 2\pi\omega+\mu\Phi_2(x_0,y_0)+\mu^2(\cdots),\end{aligned}\tag{C.3.12}$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi_1=\int_0^{2\pi}&[\ f(x_0\cos\omega\tau-y_0\sin\omega\tau,x_0\sin\omega\tau+y_0\cos\omega\tau,\tau)\cos\omega\tau\\ &+g(x_0\cos\omega\tau-y_0\sin\omega\tau,x_0\sin\omega\tau+y_0\cos\omega\tau,\tau)\sin\omega\tau]d\tau,\\ \Phi_2=\int_0^{2\pi}&[\ -f(x_0\cos\omega\tau-y_0\sin\omega\tau,x_0\sin\omega\tau+y_0\cos\omega\tau,\tau)\sin\omega\tau\\ &+g(x_0\cos\omega\tau-y_0\sin\omega\tau,x_0\sin\omega\tau+y_0\cos\omega\tau,\tau)\cos\omega\tau]d\tau.\end{aligned}$$

□

C.3.# 33. 将系统 (C.3.11) 写为极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 下的系统.

解

$$\dot{r} = \mu R(r,\theta,t),$$

$$\dot{\theta} = \omega + \mu\Psi(r,\theta,t),$$

其中

$$R = f(r\cos\theta, r\sin\theta, t)\cos\theta + g(r\cos\theta, r\sin\theta, t)\sin\theta,$$

$$\Psi = \frac{1}{r}[-f(r\cos\theta, r\sin\theta, t)\sin\theta + g(r\cos\theta, r\sin\theta, t)\cos\theta].$$

□

C.3.# 34. 设

$$R(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)},$$

$$\Psi(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)}.$$

对 ω 是整数情形构造直到 $O(\mu^2)$ 的 Poincaré 映射.

解

$$r_1 = r_0 + 2\pi\mu \sum_{m\omega+n=0} a_{nm}(r_0)e^{im\theta_0} + \mu^2(\cdots),$$

$$\theta_1 = \theta_0 + 2\pi\mu \sum_{m\omega+n=0} b_{nm}(r_0)e^{im\theta_0} + \mu^2(\cdots).$$

□

如果 ω 是整数, 映射 (C.3.12) 可表示为

$$x_1 = x_0 + \mu\Phi_1(x_0,y_0) + \mu^2(\cdots),$$

$$y_1 = y_0 + \mu\Phi_2(x_0,y_0) + \mu^2(\cdots).$$

C.3.# 35. 证明下面定理:

定理 C.3 (平均定理)　如果 ω 是整数,则对充分小 $\mu > 0$, 系统

$$\dot{x} = \frac{\mu}{2\pi}\Phi_1(x,y),$$

$$\dot{y} = \frac{\mu}{2\pi}\Phi_2(x,y)$$

的结构稳定平衡态对应于 Poincaré 映射的结构稳定不动点. 此外, 稳定平衡点对应于稳定不动点.

□

在极坐标下平均系统是

$$\dot{r} = \mu \sum_{m\omega+n=0} a_{nm}(r)e^{im\theta} = \mu R_0(r,\theta),$$
$$\dot{\theta} = \mu \sum_{m\omega+n=0} b_{nm}(r)e^{im\theta} = \mu \Psi_0(r,\theta).$$

我们在这里应该注意在 $r=0$ 的奇异性.

C.3.# 36. 求 van der Pol 方程

$$\ddot{x} + \mu(1-x^2)\dot{x} + \omega^2 x = \mu A \sin t$$

相应的平均系统, 只要 $\omega^2 = 1 + \mu\Delta$ (其中 Δ 称为去谐). 当 A 和 Δ 变化时确定平衡态的类型. □

现在考虑 ω 不是整数的情形. 按照 C.3. #31,映射 (C.3.12) 在这情形有接近于零的唯一不动点.

C.3.# 37. 求对应于这个不动点的周期运动 $(x^*(t), y^*(t))$, 并求直化这个周期解 (将原点移到 $(x^*(t), y^*(t))$) 以后这个系统的方程.

解

$$\dot{x} = -\omega y + \mu F(x,y,t) + \mu^2(\cdots),$$
$$\dot{y} = \omega x + \mu G(x,y,t) + \mu^2(\cdots),$$

其中

$$F(x,y,t) = f(x,y,t) - f(0,0,t),$$
$$G(x,y,t) = g(x,y,t) - g(0,0,t).$$

□

现在假设 $\omega = p/q$, 其中 p 和 q 是整数, $q > 1$. 此时, 求周期 $2\pi q$ 的周期运动对应于求映射 T^q 的不动点. 这个映射写为

$$x_q = x_0 + \mu\Phi_1(x_0, y_0) + \mu^2(\cdots),$$
$$y_q = y_0 + \mu\Phi_2(x_0, y_0) + \mu^2(\cdots),$$

其中

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi q} [f(\cdot)\cos\omega\tau + g(\cdot)\sin\omega\tau]d\tau,$$
$$\Phi_2 = \int_0^{2\pi q} [-f(\cdot)\sin\omega\tau + g(\cdot)\cos\omega\tau]d\tau,$$

其中 $(\cdot)$ 如上面 (C.3.12), 代表 $(x_0\cos\omega\tau - y_0\sin\omega\tau, x_0\sin\omega\tau + y_0\cos\omega\tau)$, 且 $\omega = \dfrac{p}{q}$.

用与上面情形相同的方法, 我们可以处理平均系统

$$\dot{x} = \frac{\mu}{2\pi q}\Phi_1(x, y),$$
$$\dot{y} = \frac{\mu}{2\pi q}\Phi_2(x, y).$$

在极坐标下, 映射 T^q 可写为

$$r_q = r_0 + 2\pi q\mu \sum_{mp+nq=0} a_{nm}(r_0)e^{im\theta_0} + \mu^2(\cdots),$$
$$\theta_q = \theta_0 + 2\pi q\mu \sum_{mp+nq=0} b_{nm}(r_0)e^{im\theta_0} + \mu^2(\cdots).$$

这里, 平均系统是

$$\dot{r} = \mu R_0(r, \theta),$$

$$\dot{\theta} = \mu\Psi_0(r, \theta),$$

其中 $R_0 = \sum_{mp+nq=0} a_{nm}(r)e^{im\theta}$ 以及 $\Psi_0 = \sum_{mp+nq=0} b_{nm}(r)e^{im\theta}$. 应该指出, 此时 $f(0,0,t) \equiv 0$, $g(0,0,t) \equiv 0$, 即在极坐标下平均系统在 $r = 0$ 不再有奇异性. □

C.3.# 38. 考虑 ω 为无理数的情形. 如上我们可以假设在 (C.3.11) 中的 $f(0,0,t) \equiv 0$, $g(0,0,t) \equiv 0$. 系统在极坐标下有具非奇异 (光滑) 系数 a_{nm}, b_{nm} 的形式

$$\dot{r} = \mu \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)}, \quad \dot{\theta} = \omega + \mu \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)}.$$

对给定的 N, M, 证明存在光滑坐标变换将此系统化为形式

$$\dot{r} = \mu a_{00}(r) + O(\mu^2) + \mu \sum_{n=N}^{\infty}\sum_{m=M}^{\infty} a_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)},$$

$$\dot{\theta} = \omega + \mu b_{00}(r) + O(\mu^2) + \mu \sum_{n=N}^{\infty}\sum_{m=M}^{\infty} b_{nm}(r)e^{i(m\theta+nt)}.$$

注意, 由于当 $N, M \to +\infty$ 时这里的级数趋于零, 得知对任何小 δ 映射 T 在适当坐标下可以写为

$$r_1 = r_0 + 2\pi\mu a_{00}(r_0) + \delta O(\mu),$$

$$\theta_1 = \theta_0 + 2\pi\omega + 2\pi\mu b_{00}(r_0) + \delta O(\mu).$$

□

C.3.# 39. 研究截断映射

$$r_1 = r_0 + 2\pi\mu a_{00}(r_0),$$

$$\theta_1 = \theta_0 + 2\pi\omega + 2\pi\mu b_{00}(r_0).$$

求证除了平凡不动点 (0,0) 以外, 上面映射还可以有由方程

$$a_{00}(r_0) = 0$$

的零点确定的不变闭曲线. □

C.3.# 40. 证明对小 $\mu > 0$, 方程

$$a_{00}(r_0) = 0$$

满足

$$a'_{00}(r^*) < 0$$

的每一个根 r^* 对应于稳定不变闭曲线 $r = r^*(\mu) = r^* + O(\mu)$.

说明: 取 δ 充分小并应用环域原理. □

在 ω 是无理数情形, 平均方程为

$$\dot{r} = \mu a_{00}(r),$$

$$\dot{\theta} = \omega + \mu b_{00}(r).$$

其中 $r = 0$ 是平衡态, $a_{00}(r) = 0$ 的非零根对应于极限环.

C.3.# 41. 下面的问题几乎等价于上面的问题: 求证对小 $\mu > 0$, 平均系统的稳定 (不稳定) 极限环对应于原系统的稳定 (不稳定) 不变环面. □

让我们回到共振情形 $(\omega = p/q, q \geqslant 1)$. 于是对应的平均系统可写为

$$\dot{r} = \mu R_0(r, \theta),$$

$$\dot{\theta} = \mu \Psi_0(r, \theta).$$

假设系统

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R_0(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= \Psi_0(r, \theta) \end{aligned} \tag{C.3.13}$$

有结构稳定的周期为 τ 的周期轨道 $L: \{r = \alpha(t), \theta = \beta(t)\}$, 令

$$\lambda = \int_0^\tau \left[\frac{\partial R_0}{\partial \tau}(\alpha(t), \beta(t)) + \frac{\partial \Psi_0}{\partial \tau}(\alpha(t), \beta(t)) \right] \quad d\tau < 0.$$

由此得知平均系统有周期为 τ/μ 的周期解 $\{r = \alpha(\mu t), \theta = \beta(\mu t)\}$.

C.3.# 42. 证明对小 $\mu > 0$ 原系统有稳定不变环面.

提示: 首先修改 (C.3.13). 在 L 附近引入法坐标 (u, φ) (见 3.10 节), 于是系统写为形式

$$\dot{u} = A(\varphi) u + O(u^2),$$

$$\dot{\varphi} = 1 + O(u^2),$$

其中右端是周期为 τ_0 的周期函数. 注意

$$\lambda = \int_0^{\tau} A(\varphi)d\varphi,$$

因此

$$A(\varphi) = \lambda + A_0(\varphi),$$

其中 $\int_0^{\tau} A_0(\varphi)d\varphi = 0$. 引入 $v = ue^{-\int A_0(\varphi)d\varphi}$, 系统取形式

$$\dot{v} = \lambda v + O(v^2),$$
$$\dot{\varphi} = 1 + O(v).$$

由此得知平均系统在新坐标 (v, φ) 下可写为

$$\dot{v} = \mu[\lambda v + O(v^2)],$$
$$\dot{\varphi} = \mu[1 + O(v)].$$

对应的 $2\pi q$ – **移位**映射是

$$v_1 = v_0 + \mu[2\pi q\lambda v_0 + O(v_0^2)] + O(\mu^2),$$
$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi q\mu + O(\mu v_0) + O(\mu^2).$$

原系统 (C.3.11) 的 $2\pi q$ – 移位映射有相同形式. 引入 $v = \mu w$ 以后 Poincaré 映射变成

$$w_1 = w_0 + 2\pi q\mu\lambda w_0 + O(\mu^2),$$
$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi q\mu + O(\mu^2).$$

为了完成求解, 应用环域原理. □

C.3.# 43. 研究写为下面形式的 Mathieu 方程

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2(1 + \varepsilon\cos\omega_0 t)x. \tag{C.3.14}$$

证明对应于参数振动的不稳定区域, 区域与在平面 $\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}, \varepsilon\right)$ 中 $\varepsilon = 0$ 上的点 $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{k}{2}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 相毗邻[20].

(C.3.14) 从初始点 (x_0, y_0) 开始的解在 $\varepsilon = 0$ 有下面的形式:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{y_0}{\omega_0}\sin\omega t + x_0\cos\omega t, \\ y(t) &= y_0\cos\omega t - \omega x_0\sin\omega t. \end{aligned} \tag{C.3.15}$$

接下来我们构造映从平面 $(x, y, t=0)$ 到平面 $\left(x, y, t=\tau=\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 上的映射. 为此, 我们将 $t=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 代入 (C.3.15) 并用 $(\overline{x}, \overline{y})$ 代替 $(x(t), y(t))$, 用 (x, y) 代替 (x_0, y_0). 所得 $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \overline{y})$ 的算子由

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\dfrac{\omega}{\omega_0} & \dfrac{1}{\omega}\sin 2\pi\dfrac{\omega}{\omega_0} \\ -\omega\sin 2\pi\dfrac{\omega}{\omega_0} & \cos 2\pi\dfrac{\omega}{\omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{C.3.16}$$

给出. (C.3.16) 的特征方程是

$$\rho^2 + p\rho + q = 0,$$

其中

$$p \equiv \operatorname{tr} T = -2\cos 2\pi\frac{\omega}{\omega_0} \quad 和 \quad q \equiv \det T = 1.$$

这是一个**保积映射**. 不动点 $O(x=y=0)$ 的乘子满足关系式

$$\rho_1 + \rho_2 = -p \quad 和 \quad \rho_1\rho_2 = q = 1.$$

因此, 当 $|p| < 2$ 时, 上面的映射是通过角度为 $\dfrac{2\pi\omega}{\omega_0}$ 的旋转, 这使得它的所有轨线都是稳定的.

求公式 (C.3.15) 的一阶 ε 更正 (用 C.3.#30). 注意扰动映射的原点当 $|p| > 2$ 时变成鞍点. 此外, 若 $p > 2$ 和 $p < -2$, 它分别是鞍点 $(+,+)$ 和 $(-,-)$. □

C.3.# 44. [166] 中考虑系统

$$\dot{\psi}_1 = \omega_1,$$

$$\dot{\psi}_2 = \omega_2,$$

其中 $\omega_{1,2} > 0$, 这可解释为两个非交互作用的调和振子偶.

上面的系统可以化为一个方程

$$\frac{d\psi_1}{d\psi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \overset{\text{dif}}{=} r.$$

我们总可以假设 $r < 1$. 上面的系统有解 $\psi_1 = r\psi_2 + \psi_2^0$. 引入法化坐标 $\theta = \dfrac{\psi_2^0}{2\pi}$ 和 $\bar{\theta} = \dfrac{r2\pi + \psi_2^0}{2\pi}$, 得到圆周映射

$$\bar{\theta} = \theta + r, \qquad \mod 1, \tag{C.3.17}$$

它也可表示为下面的在区间 $[0,1]$ 上的映射

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \theta + r & 对\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1 - r, \\ \theta - (1 - r) & 对\ 1 - r \leqslant \theta \leqslant 1, \end{cases} \tag{C.3.18}$$

这里我们将端点 $\theta=0$ 和 $\theta=1$ 恒同.

设 r 是有理数, 即 $r=\frac{p}{q}$, p 和 q 是某互质整数. 将线段 $[0,1]$ 划分为长度为 $\frac{1}{p}$ 的 p 个区间: $\left[0,\frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{1}{p},\frac{2}{p}\right]$, $\cdots$, $\left[\frac{p-1}{p},1\right]$. 选择初始点 $\theta_0\in\left[0,\frac{1}{p}\right]$, (C.3.17) 从 θ_0 开始的正半轨线是迭代序列

$$\left(\theta_0,\theta_1=\theta_0+\frac{p}{q}(\mathrm{mod}\ 1),\theta_2=\theta_0+\frac{2p}{q}(\mathrm{mod}\ 1),\cdots,\theta_i=\theta_0+\frac{ip}{q}(\mathrm{mod}\ 1),\cdots\right).$$

周期为 n 的环是

$$\left\{\theta_0=\theta_0+\frac{np}{q}\ \mathrm{mod}\ 1,\ \theta_i\neq\theta_0,\ i=1,2,\cdots,n-1\right\}.$$

在上面关于 p 和 q 的条件下得知最小周期 $n=p$. 因此, 环在每个区间 $\left[\frac{k-1}{p},\frac{k}{p}\right]$, $k=1,\cdots,p$, 上只存在一点, 因为环上点的个数以及区间个数都等于 p. 否则 $n<p$, 但这不可能, 因为环的两个迭代不可能属于同一个区间. 由于 θ_0 是 $\left[0,\frac{1}{p}\right]$ 中的任意点, 故线段 $[0,1]$ 被 p- 周期环整个地充满. 因此, 当旋转数是有理数时, 所考虑的系统存在周期 p 共存环的连续统.

如果 r 是无理数, 它可表示为

$$r=\lim_{l\to\infty}\frac{q_l}{p_l},$$

使得当 $l\to\infty$ 时 $p_l\to\infty$. 此外, 在 $[0,1]$ 上的区间 $\left[(k-1)p_l,\frac{k}{p_l}\right]$ 的个数也无限增加. 因此每个区间的长度减少, 且当 $l\to\infty$ 时整个线段 $[0,1]$ 被拟周期轨线所充满. □

C.3.# 45. 研究圆周映射

$$\bar{\theta}=\theta+\omega+k\sin\theta\quad\mathrm{mod}\ (2\pi), \tag{C.3.19}$$

其中 ω 是频率, k 是某参数.

对 $\omega\in[0,2\pi]$ 数值计算旋转数 $R(\omega)$:

$$R=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(\theta_{n+1}-\theta_n).$$

提示: ω 从 0 到 2π 变化时, 计算下面二维映射的迭代

$$\begin{aligned}\theta_{n+1}&=(\theta_n+\omega+k\sin x_n)\quad\mathrm{mod}\ 2\pi,\\ R_{n+1}&=\frac{1}{n+1}\left(nR_n+\omega+\frac{\theta_{n+1}-\theta_n}{2\pi}\right).\end{aligned} \tag{C.3.20}$$

当 $n\to+\infty$ 时在给定的 ω, R_n 的迭代收敛于旋转数 R. 接下来对 ω, R 画出的分支图如图 C.3.1 所示. □

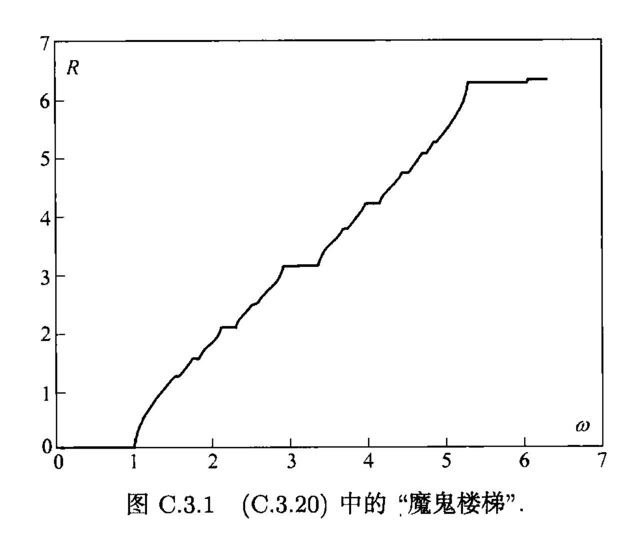


图 C.3.1 (C.3.20) 中的 "魔鬼楼梯".

C.4 规范形的推导

这一节我们讨论构造规范形的某些算法. 由约化原理, 只需构造系统在中心流形上的规范形就够了. 因此, 为了考虑具单个零特征根的平衡态分支, 我们需要一维规范形. 如果它有一对零特征指数, 就应该研究对应的二维规范形族, 等等.

在某种情况下必须考虑原系统的大范围性质. 例如, 如果原系统在中心流形上的限制是对称的, 相应的规范形将继承这个性质. 大体上, 对给定的分支, 规范形是参数化了的微分方程或者差分方程, 这依赖于所考虑的问题是什么, 规范形右端具最简单形式但足够刻画所给族的主要分支.

为了研究稳定性边界附近的分支, 我们必须引入小控制参数, 其个数至少等于线性问题的退化次数, 或者如果由于非线性项而存在额外的退化性, 则这个数甚至可大于它. 由于开折参数是小的, 在中心流形上的轨道对相当长的时间可停留在平衡态的小邻域内 (在中心流形上没有快不稳定性, 因为简化的线性化系统的所有特征指数都接近于零). 因此, 尺度化参数和相变量使它们以有限值代替渐近于零的值是合理的. 时间变量于是也必须尺度化.

这个方法有相当的一般性. 它的优点是在执行尺度化的过程中, 许多共振单项式消失. 最平凡的例子是具单个零特征值的鞍 - 结点分支. 在这情形中心流形是一维的. 系统在平衡态附近的 Taylor 展开可以写为形式

$$\dot{x} = \mu + x^2 + l_3 x^3 + \cdots,$$

其中 μ 是小控制参数. 尺度化 $x \to \sqrt{|\mu|}x, t \to t/\sqrt{|\mu|}$ 将系统化为形式

$$\dot{x} = \pm 1 + x^2 + O(\sqrt{|\mu|}),$$

因此, 只有二次单项式在 $\mu \to 0$ 时的极限幸存.

类似的算法可应用于高维情形. 当控制参数趋于零时, 尺度化过的系统的极限给出系统在分支点附近性态的 "大体" 描述. 这样的极限系统称为**渐近规范形**.

渐近规范形分别出现在有单个或两个零特征值的平衡态的一维或二维系统的研究中. 这种规范形的分析通常很易理解, 故大部分工作是应用在建立渐近规范形与原系统动力学之间的严格对应 [20,64]. 但是, 二维规范形的分支分析已经可要求考虑某些其它大范围分支, 有时候还要考虑余维 2 分支. 此外, 去掉高阶项也可能破坏出现在截断规范形中的理想化图像. 最清晰的例子是具指数 $(0, \pm i\omega)$ 的平衡态分支, 那里规范形具有旋转对称性. 如果原系统不支持这个对称性, 截断规范形的简单动力学可过渡为增广系统的混沌动力学.

当我们考虑的是高维规范形时, 情况就变得不同. 三维 (以及更高维) 渐近规范形本身可具有不平凡动力学. 例如, 在渐近规范形

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y,\\
\dot{y} &= z,\\
\dot{z} &= -z - by + ax - x^2
\end{aligned}
$$

中我们找到的鞍 – 焦点同宿回路对应于有完全 Jordan 块的三重零特征值分支 [163]. 值得注意, 某些渐近规范形方程与某些来自不同应用的熟知模型重合, 例如: 三阶 Duffing 方程, Chua 电路, Shimizu-Morioka 系统以及 Lorenz 方程.

C.4.# 46. 对 Shimizu-Morioka 方程 [187]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y,\\
\dot{y} &= ax - ky - xz,\\
\dot{z} &= -z + x^2,
\end{aligned}
\tag{C.4.1}
$$

在余维 2 点 $(k = a = 0)$ 附近推导它的规范形.

首先我们应该确定在原点的特征指数. 容易看出存在一对零指数和一个指数等于 -1. 对应于一对零根的特征空间是 $\{z = 0\}$. 在原点切于此平面的中心不变流形为

$$
z = x^2 - 2xy + 2y^2 + \cdots ,
$$

这里省略号表示 (x, y, z, a, k) 的三次和更高次项. 因此这个系统在中心流形上取形式

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y,\\
\dot{y} &= ax - ky - x^3 + 2x^2y - 2xy^2 + \cdots ,
\end{aligned}
\tag{C.4.2}
$$

其中省略号表示至少四次项.

接下来我们进行尺度化

$$(x, y, t, k, a) \to (\varepsilon x_{\text{new}}, \varepsilon^2 y_{\text{new}}, t_{\text{new}}/\varepsilon, \varepsilon k_{\text{new}}, \varepsilon^2 a_{\text{new}}).$$

系统变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ax + ky - x^3 + 2\varepsilon x^2 y + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{C.4.3}$$

其中新参数 k_{new} 和 a_{new} 现在可任意. 观察到 (C.4.3) 中的反射对称 $(x,y) \to (-x,-y)$ 从原系统 (C.4.1) 中继承. 鉴于这个事实, 右端函数的 Taylor 展开不包含 (x,y) 的二次项 (以及其它偶次项). 与在 13.2 节分析的一般的 Bogdanov-Takens 分支比较, 对称系统中的分支有些不同: 在原点的平衡态总是存在, 它产生叉分支而不是鞍 - 结点分支. 对称系统的分支开折也包含另外的对应于具乘子为 $+1$ 的二重半稳定周期轨道的曲线. 原点和非平凡平衡点的 Andronov-Hopf 稳定性边界上的 Lyapunov 量的符号由 ε 的符号确定. 注意当 $\varepsilon = 0$ 和 $k = 0$ 时, 系统 (C.4.3) 变成可积的 Hamilton 系统, Hamilton 函数为

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}. \qquad \square$$

C.4.# 47. 接下来我们考虑下面形式的 Chua 电路 [168]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \beta(g(y-x) - f(x)), \\ \dot{y} &= g(x-y) + z, \\ \dot{z} &= -y, \end{aligned}$$

其中 α, β 和 g 是某些正参数. 其中 $f(x) = \alpha x(x^2-1)$ 是非线性元素的三次近似, 因此这个系统具有奇次对称性 $(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$. 当 $g > \alpha$ 时, 存在在原点的单个平衡态 O. 当 $g < \alpha$ 时, 存在一对对称平衡态 $O_{1,2}\left(\pm\sqrt{1-\frac{g}{a}}, 0, \mp g\sqrt{1-\frac{g}{a}}\right)$. 在直线 $g = \alpha$ 上, 在 O 的特征方程当 $\beta \neq \frac{1}{g^2}$ 时有单个零根, 在 $\beta = \frac{1}{g^2}$ 有两个零根 (这时第三个根等于 $-g$). 如同在 Shimizu-Morioka 系统的情形, 参数空间中与这条曲线横截的平面上的分支集的结构由具反射对称的 Khorozov-Takens 规范形确定. 化到在二维中心流形上的这个规范形的概要讨论如下.

对应于两个零根的 Jacobi 矩阵是

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

这个系统的线性部分为

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

在 $\alpha = g = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$, 利用变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\mathrm{g} \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ g^2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ -g^2 \\ -g \end{pmatrix}.$$

容易计算并验证在这些坐标下系统成为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta + \left(1 - \frac{1}{g^2}\right) F, \\ \dot{\eta} &= \frac{1}{g} F, \\ \dot{\zeta} &= \frac{1}{g^2} F, \end{aligned}$$

其中

$$F = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + (\gamma_1 - g\gamma_2)\zeta - \beta\alpha(\xi + \zeta)^3,$$

$\gamma_{1,2}$ 是小参数:

$$\gamma_1 = \beta(\alpha - g), \quad \gamma_2 = \beta g^2 - 1.$$

中心流形有形式

$$\zeta = \frac{\gamma_1}{g^3}\xi + \left(\frac{\gamma_2}{g^3} - \frac{\gamma_1}{g^4}\right)\eta + \cdots,$$

其中省略号表示 $(\xi, \eta, \gamma_1, \gamma_2)$ 的三次和更高次项. 在中心流形上系统写为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = {} & \eta \left(1 + \left(1 - \frac{1}{g^2}\right) \left(\gamma_2 + (\gamma_1 - g\gamma_2) \left(\frac{\gamma_2}{g^3} - \frac{\gamma_1}{g^4}\right)\right)\right) \\ & + \xi \left(1 - \frac{1}{g^2}\right) \left(\gamma_1 + (\gamma_1 - g\gamma_2)\frac{\gamma_1}{g^3}\right) - \frac{1}{g}\left(1 - \frac{1}{g^2}\right)\xi^3 + \cdots, \\ \dot{\eta} = {} & \eta \frac{1}{g} \left(\gamma_2 + (\gamma_1 - g\gamma_2)\left(\frac{\gamma_2}{g^3} - \frac{\gamma_1}{g^4}\right)\right) + \xi \frac{1}{g}\left(\gamma_1 + (\gamma_1 - g\gamma_2)\frac{\gamma_1}{g^3}\right) \\ & - \frac{1}{g^2}\xi^3 + \cdots, \end{aligned}$$

其中省略号表示 $(\xi, \eta, \gamma_1, \gamma_2)$ 的高于三次的项. 现在最后一步是改变变量 η 使得第一个方程变成 $\dot{\xi} = \eta$. 系统最后的形式是

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta,\\ \dot{\eta} &= \varepsilon_1\xi + \varepsilon_2\eta - \frac{1}{g^2}\xi^3 + 3\frac{1-g^2}{g^3}\xi^2\eta + \cdots,\end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma_1}{g}\left(1 + \gamma_1\frac{1}{g^3} + \gamma_2\left(1 - \frac{2}{g^2}\right)\right)$$

以及

$$\varepsilon_2 = \gamma_1 - (\gamma_1 - g\gamma_2)\frac{g^3+1}{g^5} - (\gamma_1 - g\gamma_2)^2\frac{1}{g^5}.$$

□

C.4.# 48. 对 Chua 电路方程可重参数化使得系统写为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y + c_0x - c_1x^3),\\ \dot{y} &= x - y + z,\\ \dot{z} &= -by.\end{aligned} \tag{C.4.4}$$

于是, 在极限 $(a, b) \to 0$ 情形 y 变成快变量, 原系统 (C.4.4) 的所有动力学集中在慢流形 $y = x + z$ 上. 对应的慢系统由下面的方程组给出

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \gamma(x + z + c_0x - c_1x^3),\\ \dot{z} &= -x - z,\end{aligned} \tag{C.4.5}$$

其中 $\gamma = \dfrac{a}{b}$ 是参数. 对第一个方程解出 z:

$$z = \frac{\dot{x}}{\gamma} - x - c_0x + c_1x^3,$$

并将这个表达式代入 (C.4.5) 中的第二个方程, 得

$$\dot{z} = -\frac{\dot{x}}{\gamma} + c_0x - c_1x^3.$$

由于

$$\dot{z} = \frac{\ddot{x}}{\gamma} - (1 + c_0 - 3c_1x^2)\dot{x},$$

我们得到

$$\ddot{x} - (\gamma(1 + c_0 - 3c_1x^2) - 1)\dot{x} + \gamma(c_0x - c_1x^3) = 0.$$

令 $\dot{x} = u$, 我们可把这方程重写为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u,\\ \dot{u} &= c_0x + (\gamma - 1 + \gamma c_0)y - 3\gamma c_1x^2y - \gamma c_1x^3,\end{aligned}$$

它与 Khorozov-Takens 规范形一致. □

C.4.# 49. 推导平衡态具三个零特征指数的可饱和减震器的激光模型

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -E + P_1 + P_2,\\ \dot{P}_1 &= -\delta_1 P_1 - E(m_1 + M_1),\\ \dot{P}_2 &= -\delta_2 P_2 - E(m_2 + M_2),\\ \dot{M}_1 &= -\rho_1 M_1 + EP_1,\\ \dot{M}_2 &= -\rho_2 M_2 + \beta E P_2\end{aligned} \tag{C.4.6}$$

的规范形[191], 其中 E, P_1 和P_2 是反应和无反应媒介中电场和原子极化的慢包络. M_1 和 M_2 是在没有激光场的情况下, 反应和无反应媒介的值 $m_1 < 0$ 和 $m_2 > 0$ 的总体偏差. δ_1 和 δ_2 (ρ_1 和 ρ_2) 是反应和无反应媒介中由腔松弛率正规化的横截 (纵向) 松弛率, β 是腔内媒介的饱和强度比.

平凡平衡态

$$E = P_1 = P_2 = M_1 = M_2 = 0$$

的线性稳定性由 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -m_1 & -\delta_1 & 0 & 0 & 0\\ -m_2 & 0 & -\delta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 \end{pmatrix}$$

的特征值确定, 它们是特征方程

$$(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)(\lambda + \rho_1)(\lambda + \rho_2)$$

的根, 其中

$$\begin{aligned}a_2 &= 1 + \delta_1 + \delta_2,\\ a_1 &= m_1 + m_2 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2,\\ a_0 &= m_2\delta_1 + m_1\delta_2 + \delta_1\delta_2.\end{aligned}$$

设 $\delta_1 - \delta_2 > 0$, 于是在余维 3 点由

$$\begin{aligned}m_1 &= m_{01} = -\frac{\delta_1^2(1+\delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} < 0,\\ m_2 &= m_{02} = \frac{\delta_2^2(1+\delta_1)}{\delta_1 - \delta_2} > 0, \quad \rho_1 = 0\end{aligned} \tag{C.4.7}$$

给出 Jacobi 矩阵 J 有几何重次 2 的三重退化零特征值:

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \quad \lambda_4 = \rho_2, \quad \lambda_5 = -\Lambda = -(1+\delta_1+\delta_2).$$

引入线性坐标变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E \\ P_1 \\ P_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} 1+\delta_2 & \dfrac{\delta_1(1+\delta_2)-\delta_2}{\delta_1^2} & 1 & 0 & 0 \\ \delta_2 & \dfrac{\delta_2}{\delta_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(1+\delta_1) & \dfrac{1+\delta_1}{1+\delta_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

使得

$$UJU^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 \end{pmatrix},$$

系统 (C.4.6) 呈现形式

$$\dot{x}_1 = x_2 - \frac{1}{\Lambda^2}\left[\frac{\delta_1-\delta_2(1-\delta_1)}{\delta_1^2}(x_3+\xi_1)+(x_5+\xi_2)\right]S(x_1,x_2,x_4),$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\Lambda^2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}(x_3+\xi_1)+(x_5+\xi_2)\right)S(x_1,x_2,x_4),$$

$$\dot{x}_3 = -\rho_1 x_3 - \frac{m_{01}}{\Lambda^4}[\Lambda x_1-(1+\Lambda)x_2+x_4]S(x_1,x_2,x_4),$$

$$\dot{x}_4 = -\Lambda x_4 - \frac{1}{\Lambda^2}\left(\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2}(x_3+\xi_1)+(x_5+\xi_2)\right)S(x_1,x_2,x_4),$$

$$\dot{x}_5 = -\rho_2 x_5 - \frac{\beta}{\Lambda^4}\left[\frac{m_{02}}{\delta_2^2}(\Lambda\delta_1\delta_2 x_1-(\Lambda\delta_1-\delta_2)(1+\delta_2)x_2)-\frac{\delta_2^2 m_{01}}{\delta_1^2}x_4\right]S(x_1,x_2,x_4).$$

其中 m_{01} 和 m_{02} 由 (C.4.7) 确定, $\xi_1 = m_1 - m_{01}$, $\xi_2 = m_2 - m_{02}$ 和 ρ_1 是小参数, 以及

$$S(x_1, x_2, x_4) = \delta_1 \Lambda (x_1 - x_2) + (1 + \delta_2)(x_2 - x_4).$$

在简化到中心流形后 (我们简单地将 $x_4 = x_5 = 0$ 代入前面三个方程) 我们得到 (省略号表示三次和更高次项):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + a x_1 (x_3 + \xi_1) + b x_2 (x_3 + \xi_1) + \xi_2 s(x_1, x_2) + \cdots, \\
\dot{x}_2 &= -c x_1 (x_3 + \xi_1) + d x_2 (x_3 + \xi_1) + \xi_2 s(x_1, x_2) + \cdots, \\
\dot{x}_3 &= -\rho_1 x_3 + e x_1^2 + f x_1 x_2 + g x_2^2 + \cdots,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
s(x_1, x_2) &= -\frac{\delta_1}{\Lambda} x_1 - \frac{1 + \delta_2 - \delta_1 \Lambda}{\Lambda^2} x_2, \quad a = -\frac{\delta_1 - (1 - \delta_1)\delta_2}{\Lambda \delta_1}, \\
b &= \frac{(\delta_1 - (1 - \delta_1)\delta_2)(\Lambda \delta_1 - (1 + \delta_2))}{\Lambda^2 \delta_1^2}, \quad c = \frac{\delta_2}{\Lambda}, \\
d &= \frac{\delta_2 (\Lambda \delta_1 - 1 - \delta_2)}{\Lambda^2 \delta_1}, \quad e = -\frac{\delta_1 m_{01}}{\Lambda^2}
\end{aligned}$$

以及

$$f = \frac{m_{01}(\delta_1(1 + 2\Lambda) - 1 - \delta_2)}{\Lambda^3}, \quad g = -\frac{m_{01}(1 + \Lambda)(\Lambda \delta_1 - 1 - \delta_2)}{\Lambda^4}.$$

最后, 应用坐标变换

$$\begin{aligned}
x_1 &= z_1, \\
x_2 &= z_2 - a z_1 (z_3 + \xi_1) - b z_2 (z_3 + \xi_1) - \xi_2 s(z_1, z_2), \\
x_3 &= z_3 + \frac{f}{2} z_1^2 + g z_2 z_1,
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 + \cdots, \\
\dot{z}_2 &= \epsilon_1 z_1 + \epsilon_2 z_2 - c z_1 z_3 + d' z_2 z_3 + \cdots, \\
\dot{z}_3 &= -\rho_1 z_3 + e z_1^2 + \cdots,
\end{aligned} \tag{C.4.8}$$

其中

$$c = \frac{\delta_2}{\Lambda}, \quad e = -\frac{\delta_1 m_{01}}{\Lambda^2}, \quad d' = -\frac{1 + \delta_1}{\Lambda^2},$$

引入小参数 $\varepsilon_{1,2}$ 是

$$\varepsilon_1 = -\frac{\xi_1 \delta_2 + \delta_1 \xi_2}{\Lambda}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{(1 + \delta_1)\xi_1 + (1 + \delta_2)\xi_2}{\Lambda^2}.$$

我们可尺度化小参数如下:

$$\epsilon_1 = \varepsilon^2, \quad \epsilon_2 = \mu\varepsilon, \quad \rho_1 = \rho\varepsilon.$$

消去三次项并尺度化变量 $z_1 = \dfrac{x\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{ce}}$, $z_2 = \dfrac{y\varepsilon^{5/2}}{\sqrt{ce}}$, $z_3 = \dfrac{z\varepsilon^2}{c}$, 我们得到下面的渐近规范形

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = x + \mu y - xz, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\rho z + x^2, \tag{C.4.9}$$

它与 Shimizu-Morioka 模型重合. □

C.4.# 50. 设在平衡态线性化的系统的 Jacobi 矩阵有三个零特征值. 此外, 设在中心流形上的系统具有对称性 $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$, 其中 y, z 是在特征向量上的坐标投影, x 是在伴随向量上的投影. 于是, 一般地, 系统可以化为下面的形式

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= x[\bar{\mu} - az(1 + g(x, y, z)) - a_1(x^2 + y^2)(1 + \cdots)] \\
&\quad - y[\bar{\alpha} + a_2 z(1 + \cdots) + a_3(x^2 + y^2)(1 + \cdots)], \\
\dot{z} &= -\bar{\beta} + z^2(1 + \cdots) + b(x^2 + y^2)(a + \cdots),
\end{aligned} \tag{C.4.10}$$

其中 $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ 和 $b \neq 0$. 这里 $\bar{\mu}, \bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 是小参数, g 和省略号表示在原点为零的项. 假设 $ab > 0$ 以及 $\tau^2 = \mu + a\sqrt{\beta}(1 + g(0, 0, -\sqrt{\beta})) > 0$, $\bar{\beta} > 0$. 由尺度化时间 $t \to \dfrac{s}{\tau}$, 改变变量

$$x \to x\sqrt{\frac{\tau^3}{ab}}, \quad y \to \tau y\sqrt{\frac{\tau^3}{ab}}, \quad z \to -\sqrt{\beta} + \frac{\tau^2}{a} z$$

并定义新参数 $\bar{\alpha} = \alpha\tau$ 和 $\bar{\beta} = \left(\dfrac{\beta\tau}{2}\right)^2$, 我们得到下面的系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= x(1 - z) - \alpha y + O(\tau), \\
\dot{z} &= -\beta z + x^2 + O(\tau),
\end{aligned} \tag{C.4.11}$$

其中 α 和 β 是参数, 且它们不再是小量. 去掉 τ 阶项我们得到 Shimizu-Morioka 模型. □

C.4.# 51. 除了上面情形的条件, 假设系统关于对合 $(x, y, z) \to (x, y, -z)$ 不变, 即它具有两个对称性. 于是规范化系统可写为

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= x[\bar{\mu} - az^2(1 + g(x, y, z^2)) - b(x^2 + y^2)(1 + \cdots)] \\
&\quad - y[\bar{\alpha} + a_1 z^2(1 + \cdots) + b_1(x^2 + y^2)(1 + \cdots)], \\
\dot{z} &= \bar{\beta} - cz^2(1 + \cdots) + d(x^2 + y^2)(a + \cdots).
\end{aligned} \tag{C.4.12}$$

假设 $c>0$ 和 $ad>0$. 在参数区域 $\tau^2=\bar{\mu}-a\bar{\beta}c\left(1+g\left(0,0,\frac{\bar{\beta}}{c}\right)\right)>0$ 和 $\beta>0$, 引入重正规化:

$$t\to\frac{s}{\tau},\ \ x\to x\tau\sqrt{\frac{c}{ad}},\ \ y\to\tau^2y\sqrt{\frac{c}{ad}},\ \ z\to\sqrt{\frac{\bar{\beta}}{c}+\frac{\tau^2}{a}}z$$

以及 $\bar{\alpha}=\tau\alpha,\bar{\beta}=\frac{\tau\beta}{2}$. 记 $B=\frac{bc}{ad}$ 并去掉 τ 阶项, 我们就得到下面的系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=x(1-z)-\alpha y+Bx^3,\\ \dot{z}&=-\beta(z-x^2).\end{aligned}\tag{C.4.13}$$

上面的系统之所以值得注意, 因为当 $r>1$ 时 Lorenz 方程将可化为它. 两个系统参数之间的关系为

$$\beta=\frac{b}{\sigma(r-1)},\quad \alpha=\frac{1+\sigma}{\sigma(r-1)},\quad B=\frac{b}{2\sigma-b}.$$

从上面的关系得知在 Lorenz 方程中正参数 (r,b,σ) 区域由平面 $\beta=0$ 和曲面 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{B}+1\right)$ 所围, $B\to 0$ 时它趋于 $\beta=0$.

我们还应该注意, Shimizu-Morioka 系统是形如 (C.4.13) 的 Lorenz 系统的特殊情形 (即 $B=0$). □

C.4.# 52. **具有三个乘子 +1 的周期轨道分支**. 在中心流形上我们引入坐标 (x,y,z,ψ), 其中 ψ 是角坐标, (x,y,z) 是法坐标 (见 3.10 节). 假设系统在变换 $(x,y)\to(-x,-y)$ 下不变, 截断到二次项的规范形为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=x(\bar{\mu}-az)-y(\bar{\alpha}+a_2z),\\ \dot{z}&=-\bar{\beta}+z^2+b(x^2+y^2),\\ \dot{\psi}&=1,\end{aligned}\tag{C.4.14}$$

其中假设周期轨道的周期为 1. 因为上面系统的前面三个方程与第四个方程无关, 因此所得规范形类似于 Shimizu-Morioka 系统. □

C.4.# 53. 下面我们 (按照 [185]) 叙述**一系列**渐近规范形, 它们刻画具有离散对称性的系统在稳定性边界附近三重退化平衡态的轨线性态. 当动力系统有平衡态, 其相应的线性化问题有三重零特征值时, 我们就说存在**三重不稳定性**. 在这种情形, 分析化为在中心流形上的三维系统. 假设 (x,y,z) 是三维中心流形的坐标, 分支平衡态在原点. 我们也假设我们的系统关于变换 $(x,y,z)\leftrightarrow(-x,-y,z)$ 是等价的.

我们注意, 所列出的系统具有自然的“物理”意义, 并出现在某些现实应用中, 例如见上面的激光方程. 因此, 这个方法可作为对非线性项中无关项的消除, 以及对关于这种性态的特殊细节有影响的非线性项的选择的处方.

除了对称性假设以外, 我们也假设系统在原点 O 附近限制在不变平面 $z=0$ 上的线性部分有完全 Jordan 块. 于是系统在中心流形上的限制局部地可写为形式

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(az + F(x^2, xy, y^2, z)) + yG(y^2, z), \\ \dot{z} = H(x^2, xy, y^2, z), \end{cases} \tag{C.4.15}$$

其中 $H(0,0,0,z)$ 和 $F(0,0,0,z)$ 都不包含线性项.

考虑这个系统下面形式的三参数扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\mu_1 + az + F(x^2, xy, y^2, z)) + y(-\mu_2 + G(y^2, z)), \\ \dot{z} = -\mu_3 z + H(x^2, xy, y^2, z), \end{cases} \tag{C.4.16}$$

其中 $\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)$ 是小参数, 函数 F, G 和 H 也依赖于 μ.

我们也假设

$$a \neq 0. \tag{C.4.17}$$

于是显然 z – 坐标变换将 (C.4.16) 化为下面的形式 (具某新函数 G 和 H)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\mu_1 - z) + y(-\mu_2 + G(y^2, z)), \\ \dot{z} = -\mu_3 z + H(x^2, xy, y^2, z). \end{cases} \tag{C.4.18}$$

作变量和时间的尺度化

$$x \to \delta_x x, \quad y \to \delta_y y, \quad z \to \delta_z z, \quad t \to \frac{t}{\tau},$$

其中 δ_x, δ_y, δ_z 和 τ 是某小量. 假设 $\mu_1 \neq 0$ 并令

$$\delta_y = \tau \delta_x, \quad \delta_z = \tau^2 = |\mu_1|.$$

于是 (C.4.18) 取形式

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\pm 1 - z) - \lambda y + O(\tau), \\ \dot{z} = -\alpha z + \dfrac{H(\delta_x^2 x^2, \tau \delta_x^2 xy, \tau^2 \delta_x^2 y^2, \tau^2 z)}{\tau^3}, \end{cases} \tag{C.4.19}$$

其中 α 和 λ 是新尺度化参数, 它们不再是小量:

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sqrt{|\mu_1|}}, \quad \lambda = \frac{\mu_2}{\sqrt{|\mu_1|}}.$$

渐近规范形是 $\mu \to 0$ 时系统 (C.4.19) 的有限极限. 注意尺度因子 δ_x 和 τ 之间的比例的不同选择得到不同的规范形.

在 (C.4.19) 的最后一个方程中, $\tau \to 0$ 时包含 z^2, y^3 和 yz 的项趋于零. 因此, 去掉小项后 (C.4.19) 化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\pm 1 - z) - \lambda y, \\ \dot{z} = -\alpha z + \dfrac{\delta_x^2 x^2 H_1(\delta_x^2 x^2)}{\tau^3} + \dfrac{\delta_x^2 xy H_2(\delta_x^2 x^2)}{\tau^2} + \dfrac{\delta_x^2 y^2 H_3(\delta_x^2 x^2)}{\tau} + \dfrac{\delta_x^2 z x^2 H_4(\delta_x^2 x^2)}{\tau} \end{cases} \tag{C.4.20}$$

(C.4.20) 的右端是有限的, 即如果对扰动参数 μ_1, μ_2 和 μ_3 的零值, 函数 H_i 的 Taylor 展开以 x^{2m_i} 开始, 则下面的不等式必须成立

$$\frac{\delta_x^{2(m_1+1)}}{\tau^3} < \infty,$$

$$\frac{\delta_x^{2(m_2+1)}}{\tau^2} < \infty,$$

$$\frac{\delta_x^{2(m_3+1)}}{\tau} < \infty,$$

$$\frac{\delta_x^{2(m_4+1)}}{\tau} < \infty.$$

由此, 我们可以选择 τ 使得

$$\tau \sim \delta_x^{\beta}, \tag{C.4.21}$$

其中

$$\beta = \min\left\{\frac{2}{3}(m_1+1), m_2+1, 2(m_3+1), 2(m_4+1)\right\}. \tag{C.4.22}$$

例如, 在 $H_i(0) \neq 0$ $(i = 1, \cdots, 4)$ 的最一般情形下, (C.4.21) 和 (C.4.22) 中的指数 $\beta = \dfrac{2}{3}$. 于是系统 (C.4.20) 化为形式

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\pm 1 - z) - \lambda y, \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 H_1(0) + O(\tau). \end{cases} \tag{C.4.23}$$

在 $\tau \to 0$ 时取极限, 这个系统就变成 Shimizu-Marioka 模型, 其中参数 α 和 λ 可取任意有限值.

我们现在考虑额外退化性: $H_1(0)=0$ 和 $H_1'(0)\neq 0$. 为了研究在这情形的分支, 我们应该引入新的独立控制参数, 它是 H_1 的 Taylor 展开中的常数项. 如果我们按照关系 (C.4.22) 令 $\beta=1$, 则系统 (C.4.20) 化为下面的渐近形式:

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=x(\pm 1-z)-\lambda y, \\ \dot{z}=-\alpha z+x^2\tilde{h}_{10}+H_2(0)xy. \end{cases} \tag{C.4.24}$$

这等价于 Lorenz 方程. 其中 $\tilde{h}_{10}=\dfrac{H_1(0)}{\tau}$ 是第三个尺度化控制参数, 它可取任何有限值.

接下来的退化性 $H_2(0)=0$, $H_2'(0)\neq 0$, 它按下面方式修改, (C.4.24) 中的第三个方程为

$$\dot{z}=-\alpha z+x^2\tilde{h}_{10}+\tilde{h}_{20}xy+H_1'(0)x^4, \tag{C.4.25}$$

其中 $\tilde{h}_{10}=\dfrac{H_1(0)}{\tau^{3/2}}$ 和 $\tilde{h}_{20}=\dfrac{H_2(0)}{\tau^{1/2}}$. 这里 $\beta=\dfrac{4}{3}$.

重复这个步骤我们可以得到渐近规范形的一个分层. 记

$$H_i(x^2)=\sum_j^{\infty} H_{ij}x^{2j}.$$

我们假设在分支时刻, H_{ij} $(j=0,\cdots,m_i-1)$ 的值为零. 如前, 我们可以将这些非零 H_{ij} 作为额外的独立小参数处理.

显然在尺度化系统 (C.4.20) 中存在一些非零系数的项, 它们对应于使得 (C.4.22) 达到极小的 m_i. 所有高阶项在 $\tau \to 0$ 时极限为零. 对非零参数值出现在 H_i 中次数低于 $2m_i$ 的项, 在尺度化后也还幸存. 它们的规范化系数作为独立参数出现, 可假设取任意有限值.

因此, 如果我们去掉所有渐近于零的项, 系统 (C.4.20) 取形式

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=x(\pm 1-z)-\lambda y, \\ \dot{z}=-\alpha z+x^2\widetilde{H}_1(x^2)+xy\widetilde{H}_2(x^2)+y^2\widetilde{H}_3(x^2)+zx^2\widetilde{H}_4(x^2), \end{cases} \tag{C.4.26}$$

其中 $\widetilde{H}_i$ 是使得下面关系成立的 n_i 次多项式

$$\begin{aligned} &\max\left\{\frac{2}{3}(n_1+1), n_2+1, 2(n_3+1), 2(n_4+1)\right\} \\ &=\frac{1}{\beta}<\min\left\{\frac{2}{3}(n_1+2), n_2+2, 2(n_3+2), 2(n_4+2)\right\} \end{aligned} \tag{C.4.27}$$

(如果某个 $\widetilde{H}_i$ 恒等于零, 则令 $n_i=-1$). $\widetilde{H}_{ij}$ 的系数定义如下:

$$\tilde{h}_{ij}=\frac{H_{ij}}{T^{s_i-2(j+1)/\beta}},$$

其中 $s_1=3, s_2=2, s_3=s_4=1$.

由此直接从 (C.4.27) 得知 $n_3=n_4$, 即 $\widetilde{H}_3$ 和 $\widetilde{H}_4$ 的次数永远相等. 因此, 由 (C.4.26) 和 (C.4.27) 给出的渐近规范形的系列可按公共次数 $n(=n_3=n_4)$ 的增加次序排列.

这个系列的第一个就是由 (C.4.23), (C.4.24) 和 (C.4.25) 给出的对应于 $n=-1$ 的系统. 对每个较大的 n 值存在四个如下的子情形. 每个相继的情形对应于一个额外的退化性. 这是个循环列: 第四个情形以后我们又回到开始的 $n=n+1$ 的情形, 等等.

(1) $n_1=3n+2,\ n_2=2n+1$. 在分支时刻, H_3 和 H_4 中前面 $(n-1)$ 个系数都为零, H_2 和 H_1 中前面 $2n$ 和 $(3n+1)$ 个系数分别等于零.

(2) $n_1=3n+3,\ n_2=2n+1$. 在分支时刻, H_3 和 H_4 中前面 n 个系数都为零, H_2 和 H_1 中前面 $(2n+1)$ 和 $(3n+2)$ 个系数分别等于零.

(3) $n_1=3n+3,\ n_2=2n+2$. 在分支时刻, H_3 和 H_4 中前面 n 个系数都为零, H_2 和 H_1 中前面 $(2n+1)$ 和 $(3n+3)$ 个系数分别等于零.

(4) $n_1=3n+4,\ n_2=2n+2$. 在分支时刻, H_3 和 H_4 中前面 n 个系数都为零, H_2 和 H_1 中前面 $(2n+2)$ 和 $(3n+3)$ 个系数分别等于零. □

C.5 稳定性边界上的性态

C.5.# 54. 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x-y-a(x^2+y^2)x,\\ \dot{y}&=x+y-a(x^2+y^2)y\end{aligned}\tag{C.5.1}$$

在 $a=0$ 从无穷远分支出稳定极限环. 在这个值, 系统变为线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x-y,\\ \dot{y}&=x+y,\end{aligned}\tag{C.5.2}$$

它有在原点的不稳定焦点. 我们可以用 Lyapunov 函数 $V(x,y)=x^2+y^2$ 验证所有的轨道都发散到无穷 (即无穷远点是稳定的), 因为 Lyapunov 函数对时间的导数 $\dot{V}(x,y)=2(x^2+y^2)$ 为正, 因此每一条等位线 $(x^2+y^2)=C$ 都是无切的, 且当时间增加时, 每一条轨线必须流向每一条曲线 C 的外面.

当 $a \neq 0$ 时, 我们有

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = 2(x^2+y^2)(1-a(x^2+y^2)).$$

显然当 $x^2+y^2 > \frac{1}{a}$ 时, $\dot{V}\ (x,y) < 0$; 当 $V < \frac{1}{a}$ 时, $\dot{V}\ (x,y) > 0$. 因此 $x^2+y^2 = \frac{1}{a}$ 是稳定不变曲线 (极限环), 所有轨线 (除了在原点的平衡态) 当 $t \to +\infty$ 时都趋于它. □

C.5.# 55. [25] 解释系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x(ax^2+y^2-1), \\ \dot{y} &= -ay - y(ax^2+y^2-1), \end{aligned} \tag{C.5.3}$$

在图 C.5.1 中的稳定极限环当 $a \to +0$ 时是如何演变的. □

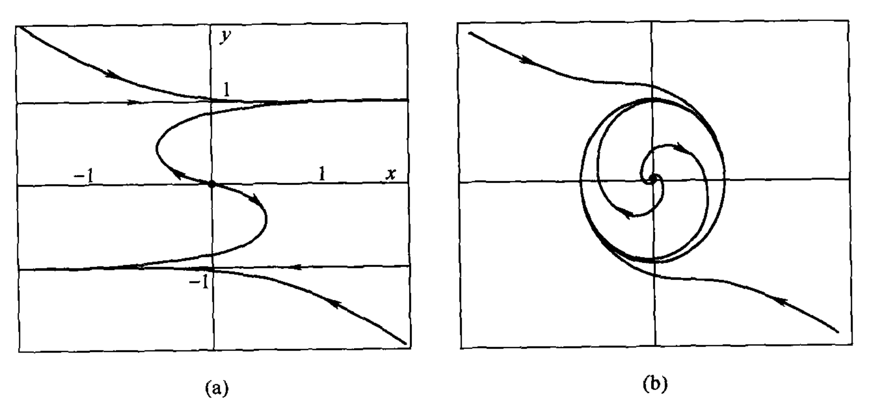


图 C.5.1　在 (C.5.3) 中的极限环, 对 $a > 0$ (b) 以及在 $a = 0$ (a).

C.5.# 56. 求 Khorozov-Takens 规范形

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x^3 - x^2 y \end{aligned}$$

的 Lyapunov 函数. □

C.5.# 57. 揭示 y 的三次项对系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ay + x - x^3 - by^3 \end{aligned}$$

渐近稳定的作用: 寻找适当的 Lyapunov 函数. 其中 a 和 b 为某控制参数. □

C.5.# 58. 证明当 $r<1$, $\sigma>0$ 和 $b>0$ 时, Lorenz 方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-\sigma(x-y),\\ \dot{y}&=rx-y-xz,\\ \dot{z}&=-bz+xy\end{aligned}\tag{C.5.4}$$

解的大范围渐近稳定性.

下面的函数

$$V_0(x,y,z)=\frac{1}{2}(x^2+\sigma y^2+\sigma z^2)$$

是 Lyapunov 函数, 因为它对时间的导数

$$\dot{V}_0=-\sigma(x^2-(1-r)xy+y^2+bz^2)$$

是负定二次型. □

C.5.# 59. 证明 Lorenz 系统的无穷远点是不稳定的.

解 函数

$$V(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+(z-r-\sigma)^2$$

对时间的导数是

$$\dot{V}(x,y,z)=x\dot{x}+y\dot{y}+(z-\sigma-r)\dot{z}=-\sigma x^2-y^2-b\left(z-\frac{r+\sigma}{2}\right)^2+\frac{b}{4}(r+\sigma)^2.$$

条件$\dot{V}=0$确定一个椭球面, 在它的外面导数为负. 因此, Lorenz 系统所有 "外面的" 正半轨线流向曲面

$$\sigma x^2+y^2+b\left(z-\frac{r+\sigma}{2}\right)^2=\frac{b}{4}(r+\sigma)^2.$$ □

C.5.# 60. 证明由

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a\left(y+\frac{x}{6}-\frac{x^3}{6}\right),\\ \dot{y}&=x-y+z,\\ \dot{z}&=-by\end{aligned}\tag{C.5.5}$$

模拟的 Chua 电路的无穷远点不稳定. 利用 Lyapunov 函数

$$V_0(x,y,z)=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2b},$$

并对大 x 和 y 分析它对时间的导数

$$\dot{V}_0=\frac{x\dot{x}}{a}+y\dot{y}+\frac{z\dot{z}}{b}=\frac{1}{6}(x^2-x^4)+2xy-y^2.$$ □

C.5.# 61. 考虑下面的 Bogdanov-Takens 规范形的扰动

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu y - \varepsilon^2 x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + Q(x,y), \end{aligned} \tag{C.5.6}$$

其中 μ 和 ε 是小量, $Q(x,y)$ 从三次项开始. 我们可以看到对上面的系统在 $\mu=0$ 和小 $\varepsilon \neq 0$, 原点 $O(0,0)$ 是弱焦点. 特征根是 $\pm i\varepsilon$. 为了确定弱焦点的稳定性, 我们首先尺度化变量 $x \mapsto \varepsilon^2 x, y \mapsto \varepsilon^3 y$ 和时间尺度化 $t \mapsto \varepsilon^{-1}t$. 于是系统取形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + a_{20}x^2 + \varepsilon a_{11}xy + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{C.5.7}$$

下面的正规化坐标变换

$$x_{\text{new}} = x - \frac{a_{20}}{3}(x^2+2y^2) + \frac{\varepsilon}{3}a_{11}xy, \quad y_{\text{new}} = \dot{x}_{\text{new}}$$

将系统化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + 2a_{20}^2\left(x^3 - \frac{4}{3}xy^2\right) + \varepsilon a_{20}a_{11}\left(5x^2y - \frac{4}{3}y^3\right) + O(\varepsilon^2) + \cdots. \end{aligned}$$

这里省略号表示高于3次的项. 因此我们消去了所有二次项 (直到 $O(\varepsilon^2)$ – 项), 现在第一个 Lyapunov 量可立刻计算. 为此, 我们引入复坐标 $z = x+iy$, 系统变成

$$\dot{z} = -iz + \left(\frac{\varepsilon}{8}a_{20}a_{11} + i\frac{5}{12}a_{20}^2 + O(\varepsilon^2)\right)z^2z^* + \cdots,$$

其中省略号表示可忽略的三次项和更高次项, 第一个 Lyapunov 量是 z^2z^* 的系数的实部, 即等于

$$L_1 = \frac{\varepsilon}{8}[a_{20}a_{11} + O(\varepsilon)].$$

由此得知, 对小的 ε, 当 $a_{20}a_{11} < 0$ 时弱焦点稳定, $a_{20}a_{11} > 0$ 时不稳定. 在 $\varepsilon \neq 0$ 从弱焦点只产生一个极限环, 只要 $a_{20}a_{11} \neq 0$. □

C.5.# 62. 让我们给出三维系统

$$\dddot{\xi} + P\ddot{\xi} + Q\dot{\xi} + R\xi = f(\xi,\dot{\xi},\ddot{\xi})$$

在弱焦点的第一个 Lyapunov 量的一般公式, 其中 f 是非线性项, 即在原点的 Taylor 展开从二次项开始, 且系数 P,Q,R 满足关系式

$$PQ = R, \quad Q > 0.$$

记 $y \equiv (y_1, y_2, y_3) = (\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi})$, 我们可将上面的方程重写为

$$\dot{y} = Ay + f(y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -R & -Q & -P \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征值是 $-P$ 和 $\pm i\omega$, 其中 $\omega^2 = Q$. 对应的特征向量是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -P \\ P^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -Q \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \\ -Q \end{pmatrix},$$

伴随矩阵的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P\omega \\ \omega - iP \\ -i \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} P\omega \\ \omega + iP \\ i \end{pmatrix}.$$

因此, 我们可以引入新变量 $u \in \mathbb{R}^1$ 和 $z \in \mathbb{C}^1$ 如下:

$$y = u \begin{pmatrix} 1 \\ -P \\ P^2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -Q \end{pmatrix} + z^* \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \\ -Q \end{pmatrix}.$$

导数 $\dot{u}$ 和 $\dot{z}$ 按下面规则计算

$$\dot{u} = \frac{1}{Q + P^2}(Q\dot{y}_1 + \dot{y}_3), \quad \dot{z} = \frac{1}{2P\omega}(P\omega\dot{y}_1 + (\omega - iP)\dot{y}_2 - i\dot{y}_3),$$

因此我们得到的系统, 它的线性部分已经是对角形

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -Pu + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z z^* + \cdots, \\ \dot{z} &= i\omega z + \beta_1 z^2 + \beta_2 z z^* - \beta_1^* z^{*2} + \gamma u z - \gamma^* u z^* + \delta z^2 z^* + \cdots, \end{aligned} \tag{C.5.8}$$

其中省略号表示对计算第一个 Lyapunov 量可忽略的非线性项. 如果我们将非线性函数展开到 y 的三次项:

$$f(y) = \sum c_{kj} y_j y_k + \sum d_{kjl} y_k y_j y_l + \cdots, \tag{C.5.9}$$

则 (C.5.8) 中的系数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 求得如下:

$$
\begin{aligned}
(Q+P^2)\alpha_1 &= 2iP\omega\beta_1 = \sum c_{kj}(i\omega)^{k+j-2},\\
(Q+P^2)\alpha_2 &= 2iP\omega\beta_2 = -\sum((-1)^k+(-1)^j)c_{kj}(i\omega)^{k+j-2},\\
\gamma &= \frac{1}{2}\sum c_{kj}((-P)^{k-2}(i\omega)^{j-2}+(-P)^{j-2}(i\omega)^{k-2}),\\
\delta &= -\frac{1}{2PQ^2}\sum d_{kjl}(i\omega)^{k+j+l}((-1)^k+(-1)^j+(-1)^l).
\end{aligned}
\tag{C.5.10}
$$

系统 (C.5.8) 有中心流形

$$
u = \frac{\alpha_1}{P+i\omega}z^2 + \frac{\alpha_2}{P}zz^* + \cdots .
$$

在中心流形上系统呈现形式

$$
\dot{z} = i\omega z + \beta_1 z^2 + \beta_2 zz^* - \beta_1^* z^{*2} + \left(\gamma\frac{\alpha_2}{P} - \gamma^*\frac{\alpha_1}{P+i\omega} + \delta\right)z^2 z^* + \cdots . \tag{C.5.11}
$$

正规化变换

$$
z_{\text{new}} = z + i\frac{\beta_1}{\omega}z^2 - i\frac{\beta_1}{\omega}zz^* + i\frac{\beta_1^*}{3\omega}z^{*2}
$$

去掉所有二次项, 故在中心流形上系统取形式

$$
\dot{z} = i\omega z + (L_1 + i\Omega_1)z^2 z^* + \cdots ,
$$

其中

$$
L_1 + i\Omega_1 = \frac{i}{\omega}\left(\beta_1\beta_2 - |\beta_1|^2 - \frac{2}{3}|\beta_2|^2\right) + \gamma\frac{\alpha_2}{P} - \gamma^*\frac{\alpha_1}{P+i\omega} + \delta. \tag{C.5.12}
$$

由定义, L_1 是**第一个** Lyapunov 量. □

C.5.# 63. 我们应用上面的算法确定 Lorenz 模型中结构不稳定平衡点 $O_{1,2}$ 的稳定性, 见 C.2 节. 为了确定在这些平衡点的稳定性边界上, 对应的 Andronov-Hopf 分支是亚临界还是超临界, 我们将计算第一个 Lyapunov 量 L_1 的解析表达式.

按照 [165,186], 首先将原系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\sigma(x-y),\\
\dot{y} &= rx - y - xz,\\
\dot{z} &= -bz + xy
\end{aligned}
$$

化为单个三阶微分方程

$$
\dddot{x} + (\sigma+b+1)\ddot{x} + b(1+\sigma)\dot{x} + b\sigma(1-r)x = \frac{(1+\sigma)\dot{x}^2}{x} + \frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} - x^2\dot{x} - \sigma x^3. \tag{C.5.13}
$$

然后，对 $O_{1,2}$ 分别引入新变量 $\xi = x - x_0$，其中 $x_0 = \pm\sqrt{b(r-1)}$. 我们强调，在非线性项中只有二次项和三次项是需要的，因此 $(x_0+\xi)^{-1}$ 表达式中的一次项对求第一个 Lyapunov 量已足够了. 考虑到所需要的项，方程 (C.5.13) 可重写为

$$\dddot{\xi} + (\sigma+b+1)\ddot{\xi} + [b(1+\sigma)+x_0^2]\dot{\xi} + [b\sigma(1-r)+3\sigma x_0^2]\xi$$
$$= -3\sigma x_0\xi^2 - 2x_0\xi\dot{\xi} + \frac{1+\sigma}{x_0}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{x_0}\dot{\xi}\ddot{\xi} - \sigma\xi^3 - \xi^2\dot{\xi} - \frac{1+\sigma}{x_0^2}\xi\dot{\xi}^2 - \frac{1}{x_0^2}\xi\dot{\xi}\ddot{\xi} + \cdots. \tag{C.5.14}$$

O_1 和 O_2 的稳定性边界是

$$r = \sigma(\sigma+b+3)(\sigma-b-1)^{-1}.$$

由上面计算第一个 Lyapunov 量的算法得

$$L_1 = b[p^3q(p^2+q)(p^2+4q)(\sigma-b-1)]^{-1}B, \tag{C.5.15}$$

其中

$$B = [9\sigma^4 + (20-18b)\sigma^3 + (20b^2+2b+10)\sigma^2$$
$$-(2b^3-12b^2-10b+4)\sigma - b^4 - 6b^3 - 12b^2 - 10b - 3].$$

在稳定性边界，不等式 $\sigma > b+1$ 满足. 利用变换 $\sigma = \sigma_* + b + 1$，$B$ 的表达式变成 σ_* 和 b 的正系数多项式. 因此，如果 $\sigma_* > 0$ 和 $b > 0$，则 $L_1 > 0$. 从而，两个平衡点 $O_{1,2}$ 在稳定性边界上都不稳定 (鞍 – 焦点). 按照第 14 章给出的定义，这个边界本身是危险边界. 因此，对应的 Andronov-Hopf 分支是亚临界的. □

C.5.# 64. 计算 Chua 电路 (C.5.5) 中的第一个 Lyapunov 量. 对 $c_1 = c_3 = \frac{1}{6}$ 验证它在点 $(a \simeq 1.728\,86, b \simeq 1.816\,786)$ 为零，以 $L_1 = 0$ 表示图 C.2.1 中的 Andronov-Hopf 曲线. 这是余维 2 点，鞍 – 结点周期轨道曲线从此点出发. □

C.5.# 65. 求将 Shimizu-Marioka 系统 (C.2.25) 化为下面三阶微分方程

$$\dddot{x} + (a+b)\ddot{x} + ab\dot{x} - bx + x^3 - \frac{a}{x}\dot{x}^2 - \frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} = 0 \tag{C.5.16}$$

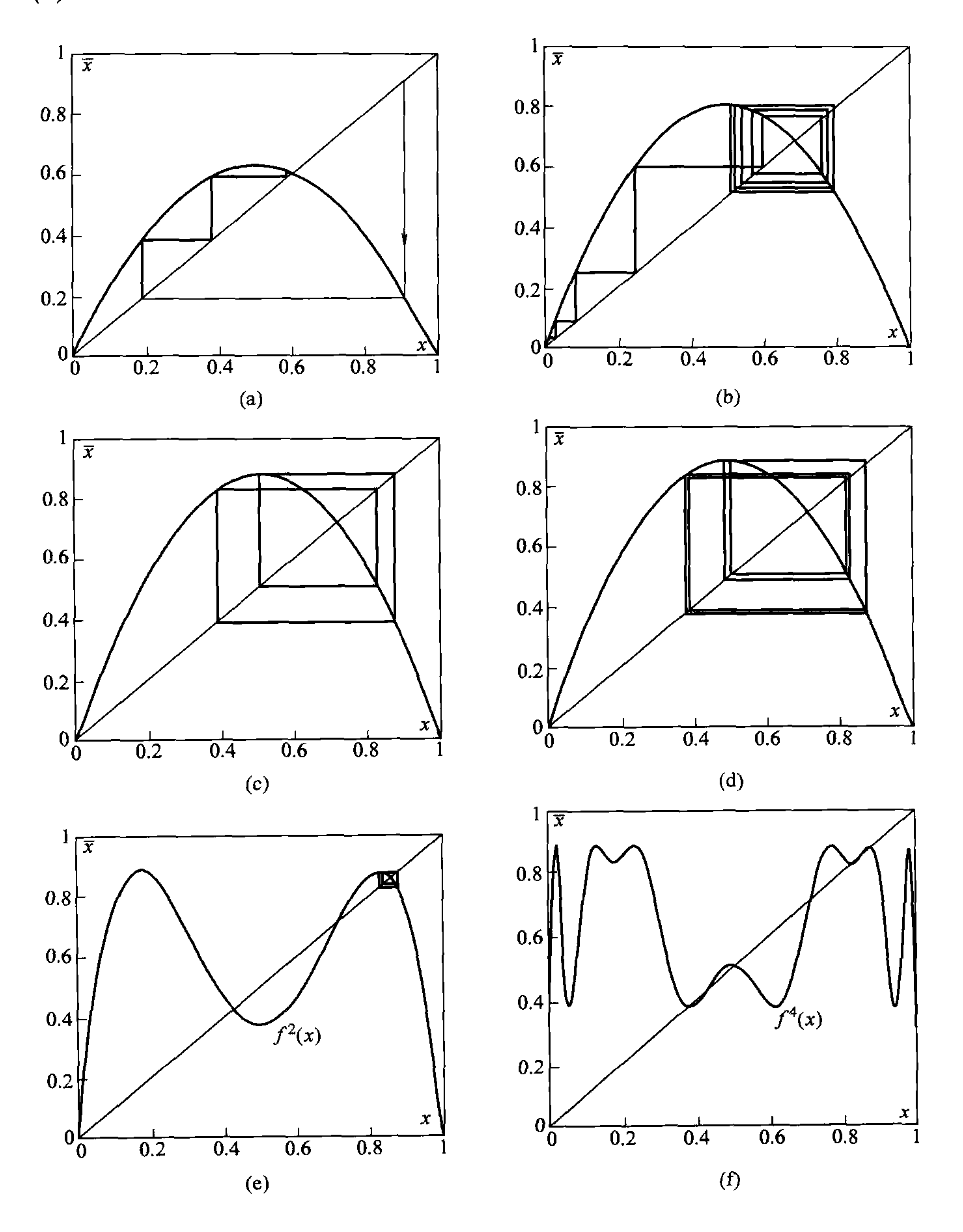
时的第一个 Lyapunov 量的表达式. 证明在由 $(a+b)a-2=0$ 给出的 Andronov-Hopf 分支曲线上的点 $(a \simeq 1.359, b \simeq 0.1123)$ 的右边 (左边)，这个量是负 (正) 的. □

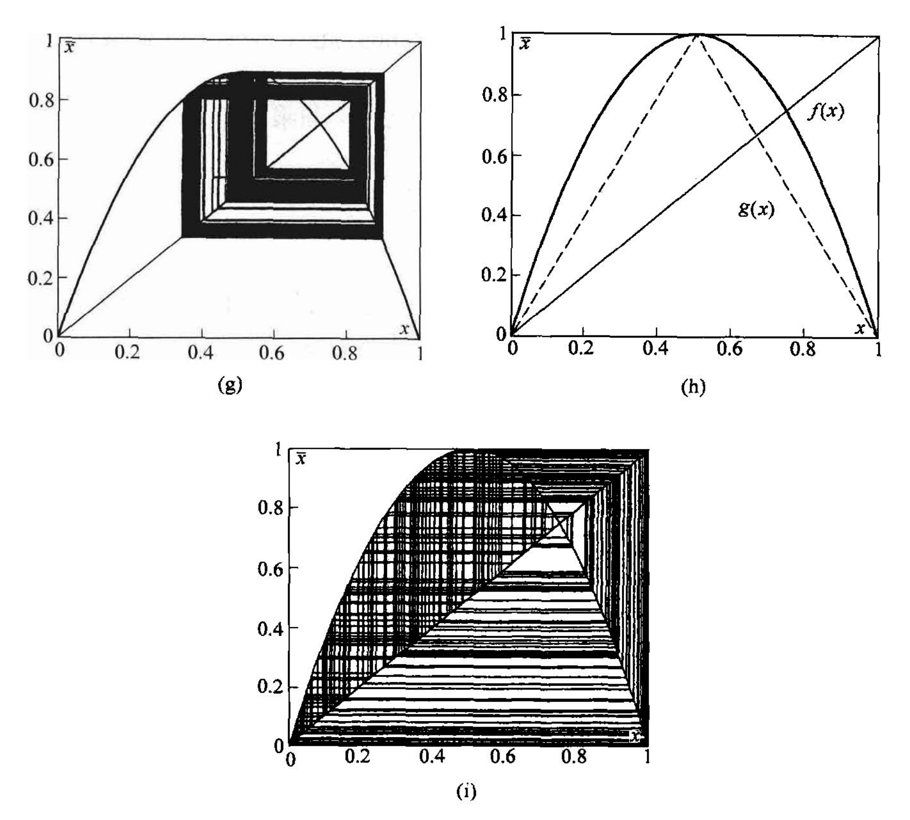
C.6 不动点分支和周期轨道分支

C.6.# 66. 考虑 **logistic 映射**

$$\overline{x} = ax(1-x) \equiv f(x),$$

其中 $0 < a < 4$ 以及 $x \in I = [0,1]$. 当 $0 < a < 1$ 时原点是唯一稳定不动点. 在 $a = 1$ 它是半稳定的, 因为 $f'(0) = 1$. 当 a 增加时它变成不稳定, 从原点分支出另一个不动点 $O_1 \left(x_1 = \dfrac{a-1}{a}\right)$ (因此我们在这里有超临界分支). 当 $1 < a \leqslant a_1 = 3$ 时 O_1 稳定 [见图C.6.1(a)]. 在 $a = 3$, 当 $f'(O_1) = a - 2ax_1 = -1$ 时它有翻转分支. 在这一点第一个 Lyapunov 量等于 $-\dfrac{1}{6}\left(f'''(O_1) + \dfrac{3}{2}f''(O_1)^2\right) = -\dfrac{2}{3}a_1 = -2$. 由于它是负的, 在 $a = 3$ 这点渐近稳定. 因此, 当 a 超过 3 时, 从 O_1 分支出周期2稳定环 C_2, 如图 C.6.1(b) 所示.





(g)　(h)　(i)

图 C.6.1　logistic 映射的倍周期.

周期 2 环是由一对周期 2 点

$$x_2^{(1,2)} = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2-2a-3}}{2a}$$

组成, 它是方程 $x = f^2(x)$ 对应异于 O 和 O_1 的根. 直接计算这个环的乘子是 $f'(x_2^{(1)}) \cdot f'(x_2^{(2)})$, 这显示当 $3 < a < 1+\sqrt{6}$ 时环稳定. 此外, 这个乘子当 $3 < a < 1+\sqrt{5}$ 时为正, 当 $1+\sqrt{5} < a$ 时为负, 但绝对值仍小于 1. 当 $a > 1+\sqrt{6}$ 时, 这个环变成排斥的, 它的稳定性切换到周期 4 环 C_4, 如图 C.6.1(c) 所示. 当这个环在 $a = a_3 \simeq 3.54$ 通过翻转分支时产生周期 8 环, 等等 [见图C.6.2(d)—(f)].

注意, 对这个 logistic 映射的任何周期轨道的翻转分支, 它的第一个 Lyapunov 量总是负的. 事实上, Schwarz 导数

$$S(f)(x) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

在映射定义的区间 [0,1] 上处处为负. 容易验证如果对某映射处处有$S(f) < 0$, 则处处也有 $S(f \circ f \circ \cdots \circ f) < 0$, 即这个映射每一个幂为负. 还要指出 $\frac{1}{6}S(f)$与第一个 Lyapunov 量在不动点于翻转分支时刻 (当 $f'(x) = -1$) 相等.

这个倍周期分支序列终止在近似值 $a \simeq 3.569$, 此后 logistic 映射具有混沌性态, 见图 C.6.1 (g) 和 (i).

Feigenbaum [170] 指出, 分支值 a_n, $n = 1, 2, \cdots$ 与乘子

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \simeq 4.669\ 20$$

按等比数列渐近地增加. □

C.6.# 67. 求对应于图 C.6.1(h) 中所示的情况的临界值 a. 这个映射这时能否有稳定轨道? 要回答这个问题, 首先要将它化为分段线性映射.

分别计算对应于周期 16, 32 轨道的翻转分支的值 a_n. 求这些环的最大 x- 坐标, 并将它们画在图 C.6.2 上. □

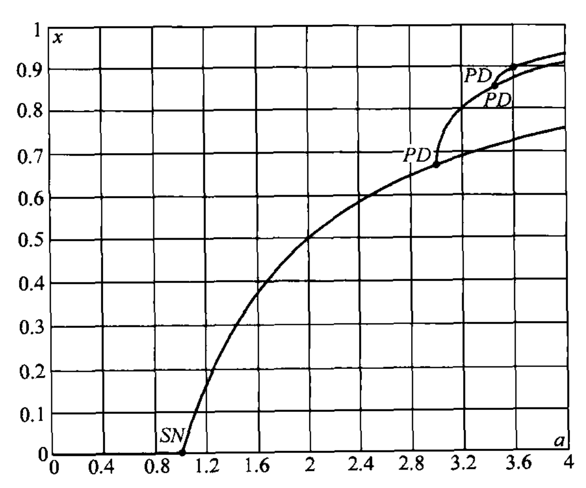


图 C.6.2 logistic 映射在倍周期过程中的 $(x-a)$ 分支图.

C.6.# 68. 研究映射

$$\overline{x} = x + x(a(1-x) - b(1-x)^2) = f(x),$$

其中 a 和 b 是某正参数. 求它的不动点, 并探测对应的稳定性边界. 确定不动点和周期2环在临界情形的渐近稳定性. □

C.6.# 69. 研究映射 $\overline{x} = \mu_1 + Ax^{1+\mu_2}$ 和 $\overline{x} = \mu_1 - \mu_2 x^{\nu} + x^{2\nu}$, 其中 $0 < \nu < 1$ 和 $|\mu_1| \ll 1$. 分别考虑子情形 $0 < \nu < \frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2} < \nu$. 在 $\nu = \frac{1}{2}$ 会发生什么? 分析两个映射 $\overline{x} = (\mu_1 + A|x|^{1+\mu_2})\,\mathrm{sign}(x)$ 和 $\overline{x} = (\mu_1 - \mu_2|x|^{\nu} + |x|^{2\nu})\,\mathrm{sign}(x)$, $|\mu_{1,2}| \ll 1$ 中的对称周期点分支. 这种映射出现在余维 2 同宿分支的研究中 (见 13 章). □

C.6.# 70. 考虑 Hénon 映射

$$\overline{x} = y, \quad \overline{y} = a - bx - y^2.$$

这个映射是阐明混沌性态的典范例子. 对某些参数值, Hénon 映射模拟创造 Smale 马蹄的机制, 如图 C.6.3 所示. 映射和它的逆

$$y = \overline{x},$$
$$x = \frac{a - \overline{y} - \overline{x}^2}{b},$$

对 $b \neq 0$ 有定义.

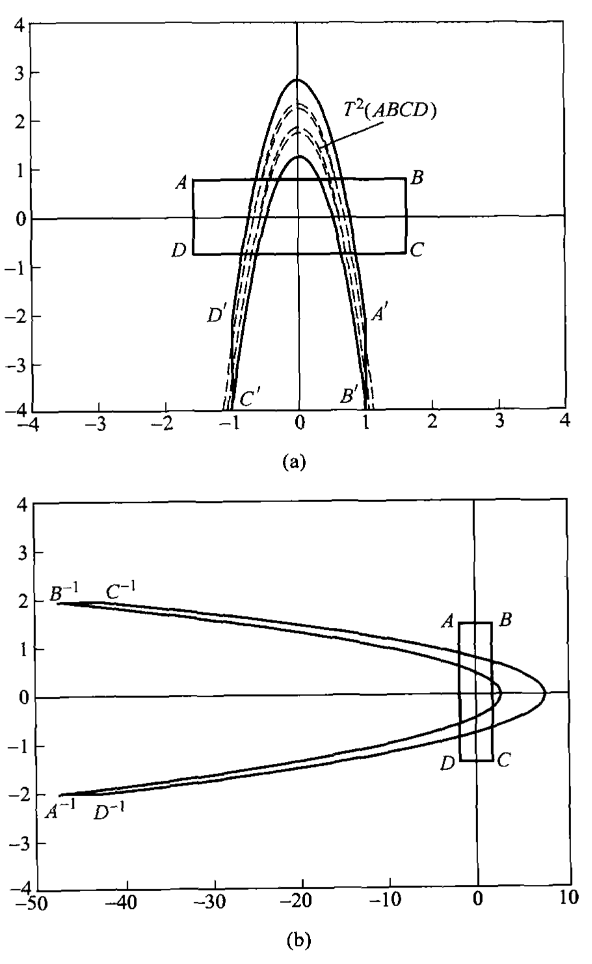


图 C.6.3　对 $a = 2$ 和 $b = 0.4$, Hénon 映射以及它的逆映射中的马蹄.

Hénon 映射的 Jacobi 是常数且等于 b. 因此, 当 $b > 0$ 时 Hénon 映射在平面中保持定向, 但是 $b < 0$ 时反向. 也注意, 如果 $|b| < 1$, 映射压缩面积, 故它的任何不动点或者周期点的乘子之积的绝对值小于 1. 从而在这种情形, 映射不可能有完全不稳定的周期轨道 (只有稳定点和鞍点). 反之, 如果 $|b| > 1$, 则没有稳定轨道可存在. 当 $|b| = 1$ 时, 映射变成保守的. 在 $b = 0$, Hénon 映射退化为上面的 logistic 映射, 因此,

当 b 充分小时应该期望不动点有某些类似的分支.

接下来, 我们求 Hénon 映射的不动点并分析当参数 a 和 b 变化时它们是如何分支的. 分支图如图 C.6.4 所示. 它包含三条分支曲线: $SN: a=-\frac{1}{4}(1+b)^2, PD: a=\frac{3}{4}(1+b)^2$ 以及 $AH: b=1, -1<a<3$. 对 $(a,b)\in SN$, 映射有乘子为 $+1$ 的不动点; 当 $|b|<1$ 时, 这点是有吸引扇形的鞍 - 结点, 当 $|b|>1$ 时, 这是一个有排斥区域的鞍 - 结点. 对 $(a,b)\in PD$, 映射有乘子为 -1 的不动点; 当 $|b|<1$ 时, 另一个乘子的绝对值小于 1, 且第一个 Lyapunov 量为负, 因此分支点稳定. 对 $|b|>1$, 另一个乘子的绝对值大于 1, 且第一个 Lyapunov 量为正, 故分支点是完全不稳定 (验证分支曲线方程和计算第一个 Lyapunov 量).

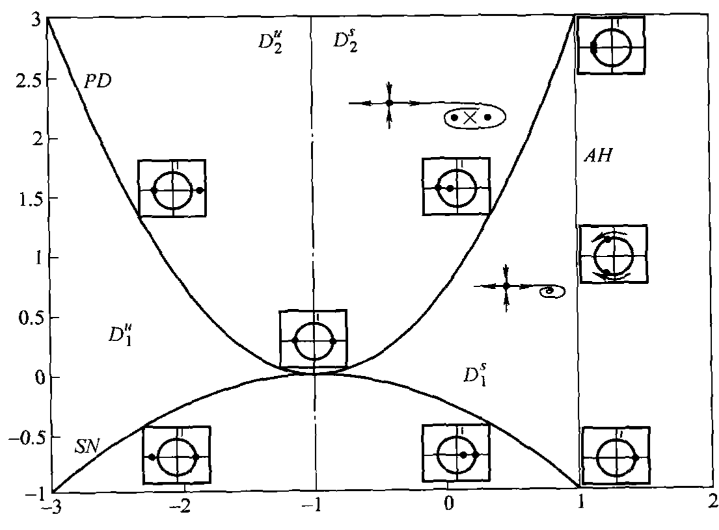


图 C.6.4 Hénon映射不动点的分支图.

在区域 D_1 存在两个不动点, 一个是鞍点, 另一个当 $(a,b)\in D_1^s$ 时稳定, $(a,b)\in D_1^u$ 时排斥. 从 D_1 到 D_2 的转移时伴随有不动点的倍周期分支, 对应地, 在 $D_1^s\to D_2^s$ 的路径上稳定, 在 $D_1^u\to D_2^u$ 的路径上排斥. 这时这个点变成鞍点 $(-)$, 在它的邻域内当 $(a,b)\in D_2^s$ 时从它分支出稳定周期 2 环, 在区域 D_2^u 内这个周期2环是排斥的.

当 $b=1$ 时, Hénon 映射变成保守的, 因为它的 Jacobi 等于 $+1$. 在 $b=1$ 和 $a=-1$, 它有具两个乘子 $+1$ 的不稳定抛物线不动点; 在 $b=1$ 和 $a=3$, 它是具两个乘子 -1 的稳定抛物线不动点. 在这些点之间, 对 $-1<a<3$ (即 $(a,b)\in T$), 映射有具乘子 $e^{\pm i\psi}$ 的不动点, 其中 $\cos\psi=1-\sqrt{a+1}$. 对 $\psi\notin\left\{\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}$, 这是一般椭圆点 [167]. 由于 Hénon 映射当 $b=1$ 时是保守的, Lyapunov 量都为零. 当我们穿过曲线 AH 时, Jacobi 变成异于 1, 因此映射对面积或者是收缩或者是扩张, 显然这阻止了不变闭曲线的存在性. 因此穿过曲线 AH 时不产生不变曲线. □

C.6.# 71. 我们考虑下面的映射

$$\begin{aligned} \bar{x} &= y + \alpha y^2, \\ \bar{y} &= a - bx - y^2 + \beta xy, \end{aligned} \tag{C.6.1}$$

其中 α 和 β 是小数. 因此这个映射可以作为 Hénon 映射的微扰来处理. 我们可能担心分支会出现在 (x, y) - 平面内当 α 和 β 趋于零时保持有限大小的某个有界子区域内. 这个问题在中性鞍点不动点 (乘子 $|\nu| < 1 < |\gamma|$ 满足 $|\nu\gamma| = 1$) 的稳定和不稳定流形间的二次同宿切触分支的研究中是典型的 [175].

我们对小的 α 和 β 推导 (C.6.1) 的分支曲线$\widetilde{SN}$, $\widetilde{PD}$ 和 $\widetilde{AH}$ 方程, 这些曲线分别对应于产生鞍 - 结点、倍周期和环面.

考虑 (C.6.1) 的特征方程

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 + 2\alpha y \\ -b + \beta y & -2y + \beta x - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

由于在不动点有 $x = y + \alpha y^2$, 这个方程化为

$$\lambda^2 + \lambda(2y - \beta y - \alpha\beta y^2) + b + y(2b\alpha - \beta) - 2\alpha\beta y^2 = 0. \tag{C.6.2}$$

(C.6.1) 不动点的 y 坐标满足方程

$$a - y(1 + b) - y^2(1 + b\alpha - \beta) + \alpha\beta y^3 = 0. \tag{C.6.3}$$

我们推导鞍 - 结点不动点的曲线 $\widetilde{SN}$ 的方程. 由于这个平衡点的特征值之一等于 1, 将 $\lambda = 1$ 代入 (C.6.2) 得

$$1 + b + 2y(1 + b\alpha - \beta) - 3\alpha\beta y^2 = 0. \tag{C.6.4}$$

这个方程在任何固定的有界区域内只有一个解, 只要 α 和 β 充分小:

$$y = -\frac{1 + b}{2(1 + b\alpha - \beta)} + O(\alpha\beta).$$

将这个代入 (C.6.3) 给出 $\widetilde{SN}$ 的下面方程

$$a = -\frac{(1 + b)^2}{4}(1 - b\alpha + \beta) + O(\alpha^2 + \beta^2). \tag{C.6.5}$$

类似地, 对应于倍周期分支, 曲线 $\widetilde{PD}$ 的方程是

$$a = \frac{3}{4}(1 + b)^2 \left(1 + \frac{4}{3}b\alpha - \frac{\beta}{3}\right) + O(\alpha^2 + \beta^2). \tag{C.6.6}$$

注意曲线 $\widetilde{SN}$ 和 $\widetilde{PD}$ 接近于原来 Hénon 映射的曲线 SN 和 PD.

我们接下来推导对应于产生不变曲线 (对映射的 Andronov-Hopf 分支) 的曲线 $\widetilde{AH}$ 的方程. 由于这种点的特征值是 $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, 由此得知映射在不动点的 Jacobi 等于 1, 以及 Jacobi 矩阵的迹等于 $2\cos\varphi$. 这得出求解 y 和 b 的下面方程组:

$$\begin{aligned} &2y - \beta y - \alpha\beta y^2 = -2\cos\varphi, \\ &b + y(2b\alpha - \beta) - 2\alpha\beta y^2 = 1. \end{aligned} \tag{C.6.7}$$

从第一个方程我们得到

$$y = -\frac{\cos\varphi}{1 - \dfrac{\beta}{2}} + O(\alpha\beta), \tag{C.6.8}$$

从第二个方程得

$$b = 1 - (\beta - 2\alpha)\cos\varphi + O(\alpha^2 + \beta^2). \tag{C.6.9}$$

最后, 由 (C.6.3) 我们得到

$$a = \cos^2\varphi(1 + \beta - \alpha) - 2\cos\varphi\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) + O(\alpha^2 + \beta^2). \tag{C.6.10}$$

由 (C.6.9)—(C.6.10) 给出曲线 $\widetilde{AH}$. 由于映射 (C.6.1) 的 Jacobi 不再是常数, 我们应该期望在不动点产生不变曲线的分支是非退化的. 为确认这点, 我们计算第一个 Lyapunov 量 L_1.

设 $(a, b) \in \widetilde{AH}$. 则 $b = -1 + O(\alpha, \beta)$ 且 $-1 + O(\alpha, \beta) < a < 3 + O(\alpha, \beta)$. 具乘子 $e^{\pm i\varphi}$ 的分支不动点有坐标

$$\begin{aligned} x &= -\cos\varphi\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) + \alpha\cos^2\varphi + O(\alpha^2 + \beta^2), \\ y &= -\cos\varphi\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) + O(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \tag{C.6.11}$$

将原点移到不动点. 于是映射 (C.6.1) 取形式

$$\begin{aligned} \overline{x} &= y(1 + \rho) + \alpha y^2 + \cdots, \\ \overline{y} &= -\frac{x}{1 + \rho} + 2y\cos\varphi - y^2 + \beta xy + \cdots. \end{aligned}$$

其中 $\rho = 2\alpha\cos\varphi + O(\alpha^2 + \beta^2)$, 省略号表示 $O(\alpha^2 + \beta^2)$ 阶非线性项. 将 x – 变量尺度化为 $(1 + \rho)$, 映射化为形式

$$\begin{aligned} \overline{x} &= y + \alpha y^2 + \cdots, \\ \overline{y} &= -x + 2y\cos\varphi - y^2 + \beta xy + \cdots. \end{aligned} \tag{C.6.12}$$

现在作线性变换 $x=\xi$ 和 $y=(\cos\varphi)\xi-(\sin\varphi)\eta$, 于是映射的线性部分变成通过角度 φ 的旋转:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}&=\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi+\alpha(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)^2+\cdots,\\ \bar{\eta}&=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi+\frac{1}{\sin\varphi}(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)^2(1+\alpha\cos\varphi)\\ &\quad-\frac{\beta}{\sin\varphi}\xi(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)+\cdots.\end{aligned}\tag{C.6.13}$$

记 $z=\xi+i\eta$, 我们得到

$$\bar{z}=ze^{i\varphi}+c_{20}z^2+c_{11}zz^*+c_{02}(z^*)^2+\cdots,\tag{C.6.14}$$

其中 z^* 是 z 的复共轭, 系数 c_{ij} 为

$$\begin{aligned}c_{20}&=\frac{1}{4}(-2\cos\varphi-\alpha+\beta)+\frac{i}{4}\left[\frac{\cos2\varphi}{\sin\varphi}+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(\alpha-\beta)\right],\\ c_{11}&=\frac{\alpha}{2}+\frac{i}{2}\left[\frac{1}{\sin\varphi}+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(\alpha-\beta)\right],\\ c_{02}&=\frac{1}{4}[2\cos\varphi+\alpha(3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-\beta]\\ &\quad+\frac{i}{4}\left[\frac{\cos2\varphi}{\sin\varphi}+\alpha\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(\cos^2\varphi-3\sin^2\varphi)-\beta\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right].\end{aligned}\tag{C.6.15}$$

按照 3.13 节, 二次项由下面的规范化变换消去 $\left(\text{当 }\varphi\neq\dfrac{2\pi}{3}\right)$:

$$z_{\text{new}}=z-\frac{c_{20}}{e^{2i\varphi}-e^{i\varphi}}z^2-\frac{c_{11}}{1-e^{i\varphi}}zz^*-\frac{c_{02}}{e^{-2i\varphi}-e^{i\varphi}}(z^*)^2+\cdots.\tag{C.6.16}$$

这个变换并不改变线性部分, 但消去所有的二次项. 因此我们仅需要合并三次项 z^2z^* 前的系数. 这给出

$$\bar{z}_{\text{new}}=e^{i\varphi}z_{\text{new}}+e^{i\varphi}z_{\text{new}}^2z_{\text{new}}^*(L+i\Omega)+O_3(z),\tag{C.6.17}$$

其中 $O_3(z)$ 表示剩余的三次项和更高次项, 以及

$$L+i\Omega=-c_{20}c_{11}e^{-2i\varphi}\frac{1-2e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}}-|c_{11}|^2\frac{1}{1-e^{i\varphi}}-|c_{02}|^2\frac{2}{1-e^{3i\varphi}}.\tag{C.6.18}$$

取右端的实部我们得到第一个 **Lyapunov量** L_1 的下面的公式 [184]

$$\begin{aligned}L_1&=\mathrm{Re}(c_{20}c_{11})\frac{\cos3\varphi-3\cos2\varphi+2\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\\ &\quad+\mathrm{Im}(c_{20}c_{11})\frac{\sin3\varphi-3\sin2\varphi+2\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}-|c_{02}|^2-\frac{1}{2}|c_{11}|^2.\end{aligned}\tag{C.6.19}$$

将 (C.6.15) 代入上面的公式, 最后我们得到下面的表达式

$$L_1 = \frac{1}{16(1-\cos\varphi)}(\beta - 2\alpha) + O(\alpha^2 + \beta^2). \tag{C.6.20}$$

观察在 $\alpha = \beta = 0$ 时 L_1 为零, 如同在 Hénon 映射中它恒等于零.

因此, 当 α 和 β 非常小时, 第一个Lyapunov量的符号与差 $(\beta - 2\alpha)$ 的符号相同. 如果它是负的, 当向 β 增大的方向穿过曲线 $\widetilde{AH}$ 时由超临界 Andronov-Hopf 分支产生稳定不变曲线. □

C.6.# 72. 应用计算机, 追踪当 b 增加时 (选择 $\alpha = \beta = 0.001$) 不变曲线的发展.

首先我们讨论情形 $L_1 < 0$. 在 $\widetilde{AH}$ 的左边区域点 O 是稳定的, 见图 C.6.5. 在 Andronov-Hopf分支曲线 $\widetilde{AH}$ 的右边, 点 O 变成不稳定, 一条稳定不变曲线在这点分支出. 稳定曲线按下面方式发展: 当参数进一步增加时, 它与鞍点不动点 O_1 的同宿回路 “黏合”, “黏合” 这个术语是指稳定不变曲线变成由于鞍点不动点 O_1 的稳定和不稳定流形的相交而存在的复杂同宿结构的非游荡集合的一部分. 当参数进一步变化时, 这个非游荡集由于同宿切触而消失.

这种稳定性消失的现象通常在文献中称为 “软性” 消失 (见第 14 章). 在 $L_1 > 0$ 的情形, 稳定性的消失以**危险**方式呈现: 点 O 原先是稳定的, 同时不稳定不变曲线从 O_1 的同宿缠结 “物化”, 且到达曲线 $\widetilde{AH}$ 时收缩到原点. 在原点的不动点在穿过 $\widetilde{AH}$ 时变成不稳定, 所有附近的轨线从它的邻域内离开. □

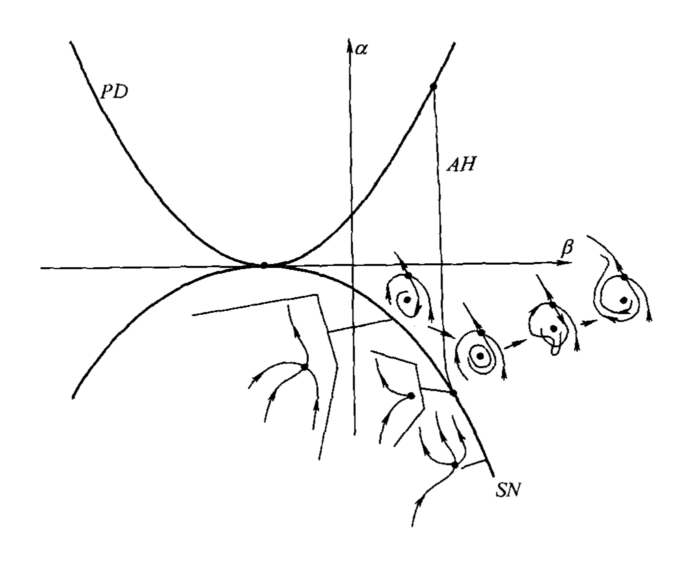


图 C.6.5　扰动Hénon映射的分支图.

C.6.# 73. 研究下面的映射

$$\overline{x} = y,$$
$$\overline{y} = \mu_1 + \mu_2 y + dy^3 - bx,$$

其中μ_1, μ_2, b是控制参数, $d = \pm 1$. 这样的映射出现在 Lorenz 吸引子的研究中, 以及在模拟具有三次非线性的周期强迫方程的性态中, 如 Duffing 系统 [176,184].

这个映射的 Jacobi 等于 b, 因此, 当 $b \neq 0$ 时它是微分同胚. 逆映射是

$$\overline{y} = x,$$
$$\overline{x} = \frac{1}{b}(\mu_1 + \mu_2 x + dx^3 - y).$$

从上面的公式容易看到情形 $|b| > 1$ 和情形 $|b| < 1$ 是对称的. 当 $b = 0$ 时, 原映射有不变曲线 $y = dx^3 + \mu_2 x + \mu_1$, 平面内的任何点经一次迭代变到这不变曲线, 在这意义下原映射变成是 "一维" 的. 应该指出这个映射关于变换 $(x, y, \mu_1, \mu_2) \to (-x, -y, -\mu_1, \mu_2)$ 是不变的, 因此在 (μ_1, μ_2) – 参数平面内分支曲线关于 μ_2 轴对称.

C.6.# 74. 解析地求这些映射的不动点和周期 2 – 环的基本分支曲线的方程.

部分解　对应于具乘子+1的不动点的曲线SN由

$$\mu_1 = \pm\frac{2}{3}\left(\frac{-1 + b - \mu_2}{3d}\right)^{1/2}$$

给出, 具乘子 -1 的由

$$\mu_1 = \pm\frac{2}{3}\left(\frac{-1 + b - \mu_2}{3d}\right)^{1/2}(2 + 2b - \mu_2)$$

给出. 具乘子 $+1$ 的周期 2 – 环的分支曲线是

$$\mu_1 = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}(-\mu_2 - 2(b+1))^{3/2}, \quad \text{在 } d = +1,$$
$$\mu_1 = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}(\mu_2 + 2b - 1)^{3/2}, \quad \mu_2 > -\frac{2}{3}(b+1), \text{在 } d = -1.$$

对应于倍周期 4 的分支曲线是

$$\mu_1^2 = \frac{1}{216d}(b(b+1) + \mu_2 \pm q)^2(-5\mu_2 - 6(b+1) \pm q),$$

其中 $q = \sqrt{(3\mu_2 + 2b + 2)^2 - 8(b^2 + 1)}$. □

C.6.# 75. 在完全 Jordan 块情形下 (C.2 节继续), 下面的系统是具有三重零特征指数的平衡态分支的渐近规范形 [162, 163]

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = z,$$
$$\dot{z} = ax - x^2 - by - z,$$

其中 a 和 b 是控制参数. 这个系统分支图的片段如图 C.6.6 所示. 对 $a, b \geqslant 0$, 系统有两个平衡态 $O(0,0,0)$ 和 $O_1(a,0,0)$. 原点对应于 Bogdanov-Takens 余维 2 分支 (见 13.4 节).

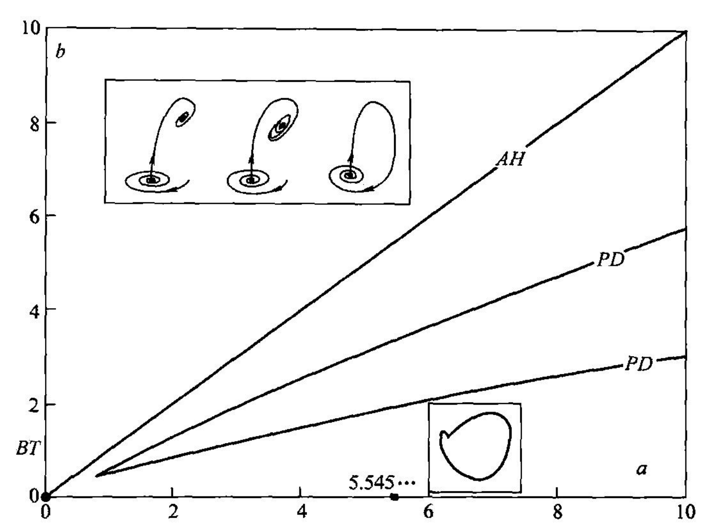


图 C.6.6　部分分支图. AH 表示非平凡平衡态 O_1 的 Andronov-Hopf 分支, PD 表示从 O_1 产生的稳定周期轨道的翻转分支.

当 μ 增加时在路径 $b=2$ 上描述这个系统的基本分支. 在曲线 AH 的左边平衡态 O_1 稳定. 它在曲线 AH 上产生超临界 Andronov-Hopf 分支. 通过在曲线 PD 上出现的倍周期分支, 稳定周期轨道变成鞍点. 图 C.6.7 显示鞍点周期轨道的不稳定流形同胚于 Möbius 带. 当 a 进一步增加时, 鞍点周期轨道变成鞍点 $O(0,0,0)$ 在 $a \simeq 5.545$ 的同宿回路. 当它接近于回路时我们关于周期轨道的乘子能说些什么? 在这图中显示的鞍点周期轨道能不能在翻转分支以后从二重稳定轨道 "拆开" 得到? 换句话说, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ 中那样成对轨道以什么方式连接?

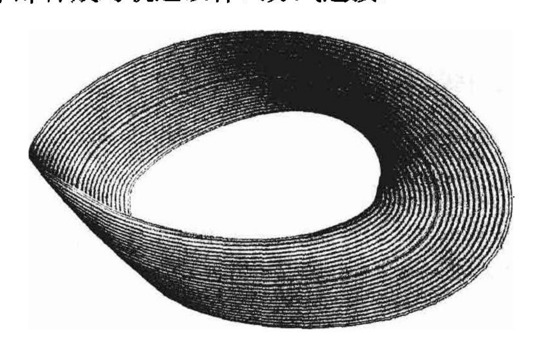


图 C.6.7　在 $a=3.2$ 显示的鞍点周期轨道(黑圆圈)的稳定流形的片段. 此图由 H.Osinga 和 B.Krauskofpf [181] 提供.　□

C.6.# 76. 在 (a,b) – 参数平面上, 利用计算机探测对应于 Shimizu-Morioka 模型 [191]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= x - xz - ay, \\
\dot{z} &= -bz + x^2,
\end{aligned}
\tag{C.6.21}
$$

在 $a \simeq 0.4$ 和 $b \simeq 0.45$ 的对称周期轨道的叉分支的分支曲线. 对称极限环能否通过这个系统的倍周期分支产生? 在 Lorenz 系统中呢? Chua 电路中又如何? 它们有什么区别?

C.6.# 77. 考虑具有环面分支的系统例子. 我们这里的例子来自气象学模型 [128, 183]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + aF, \\
\dot{y} &= xy - bxz - y + G, \\
\dot{z} &= bxy + xz - z.
\end{aligned}
\tag{C.6.22}
$$

由线性稳定性分析 (见 C.2 节) 得知, (a,b) – 参数平面内有对应于具有特征指数 $(0, \pm i\omega)$ 的平衡态的余维 2 点. 因此, 中心流形的维数此时必须至少等于 3. 为了完成这个分支的讨论, 建议读者参考 [51,64]. 下面我们给出它的概要.

观察在这样的余维 2 点, Andronov-Hopf 分支和鞍 – 结点分支同时出现. 设 μ_1 和 μ_2 是在每个通有族

$$
\begin{cases}
\dot{r} = r(\mu_1 + L_1 r^2) + \cdots, \\
\dot{\varphi} = \omega(\mu_1) + \Omega(\mu_1) r^2 + \cdots,
\end{cases}
$$
$$
\dot{z} = \mu_2 - z^2 + \cdots,
$$

中分别控制这些分支的相同参数, 其中 $\omega(0) \neq 0$, $\Omega(0) \neq 0$, L_1 表示 Lyapunov 量. 考虑到交互作用, 所得规范形可写为

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= r(\tilde{\mu}_1 + L_1 r^2 + az + z^2) + O(|(r,z)|^4), \\
\dot{z} &= \tilde{\mu}_2 + z^2 + br^2 + O(|(r,z)|^4), \\
\dot{\varphi} &= \omega + cz + O(|(r,z)|^2),
\end{aligned}
$$

其中 a, b 可取 ± 1. 注意如果我们去掉 $O(|(r,z)|^4)$ 项, 系统变成关于围绕 z 轴旋转不变, 因此它的轨线位于由与第三个方程解耦的前面两个方程组成的平面系统的轨线确定的积分曲面上. 在这个平面系统中 $r = 0$ 的平衡态对应于三维规范形的平衡态, $r \neq 0$ 的平衡态对应于周期轨道, 以及结构稳定的极限环对应于不变环面. 按照 a 和 b 的符号, 可以存在四种本质不同的情形. 我们将仅集中研究情形 $a = -1$ 和 $b = 1$, 这时发生环面分支, 其它情形下的线性稳定性分析留下作为练习. 对应的分支图如图 C.6.8 所示. 接下来我们描述有关原来三维系统 (C.6.22) 对应的分支.

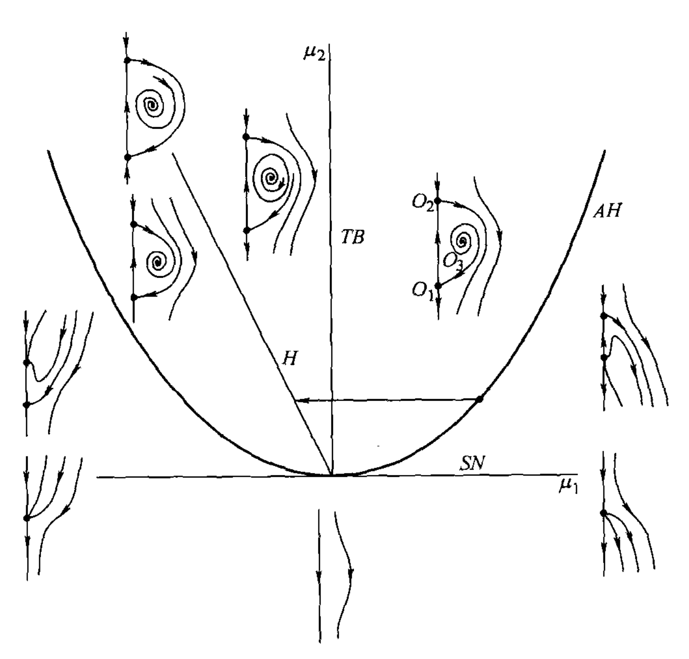


图 C.6.8 当 $a=-1$ 和 $b=1$ 时的平面系统的开折.

点 O_1 在 AH 的右边区域是排斥的. 在 AH 的左边区域它变成鞍 - 焦点 (2,1), 且从这点生成排斥的周期轨道. 这个周期轨道是 O_1 的稳定流形的边 (图 C.6.9(a)). 当穿过 TB 时这个周期轨道变成稳定, 从它分支出排斥的二维不变环面 (见图 C.6.9(b)). 在图 C.6.8 中的曲线 H 上, 这个环面变成两个鞍 - 焦点之间的异宿连接 (图 C.6.9(c)).

上面描述的分支服从关于围绕 z 轴旋转的不变性条件. 于是直线 $r=0$ 是积分曲线, 且在 O_1 和 O_2 都是鞍点的情形, 这是它们公共的一维分界线. 此外, 在这样的对称系统中, 这些鞍点的二维稳定和不稳定不变流形或者可结合在一起或者没有公共点. 在一般没有旋转不变性的系统中, 鞍点的一维分界线可以在特殊 (余维 2) 参数值重合, 但是鞍点的二维流形对于开的参数集可沿着某些轨线彼此横截相交. 考虑到破坏旋转对称性的项可有效地改变异宿连接的结构, 即它可分裂. 如果发生这种情形, 一维分界线很可能变成双向渐近于任何一个鞍 - 焦点, 如图 C.6.9(d) 所示. 此外, 如果任一个鞍 - 焦点的鞍点量是正的, 则当邻域被无穷多个鞍点周期轨道充满时, 分界线回路将引起同宿爆炸 (见 13 章). □

C.6.# 78. 环面上的蓝天突变的 Medvedev 构造 [95], 如图 C.6.11 所示. 假设在某个 $\mu=0$ 环面上存在一对鞍 - 结点环 C_1 和 C_2. 在环面上引入运动方向, 可指定一个环按顺时针方向旋转, 另一个按相反方向旋转. 讨论蓝天突变中流向可能的方式. 通过这个分支有多少环以及可以什么稳定性出现? 设 $n_1(\mu)$ 和 $n_2(\mu), \mu>0$ 是环面上的闭轨线接近 $C_{1,2}$ 的幻影时的回转次数. $\lim_{\mu\to+0} n_{1,2}(\mu)$ 是什么?

C.6.# 79. 挑战: 按照在 12.4 节讨论的两个时间尺度的系统中蓝天突变发展的

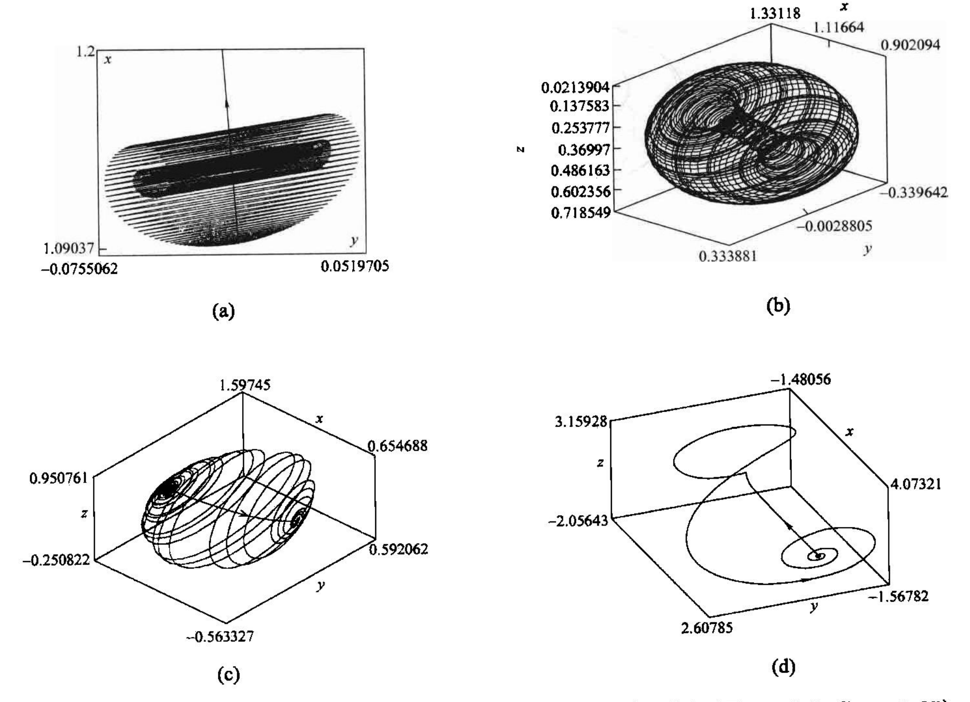


图 C.6.9 系统 (C.6.22) 的相图: (a) ($F = 1.77, G = 1.8$); (b) ($F = 1.8, G = 1.65$); (c) ($F = 1.8, G = 1.5$); (d) ($F \simeq 1.416, G \simeq 2.195$).

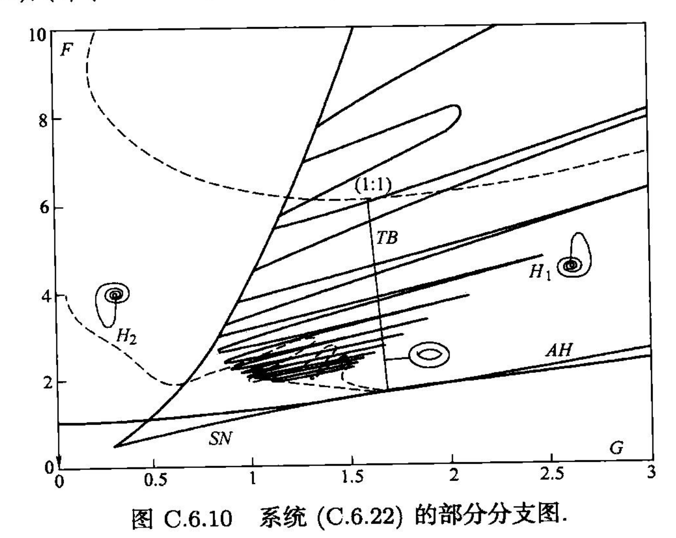


图 C.6.10 系统 (C.6.22) 的部分分支图.

基本思想, 求神经活动 Hindmarsh-Rose 模型的修改

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y - z - x^3 + 3x^2 + 5, \\
\dot{y} &= -y - 2 - 5x^2, \\
\dot{z} &= \varepsilon(2(x + 2.1) - z) - \frac{A}{(z - 1.93)^2 + 0.003}
\end{aligned} \tag{C.6.23}$$

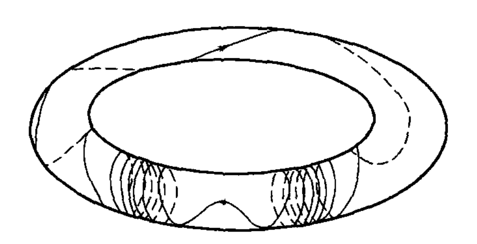


图 C.6.11　环面上的蓝天突变.

的蓝天突变, 其中 A 和 ε 是两个控制参数. 图 C.6.12 表示慢系统的分支图. 证明所得周期轨道的稳定性. 你能否解释平衡态 O_1 是如何延迟失去稳定性的: 对照与在零和小非零 ε 对应的图. 关于这个现象的更详细的考虑, 建议好奇的读者查看结果 [21]. □

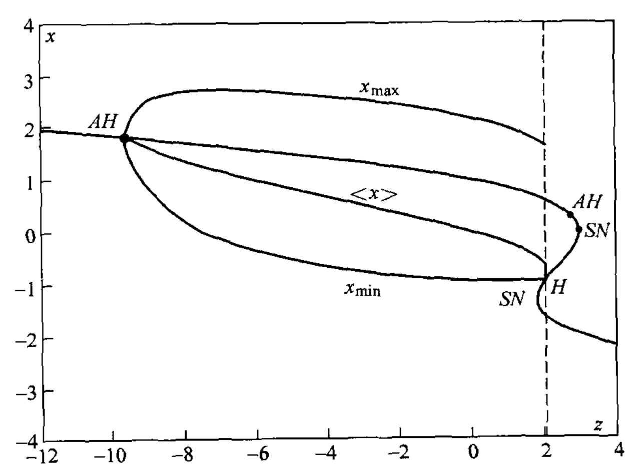


图 C.6.12　在 $\varepsilon = 0$ 画出平衡态在 (z, x) – 平面内的 x 坐标. 符号 $x_{\min}$, $x_{\max}$ 和 $\langle x \rangle$ 分别表示从在 AH 的稳定焦点分支出的在点 H: $z \simeq 2.086$ 终止于鞍点 O (见下一个图) 的分界线回路的稳定极限环的 x 坐标的最大值, 最小值和平均值.

C.6.# 80. 研究周期强迫的 van der Pol 方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= -x - a(x^2 - 1)y + \beta \cos \omega t, \\
\dot{t} &= \omega
\end{aligned}
\tag{C.6.24}
$$

中当 β 从零增加时不变环面的出现和破裂的机制. 从未被扰动方程原点的 Andronov-Hopf 分支开始. 在 $a = 2$ 关于极限环会出现什么情况? 环面演变的现象情景如图 C.6.14 所示. 什么分支在它破裂之前, 以及什么时候它失去光滑性? 应该注意在稳定共振环附近鞍点分界线的性态. □

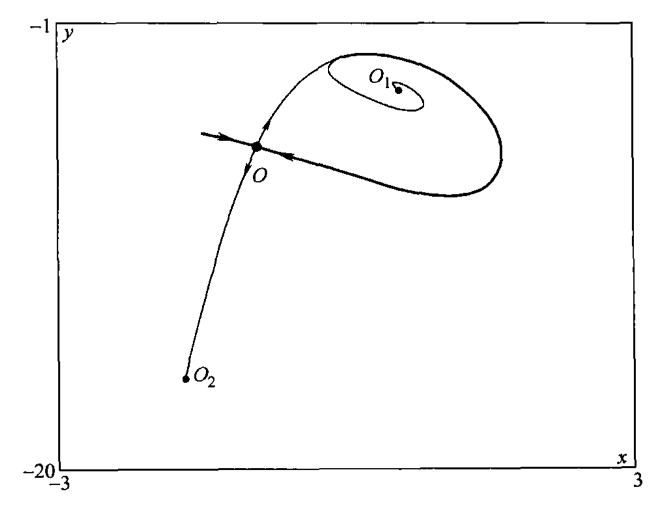


图 C.6.13 在 $z \simeq 2.086$ 和 $\varepsilon = 0$ 处鞍点 O 的分界线回路.

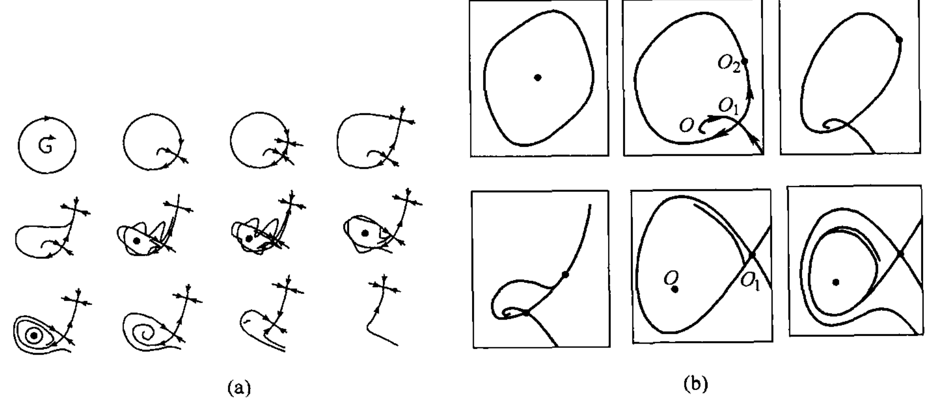


图 C.6.14 $\frac{2\pi}{\omega}$移位映射: (a) 理想的分支难题, 以及 (b) 对 $a = 0.4, \omega = 0.893$ 和在 $\beta = 0.0, 0.37, 0.37409, 0.375, 0.376, 0.3761$ 时的数值结果. 两个图像都是由 B.Krauskopf 和 H.Osinga [180] 提供的.

C.7 同宿分支

同宿分支当然不是局部问题. 对特殊 ODE 集的同宿分支的探测本身就是一门艺术. 此外, 它通常要求执行相当复杂的数值计算. 但是, 如我们在 Bogdanov-Takens 规范形的研究中看到的, 在某些特殊情形我们可解析证明同宿回路的存在性. 这里涉及的系统接近于可积系统. 另外的例子, 系统的右端分段线性, 以及由两个时间尺度的具快慢变量的系统. 尽管如此, 这些例子是例外情形. 因为对一般涉及考虑的非线性耗散系统, 情况非常不平凡, 特别, 如果问题中的鞍点有维数等于或者超过2的不稳定和稳定流形时(迄今为止, 知道的常用的数值方法可很好用于具一维稳定和不

稳定分界线的鞍点). 通常在出现同宿回路之前不存在太多分支现象的问题实际上比较简单. 我们将在下面阐述它们中的一些. 但是, 所列的分支毋庸置疑是不完全的, 我们希望幸运的读者将在进一步的研究中撞上新奇的分支.

同宿分支是一个复合结构. 它的第一阶段是基于局部稳定性分析以确定平衡态是鞍点还是鞍 - 焦点, 以及它的第一个和第二个鞍点量是什么等等. 紧接着第二阶段, 要处理当系统的参数变化时分界线的 ω - 极限集的演变. 一个特殊的考虑是也应该给出从同宿回路分支出的鞍点周期轨道的不变流形的维数. 它直接与鞍点附近的局部扩张和压缩的比相关, 即它依赖于鞍点量的符号.

C.7.# 81. 按照对一般的 Bogdanov-Takens 规范形的研究的相同步骤, 分析具反射对称的 Khorozov-Takens 规范形

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y \pm x^3 - x^2 y\end{aligned}$$

中原点 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 附近的分支集的结构. 尺度化

$$x \to \varepsilon u, \quad y \to \varepsilon^2 v, \quad |\mu_1| \to \varepsilon^2, \quad \mu_2 \to \varepsilon^2 \nu, \quad t \to \frac{t}{\varepsilon}$$

给出

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v,\\ \dot{v} &= \gamma u + \nu v \pm u^3 - \varepsilon u^2 v,\end{aligned}$$

其中 $\gamma = \operatorname{sign}\mu_1 = \pm 1$. 于是, 在 $\varepsilon = 0$, 系统变成 Hamilton 系统

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{\partial H}{\partial v},\\ \dot{v} &= \frac{\partial H}{\partial u},\end{aligned}$$

它有首次积分

$$H = \frac{v^2}{2} + \gamma\frac{u^2}{2} \pm \frac{u^4}{4}.$$

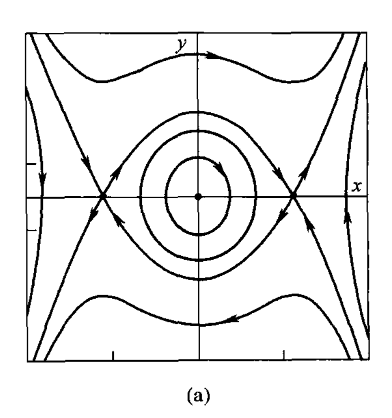
最令人感兴趣的情形是当 γ 的符号与 H 中的四次项的系数相反时, 所以我们进一步假设

$$H = \frac{v^2}{2} + \gamma\frac{u^2}{2} - \gamma\frac{u^4}{4}.$$

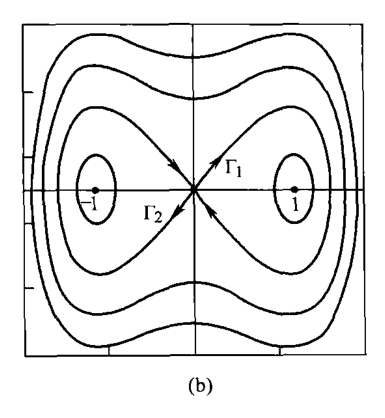
这个可积系统有三个平衡态 $O(0,0)$ 和 $O_{1,2}(\pm 1, 0)$. 当 $\gamma = 1$ 时原点是中心, $O_{1,2}$ 是鞍点 [见图 C.7.1(a)].

鞍点有在等高线 $H = \frac{1}{4}$ 的闭对称异宿连接. 连接鞍点的轨线的方程可明显地求得, 其上面部分由

$$u = \frac{e^{\sqrt{2}t} - 1}{e^{\sqrt{2}t} + 1}, \quad v = \frac{2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}}{(e^{\sqrt{2}t} + 1)^2}$$



(a)



(b)

图 C.7.1　Hamilton 系统的积分曲线: 情形 $\gamma = 1$ (a) 和 $\gamma = -1$ (b).

给出 (验证).

在情形 $\gamma = -1$, 原点变成鞍点, 而 $O_{1,2}$ 是中心 [见图 C.7.1(b)]. 可识别的 8 字形图位于相应的 Hamilton 系统的零等高线. 它的右边圆形突出部分的方程由

$$u(t) = \frac{2\sqrt{2}e^t}{1+e^{2t}}, \quad v(t) = \frac{2\sqrt{2}e^t(1-e^{2t})}{(1+e^{2t})^2}$$

给出. 在曲线 $\mu_2 = \nu\mu_1 + O(\mu_1^2)$ 上异宿连接或者 8 字形同宿连接对扰动系统保持, 其中 ν 由条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{d}{dt}H(u(t), v(t))dt\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

求得. 后者可重写为

$$\nu = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)v(t)dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)dt},$$

对每个情形这分别给出

$$\nu = \frac{1}{5} \quad 和 \quad \frac{4}{5}.$$

对情形 $\gamma = -1$, 在曲线$H8$上计算鞍点量. 求证稳定的对称极限环不可能在此曲线上终止于 8 字形同宿. 完全的分支图见图 C.7.2.

C.7.# 82. 应用 Shilnikov 定理解释 Rössler 系统 [172, 188]

$$\dot{x} = -y - z,$$
$$\dot{y} = x + \alpha y,$$
$$\dot{z} = 0.3x - cz + xz$$

在鞍 - 焦点 O 同宿回路附近应该期望出现什么类型的性态, 如图 C.7.3 所示. 确定对应的特征指数, 并计算鞍点量.

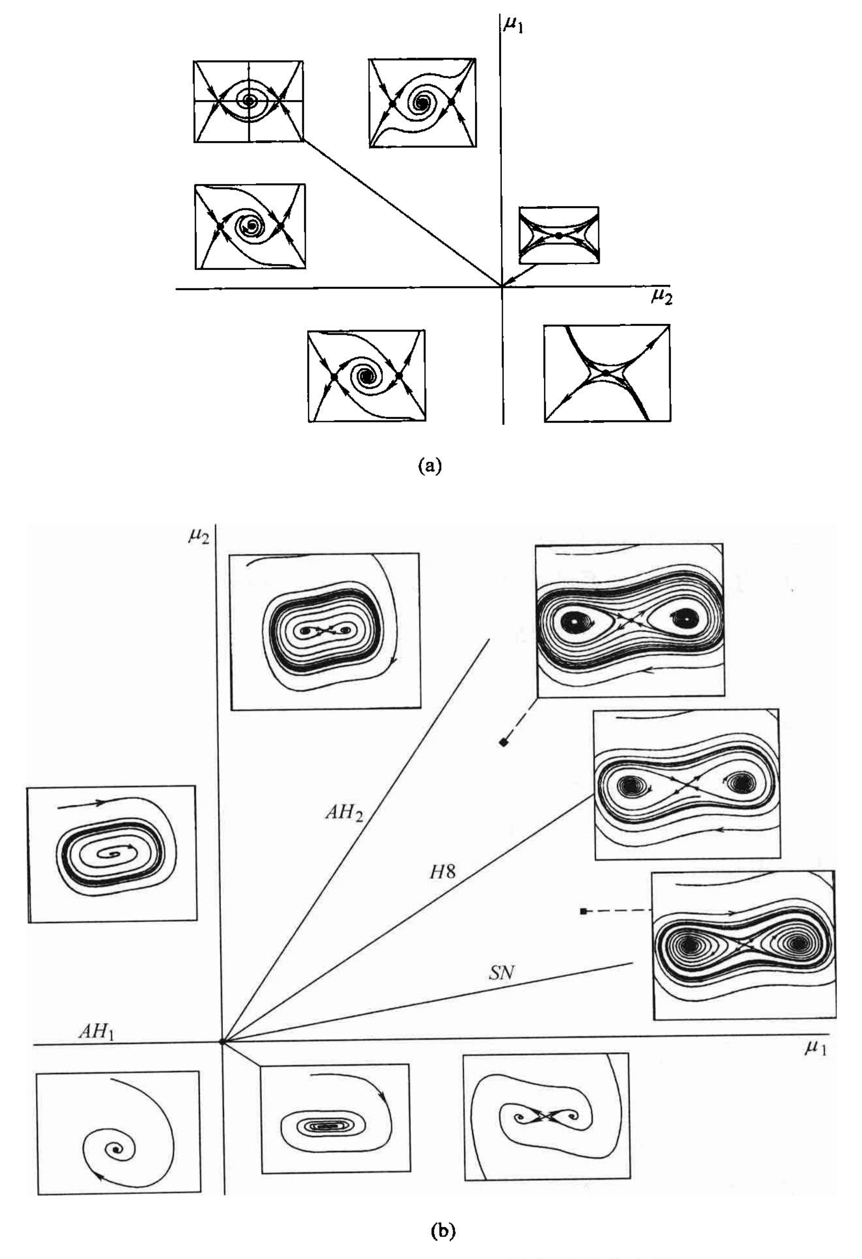
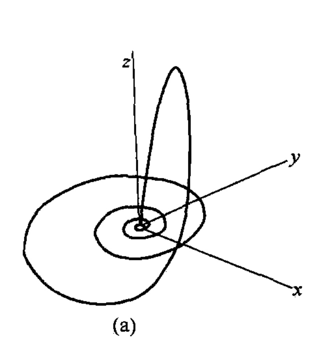


图 C.7.2　Khorozov-Takens 规范形的分支图.

直接计算显示对给定的参数, 鞍 - 焦点O有指数 $\lambda_{1,2} \simeq 0.1597 \pm i0.9815$ 和 $\lambda_3 \simeq -4.7594$. 由于复指数 $\lambda_{1,2}$ 最接近于虚轴, 同宿回路导致产生无穷多个鞍点周期轨道. 此外, 由于第二个鞍点量 $\sigma_2 = \lambda_3 + 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}$ 为负 (这里它等于向量场在 O 的散度), 由此得知, 同宿回路附近也可存在稳定周期轨道和鞍点. 这些稳定轨道有长周期和



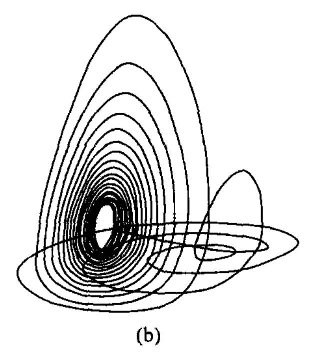


图 C.7.3 Rössler 模型中, 在 $(a=0.380, c=4.820)$ 和 $(a=0.4853, c=4.50)$, 鞍 – 焦点 O 和 O_1 的分别的同宿回路. 在不稳定流形上的初始条件选择为分别与平面 $y=0$ 上的 O 相距大约 0.47 以及与O_1 大约 0.14 的距离的点.

弱吸引盆, 因此它们在数值实验中实际上是看不见的.

在第二种情形, 平衡态 O_2 有特征指数 $(-0.0428 \pm 3.1994, 0.4253)$. 与第一种情形相反, 在回路的小邻域内不存在稳定的周期轨道, 因为向量场在 O_2 的散度为正.□

C.7.# 83. 考虑下面具三次非线性的 $\mathbb{Z}_2$ – 对称 Chua 电路 [179]:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= a\left(y - \frac{x}{6} + \frac{x^3}{6}\right), \\
\dot{y} &= x - y + z, \\
\dot{z} &= -by,
\end{aligned}
\tag{C.7.1}
$$

其中 $a \geqslant 0$ 和 $b \geqslant 0$ 是控制参数. 当 $a=b=0$ 时, (C.7.1) 的分支开折与 Khorozov-Takens 规范形的相同. 特别地, 它包含 8 字形同宿分支. 因此对应的记为 $H8$ 的分支曲线从图 C.7.4 的 (a,b) – 参数平面的原点出发. 在这里特别要考虑在这曲线上的四个余维 – 2 点, 在这些点上以下共振条件成立 (C.2 节的后面):

(1) NS $(a \simeq 1.13515, b \simeq 1.07379)$ 对应于零鞍点量 σ 的鞍点 (在原点). 在这点的下方, σ 是正的.

(2) 点 $S \to SF$ $(a \simeq 1.20245, b \simeq 1.14678)$ 对应于从鞍点到鞍 – 焦点 (2, 1) 的过渡. 重要的是在这点 $\sigma < 0$.

(3) 缩写 NSF 表示中性鞍 – 焦点, 在这点的鞍点量 σ 为零.

(4) 引入第二个鞍点量 σ_2, 它是在鞍 – 焦点的三个主特征指数的和. 在三维情形, 它是向量场在原点的散度. 这里由方程 $a=6$ 给出的曲线 $\sigma_2=0$ 在 $(a=6, b=7.19137)$ 与 $H8$ 相交. 在这点上方, $\sigma_2 > 0$.

这些点将分支曲线 $H8$ 分为四段, 其上轨线的性态描述如下.

线段 $(0, NS)$:

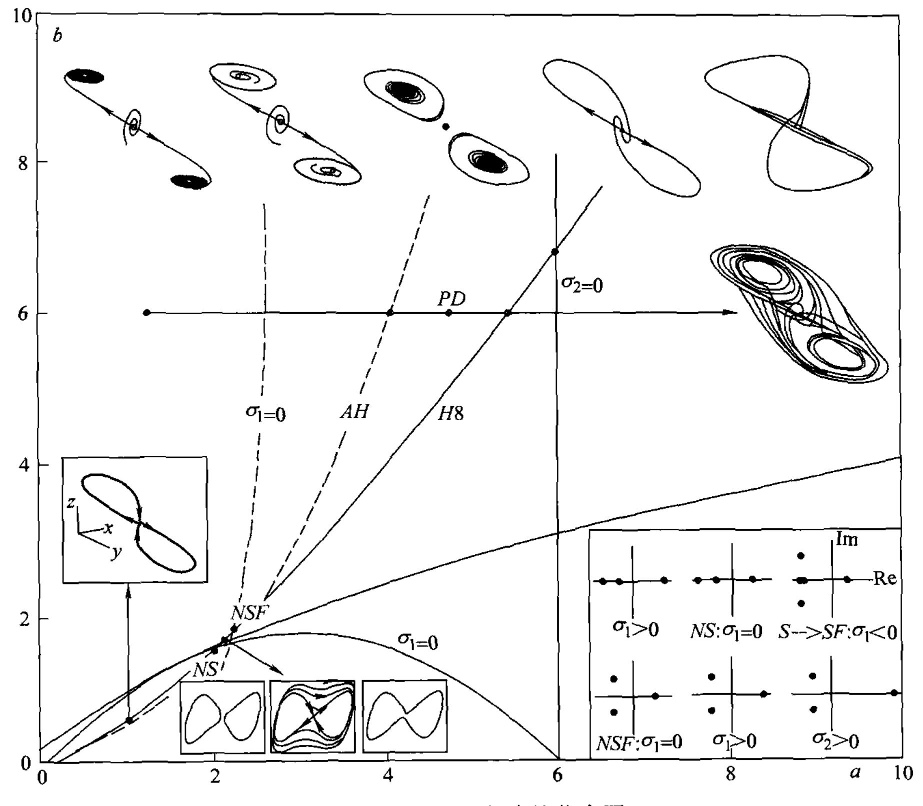


图 C.7.4　Chua 电路的分支图.

在这个区间上, 8 字形同宿分支与 Khorozov-Takens 规范形中的情形相同. 组成 8 字形同宿的两个回路可定向. 中心同宿流形的维数等于 2. 第三维不起重要作用. 因此, 由 13.7 节的结果得知在 $H8$ 的右方存在两个不稳定环 (图 13.7.9 中的 **环** 1 和**环** 2). 在 $H8$ 的左方从 8 字形同宿分支出对称的鞍点周期轨道 (环 12) (也见图 C.7.5).

点 NS. 这点在这里如同 $\sigma=0$ 是余维 2 点. 在 8 字形同宿附近轨线的性态, 以及在这点附近分支集的结构依赖于分界线量 A (见公式 (13.3.8)). 此外, 它们不仅依赖于 A 是正 (回路可定向) 还是负 (回路是扭转), 还要考虑到 $|A|$ 是小于 1 还是大于 1. 如果 $|A|<1$, 则 8 字形同宿是 "稳定" 的, 否则不稳定. 为了找出出现哪种情形, 我们可以选择充分接近于 8 字形同宿的初始点并数值地跟随从这点出发的轨线. 如果 8 字形图排斥它 (这是 Chua 电路情形), 则 $|A|>1$. 观察到具乘子 $+1$ 的二重环曲线由定理 13.5 必须从点 NS 出发.

在 NS 和 NSF 之间的线段上, 鞍点量是负的, 即 $\sigma<0$. 沿着 $H8$ 向上移动, 通过它上面的点之后原点变成鞍 - 焦点. 由定理 13.11, 在两种情形任何一种 (即当原点是鞍点, 或者是 $\sigma<0$ 时的鞍 - 焦点), 只有两个稳定环, 或者在 $H8$ 的另一方从 8

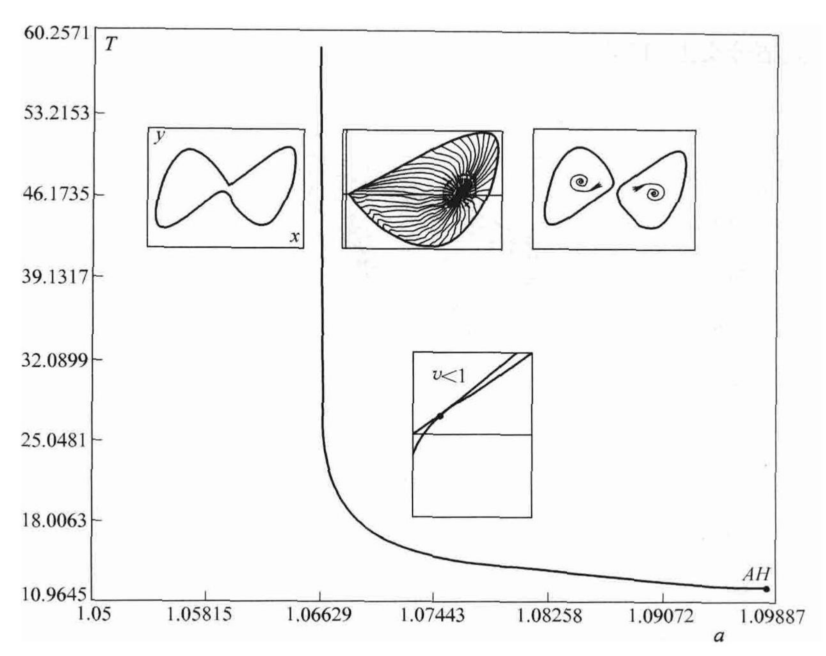


图 C.7.5 当环趋于同宿回路时, 参数 a ($b=1$) 对通过亚临界 Andronov-Hopf 分支产生周期轨道的周期 T 的依赖性. 原点是 $\sigma>0$ 时的鞍点.

字形同宿分支出的单个对称稳定环. 因此点 $S \to SF$ 不是分支点. 但是, 引入小扰动破坏了 Chua 电路的对称性, 我们可以得出本质不同的分支开折 (见图 13.7.5 和图 13.7.9 的对照). 不过应该指出, 如果 σ 在这点是正的, 则从鞍点到鞍 – 焦点的转移对系统的动力学会引起引人注目的变化. 考虑到只有一个同宿回路, 这可引起从在鞍点情形的单个鞍点周期轨道到鞍 – 焦点情形的无穷多个周期轨道的同宿爆炸 (见定理 13.7—定理 13.10 和 [29]).

点 NSF: $\sigma=0$ 对应于中性鞍 – 焦点. 在这个余维 2 点, 在鞍 – 焦点同宿回路附近的轨线动力学变成混沌. 这个分支事实上先于 Chua 电路中混沌双涡形吸引子的原点. [29] 第一个考虑这个分支的一般情形. 这样的分支的完全开折还不知道. [29] 的概述如下: 存在余维 1 分支曲线的无穷序列,它们凝聚在点 NSF 上方的曲线 $H8$ 上. 这些曲线对应于后来的同宿分支, 鞍 – 结点分支以及接近于原来的同宿轨线的周期轨道的二重周期分支. 为了理解这个现象 (同宿爆炸), 我们可以研究具鞍点指标 $\nu>1$ (对应于$\sigma<0$) 和 $\nu<1$ (对应于 $\sigma>0$) 的一维映射演变的简单图像, 如图 C.7.6 所示. 回忆在所考虑的情形, $\nu=\dfrac{|\operatorname{Re}\lambda^*|}{\lambda_1}$, 其中 $\lambda_1>0$, 以及 λ^* 是在鞍 – 焦点的一对共轭指数的实部. 从这个图像可以看出, 当参数收敛于临界值时周期轨道的周期趋于无穷. 在 $\nu<1$ 的鞍 – 焦点情形, 它有不同的振动分量. 每一个转向点对应于由倍周期分支跟随的鞍 – 结点分支. 因此, 那里产生这样的分支无穷序列, 它

们凝聚在同宿分支上 [173].

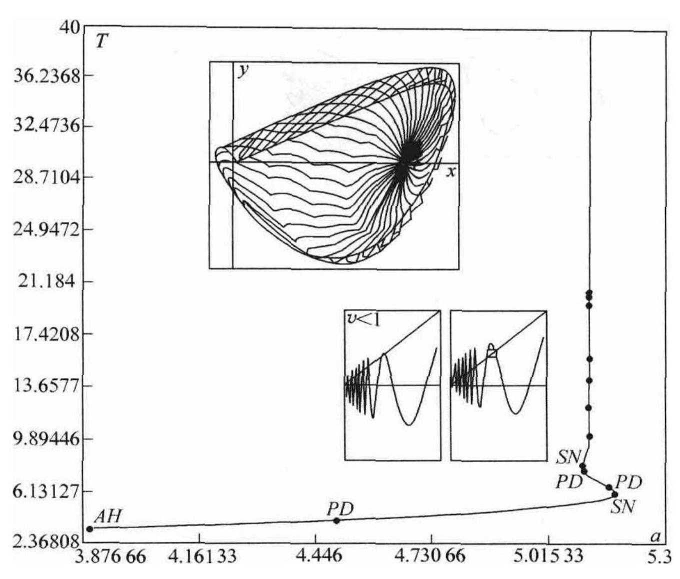


图 C.7.6　当环趋于 $\sigma > 0$ 的鞍 – 焦点同宿回路时, 由在参数 a $(b = 6)$ 的超临界 Andronov-Hopf 分支产生的周期轨道的周期 T 对参数 a 的依赖性.

因此, 在 $\nu < 1$ 的鞍 – 焦点同宿回路的邻域内, 可存在结构不稳定的周期轨道, 特别是可以有鞍 – 结点. 这引起一个问题: 周期轨道的鞍 – 结点分支是否导致出现稳定轨道?

要回答这个问题, 我们必须研究二维 Poincaré 映射以代替一维映射, 并计算前面映射的 Jacobi. 如果它的绝对值大于 1, 则映射没有稳定的周期点, 因此在同宿轨线的邻域内没有稳定轨道, 这是因为不动点乘子的积等于这个映射的 Jacobi 的行列式. 从公式 (13.4.2) 我们可以看到, 该 Jacobi 的这个值直接与 $2\nu - 1 > 0$ 还是 $2\nu - 1 < 0$, 或者等价地与 $\nu > \dfrac{1}{2}$ 还是 $\nu < \dfrac{1}{2}$ 有关. 借助鞍 – 焦点的特征指数, 将上面的条件转化为第二个鞍点量 $\sigma_2 = \lambda_1 + 2\,\mathrm{Re}\,\lambda^*$ 是正还是负. 可以证明 [100], 如果 $\sigma > 0$ 但 $\sigma_2 < 0$ (图 C.7.4 中 $a < 6$), 在回路以及鞍点附近可存在稳定周期轨道. 但是如果 $\sigma_2 > 0$ (自动地有 $\sigma > 0$), 从鞍 – 结点分支出完全不稳定周期轨道.

关于 Chua 电路的最后一个说明是考虑沿着路径 $b = 6$ 的分支 (见图 C.7.4). 注意这个序列对许多具鞍点平衡态的对称系统是非常典型的. 我们跟随从在 $a \simeq 3.908$ 的非平凡平衡态的超临界 Andronov-Hopf 分支开始的稳定周期轨道. 当 a 增加时, 两条分界线都趋于稳定周期轨道. 后面一个在 $a \simeq 4.496$ 通过叉分支改变为鞍点型. 它们的大小增加且在 $a \simeq 5.111$ 与 8 字形同宿合并. 这个以及接下来的分支导致出现大家知道的 Chua 电路中的双涡形管 Chua 吸引子的奇怪吸引子. □

C.7.# 84. Shimizu-Morioka 模型 [127]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= x - ay - xz,\\ \dot{z} &= -bz + x^2\end{aligned} \tag{C.7.2}$$

中的同宿分支. 我们寻求同宿分支是从发生在曲线 $AH: b = \dfrac{2-a^2}{a}$ (见 C.2) 上的非平凡平衡点 $O_{1,2}$ 的 Andronov-Hopf 分支开始的. 这个分支可以是超临界, 即第一个 Lyapunov 量在点 GH 的右边是负的, 在点 GH 的左边它是亚临界. 接下来考虑当参数 a 减少 $b = 0.9$ 保持不动时在原点的鞍点 O 的分界线性态的演变. 在 AH 的上方, 分界线趋于稳定平衡点 $O_{1,2}$, 它们在 $a \simeq 1.0341$ 经由 Andronov-Hopf 分支而失去稳定性. 在 AH 和 HB 之间的区域, 分界线被吸引到新产生的稳定周期轨道. 当 a 进一步减少时, 稳定轨道的振幅增加, 它们两个在 $a \simeq 0.8865$ 与原点结合从而形成蝴蝶同宿. 这样的 $\sigma < 0$ 时的对称同宿分支, 考虑到它们可以是蝴蝶同宿或者 8 字形同宿的几何结构, 通常称为**黏合**分支. 我们可以看到在给定的参数值鞍点的主方向是对应于特征值 $\lambda_2 = -b$ 的 z 轴. 因此, 在我们的分类中我们处理的蝴蝶同宿是: 两条进入鞍点的分界线彼此接触. 当分界线从两个相反方向进入鞍点时蝴蝶同宿转换为 8 字形, 这个方向是另一个负特征值的特征向量, 它在 HB, $\lambda_2 < \lambda_3 = -\dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + 1}$ 时变成主特征向量. 在这两个情形, 从同宿分支出现稳定的对称周期轨道. 因此, 如果 $\sigma < 0$ 则同宿变形的结果始终是相同的. 但 $\sigma > 0$ 的情形则不同, 那里同宿的几何是关键因素.

在 HB 上更重要的共振条件发生在 $(a \simeq 1.044, b \simeq 0.608)$, 在那里鞍点量 σ 等于零 (见 13.6 节). 在这种点附近的局部考虑化为对应的截断 "规范形" —— 一维 Poincaré 映射

$$\overline{x} = (-\mu + A|x|^{1+\sigma})\,\mathrm{sign}(x), \tag{C.7.3}$$

其中 $||\mu, \sigma|| \ll 1$, A 是分界线量. 在我们的解释中, 当 $\mu = 0$ 时, 在原点的不动点对应于蝴蝶同宿. 由 13.6 节得知, 在这样的余维 2 点附近分支开折的结构强烈依赖于 A 的大小和符号. 我们早先已经强调过 A 的作用, 但必须得重复说明 A 的符号确定同宿回路的定向. 此外, 在 "线性" 情形 (即在 $\sigma = 0$), A 的值也确定蝴蝶同宿的稳定性. 如果对 ODE 的特殊集没有计算机模拟, 那几乎没有方法可求 A 的值. 最简单的方法是执行数值实验, 它类似于我们已经用过的对Chua电路的分析. 如果鞍点的分界线在它分裂之后仍停留在蝴蝶同宿的小邻域内, 则分界线量将满足 $|A| < 1$. 其它的问题是如何确定 "定向" 的条件, 即求 A 是正还是负的. 后面我们将回到这个问题.

由数值实验不难看到, 从分界线收敛于蝴蝶同宿这种方式, A 必须在 $(0, 1)$ 的范围内. 在这种情形下, 当 $\sigma < 0$ 时所有事情都很简单: 蝴蝶同宿或者分裂成两个稳定

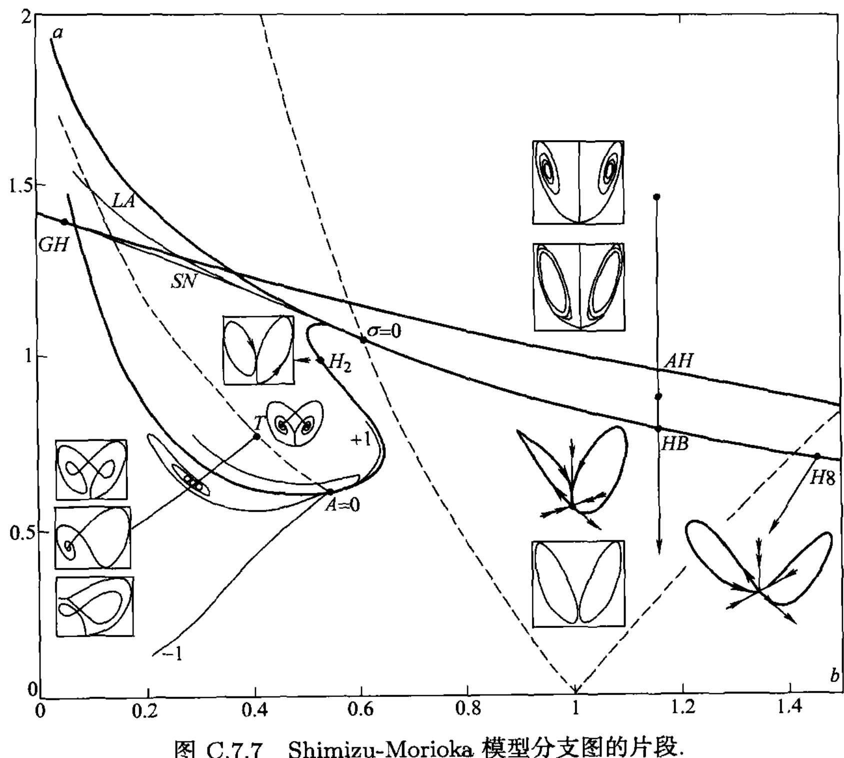


图 C.7.7　Shimizu-Morioka 模型分支图的片段.

的周期轨道 (图 C.7.8(g)), 或者只有一个稳定的对称周期轨道 (图 C.7.8.(i)). 由 13.6 节得知, 当 $\sigma > 0$ 时, 两条分支曲线从这个余维 2 点出发. 它们对应于鞍 - 结点分支 (图 C.7.8(d)) 和二重同宿回路 (图 C.7.8(f)). 对称性使得问题中增加了其它多余的分支现象. 特别有兴趣的分支如图 C.7.8(c) 所示. 它导致形成将闭区间映为其自己的映射. 进一步, 由于映射的导数在这部分大于 1, 它不包含稳定周期点但有无穷多个不稳定点. 这是出现没有稳定轨线的不变吸引集的时刻 —— 拟 Lorenz 吸引子. 按照流, 当在原点的鞍点的一维分界线位于鞍点周期轨道的二维稳定流形上时就会出现这个分支, 这个鞍点周期轨道先前已经从每个回路分支出 (Lorenz 方程中类似的分支如图 C.7.14 所示). 由于 $A > 0$, 这些流形同胚于柱面. 这个分支出现在图 C.7.7 中的曲线 LA 上. 在余维 2 点 $\sigma = 0$ 附近, Lorenz 吸引子是非常薄, 看上去像一条稳定周期轨道 (见图 C.7.9). 注意, 我们应该验证在曲线 LA 上分界线量 A 无论何处都不为零. 如果为零, 可能出现如图 C.7.10 所示的情况, 它形象地显示当分界线量 A 变成负时 Lorenz 吸引子的主要分支是如何毁灭的. 我们将在下面讨论这个可能性.

迄今为止一个重要的结论是: 由于存在 $|A| < 1$ 时的蝴蝶同宿, 参数空间中 Lorenz 吸引子的存在性区域与余维 2 点相连接. 对 Shimizu-Morioka 模型中的 Lorenz 吸引子分支有兴趣的读者建议参考 [127, 129, 187], 对原来的 Lorenz 方程和其它类 Lorenz 方程感兴趣的请参看 [114, 115, 117, 161]. □

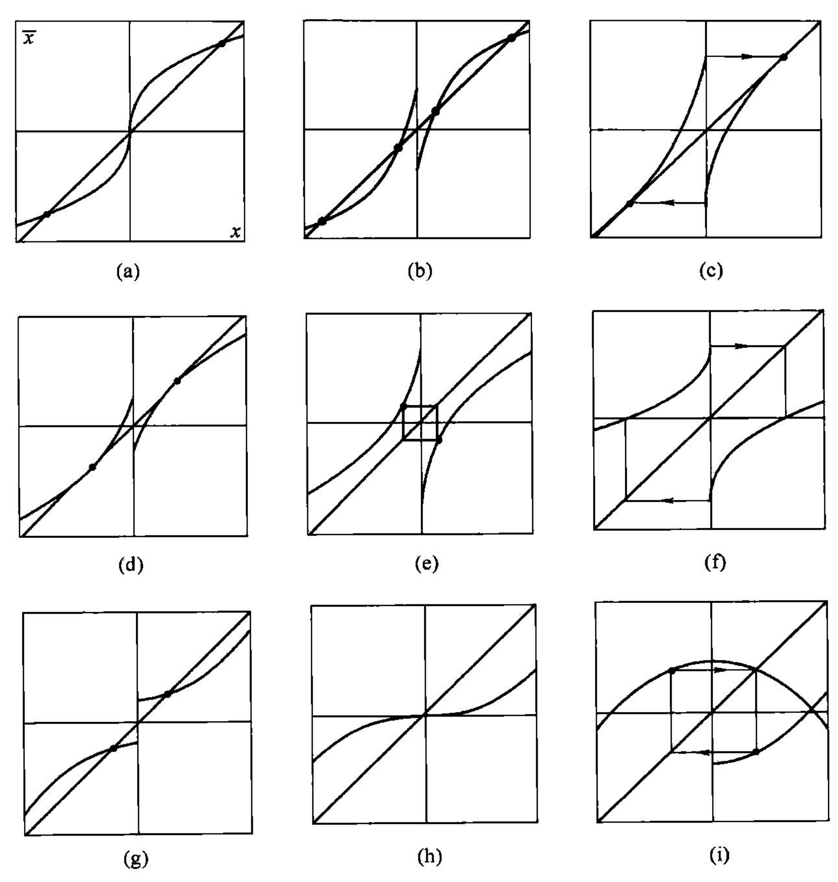


图 C.7.8 在余维 2 点 $\sigma = 0$ 附近的一维映射的分支. (a)—(f) 对应于 $\sigma > 0$, (g)—(i) 对应于 $\sigma < 0$.

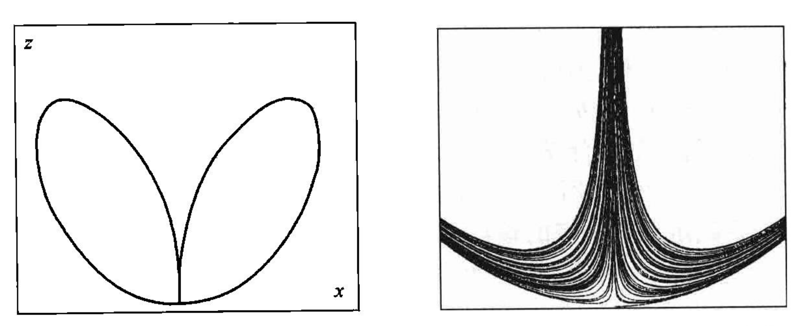


图 C.7.9 Shimizu-Morioka 模型中点 $\sigma = 0$ 附近的类 Lorenz 吸引子.

C.7.# 85. 考虑当 σ 从正值向负值变化时对称环的分支. 它能否产生倍周期分支? 鞍 – 结点分支? 利用问题的对称性. 对映射 (C.7.3), 求主要分支曲线的解析表达式. 这里的鞍 – 结点分支是否先于出现 Lorenz 吸引子 (即能否 “通过间歇出现”

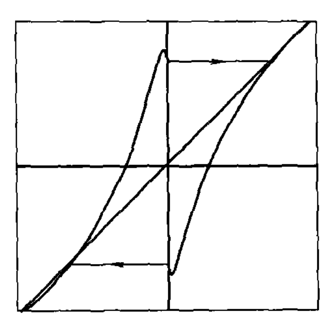


图 C.7.10　如果在曲线 LA 上 $A<0$, Lorenz 吸引子不出现.

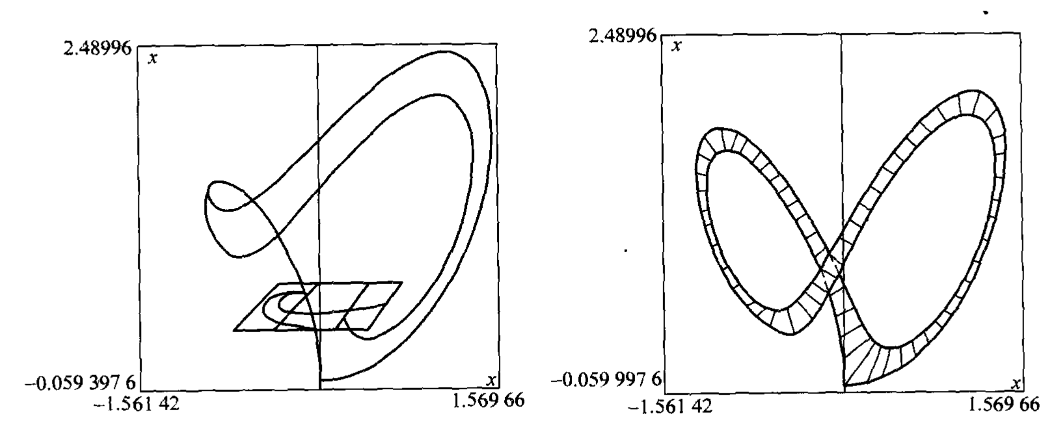


图 C.7.11　扭转的 ($A<0$) 和可定向的 ($A>0$) 二重同宿回路. 二维 Poincaré 映射在分界线量 A 变成负值以后有不同的类钩形.

混沌)? 当 A 从正值变到负值时, 研究满足 $A>1$ 时的分段线性映射, 并确定 A 的临界值, 即从它以后出现 Lorenz 吸引子. □

Shimizu-Morioka 模型中的另一个余维2同宿分支出现在对应于二重同宿回路的曲线 H_2 上的 ($a\simeq 0.605, b\simeq 0.549$). 在这一点分界线量 A 为零, 回路变成扭转的, 即我们遇到了倾角 - 翻转分支 (见图 13.4.8 和 C.7.11). 二维局部 Poincaré 映射的几何如图 13.4.5 和图 13.4.6 所示. 为了找到我们的情形对应于 13.6 节分类中的哪一种, 我们还需要确定在这一点的鞍点指标 ν. 又如鞍 - 焦点同宿回路情形, 非常重要的是确定 $\nu<\frac{1}{2}$ 还是 $\nu>\frac{1}{2}$. 简单计算显示对给定的参数值有 $\nu>\frac{1}{2}$. 因此, 每个蝴蝶同宿回路的分支开折与 13.6 节相同. 下面的四个分支曲线都是从这点出发. 它们对应于鞍 - 结点分支 (在图 C.7.7 中标为 “+1”), 倍周期 (标为 “−1”) 以及两条二重分界线回路曲线 (这些曲线在 (a,b) - 平面内盘旋终止于T - 点). (a,b) - 平面内的虚曲线对应于图 13.6.4 中的分支图的 $A=0$ - 轴. 在这条曲线的上方, 原点的所有同宿回路都是可定向的, 而在它的下方它们都是扭转的. 在曲线 $A=0$ 和同宿分支曲线的每一个交点处, 分支集的结构类似, 除非 $\nu<\frac{1}{2}$. 这个比值的重要性在研究一

维 Poincaré 映射

$$\overline{x} = (\mu + A|x|^{\nu} + |x|^{\gamma})\text{sign}(x), \tag{C.7.4}$$

时变得很明显, 其中 $|\mu, A| \ll 1, \nu = \dfrac{|\lambda_2|}{\lambda_1}$ 和 $\gamma = \dfrac{|\max\{2\lambda_2, \lambda_3\}|}{\lambda_1}$, 这里 $\lambda_{1,2}$ 分别是在鞍点的主不稳定和稳定特征指数, λ_3 是非主稳定特征指数.

当 $A = 0$时, 上面映射的轨线稳定性由第三项确定. 显然它依赖于 γ. 对在曲线 $A = 0$ 上的参数值, 若 $\gamma > 1$ 则映射是压缩的, $\gamma < 1$ 时是扩张. 假设 $2\lambda_2 > \lambda_3$, 关于 γ 的条件化为 $\nu < \dfrac{1}{2}$ 或者 $\nu > \dfrac{1}{2}$. 因此, 不难看到, 在 $\nu < \dfrac{1}{2}$ 映射可以有如图 C.7.8(a) 和在 $\nu > \dfrac{1}{2}$ 如图 C.7.8(h) 所示的形式. 如果 $\nu < \dfrac{1}{2}$, 对 A 的零值不可能有稳定点.

截断映射 (没有 $|x|^{\gamma}$ 项) 满足 $\dfrac{1}{2} < \nu < 1$ 和 $A > 0$ 时的分支集的结构与上面共振情形 $\nu = 1$ 的相同. 情形$A < 0$叙述在图 C.7.12(a)—(c) 中. 读者可挑战这个映射的分支研究. 情形 $A < 0$ 的特性是这个映射可以有不变吸引区间, 映射将它映为它自己 (图 C.7.12(c)). 我们可以在这个区间上确定具有 "不可定向的 Lorenz 吸引子" 的混沌性态[127,129].

借助流, 这意味着在参数空间内, 对从 $A < 0$ 这边连接 $H8$ 上的点 $A = 0$ 的指数狭窄区域中的参数值, 存在包含无穷多个鞍点周期轨道的类 Lorenz 吸引子, 这些周期轨道的稳定和不稳定流形同胚于 Möbius 带.

一维映射 (C.7.4), 当 $A < 0$ 时有类似抛物线的图, 如图 C.7.12(d)—(f)所示. 显然我们应该预见倍周期级联 (图 C.7.12(c) 和 C.7.11(e)), 它类似于出现在 C.6 节中对纯粹的二次映射的研究. 不同的是在间断点的无穷导数保证了在原点附近的强扩张.

倍周期级联在这里与同宿二重级联密切相关 [71, 120, 126], 见图 C.7.13.

二维映射对在区域 $A < 0$ 中沿着曲线 $H8$ 的参数值呈明显的 "钩形" 状, 如图 C.7.10 所示. 事实上这个观察对计算同宿回路的定向提供了最简单的方法, 就是说, 在接近于稳定流形的截面上选择点并计算对应的轨线, 我们验证轨线的初始点和最终点是否位于这个截面上 W^s 的同一侧. 如果是, 则 $A > 0$, 否则 $A < 0$. 初始点应该相当地接近于 W^s, 因为当 A 多次改变符号又变为正时, 回路变成两次扭转, 等等. 图 C.7.7 显示两条这样的第二次分支曲线, 它们从点 $A = 0$ 出发并盘旋终止于 (a, b) – 平面上的 T – 点 (在 [35,174] 中有对 T – 点细致结构的研究). 这种余维 2 点 (图 C.7.7 中近似于 $a \simeq 0.781, b \simeq 0.39$) 对应于含有在原点的鞍点和不平凡的鞍 – 焦点的异宿环. 由 [35] 得知, 在主要 T – 点附近存在类似的凝聚序列, 它们位于由对应这些鞍 – 焦点的同宿和异宿分支曲线所界定的扇形区域内. 这部分地解释了为什么分界线量 A 在这里改变了它的符号, 因此, 回路改变了定向 (记住鞍 – 焦点附近的二维 Poincaré 映射).

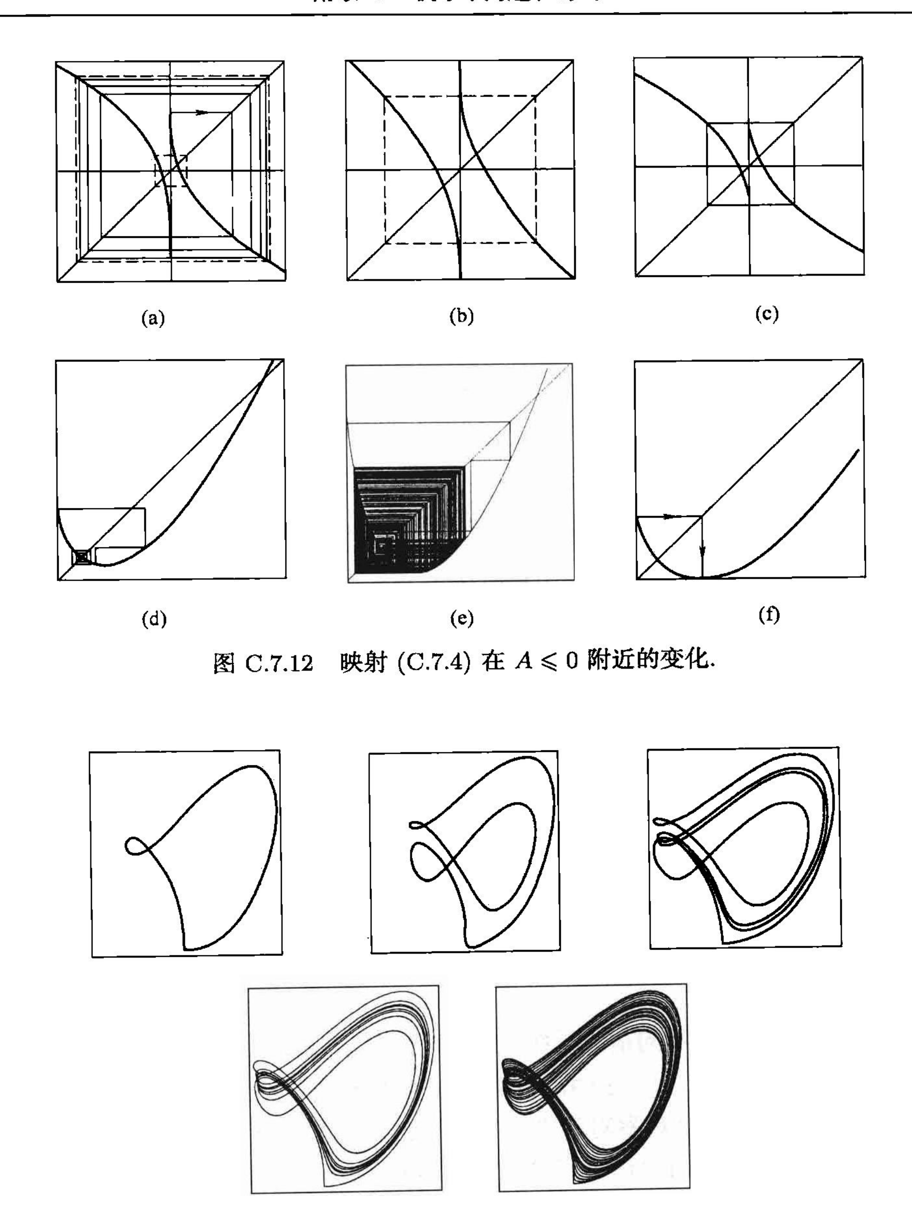


图 C.7.12　映射 (C.7.4) 在 $A \leqslant 0$ 附近的变化.

图 C.7.13　Shimizu-Morioka 模型中当参数 a 变化时 ($b = 0.40$) 的同宿二重级联. 利用**打靶法**[1]求对应的参数值 a.

C.7.# 86. 假设在 Shimizu-Morioka 模型中存在鞍 - 焦点的同宿回路 (如 T - 点). 不用计算鞍 - 焦点的特征指数, 我们能够对局部结构说些什么: 是平凡 (一条周期轨道), 还是复杂 (无穷多条周期轨道)?

[1] 参看库兹涅佐夫著《应用分支理论基础》第 10 章 —— 译者注.

经典的 Lorenz 方程

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x-y),\\ \dot{y} &= rx-y-xz,\\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z+xy.\end{aligned} \tag{C.7.5}$$

它的 (r,σ) 分支图的片段如图 C.7.14 所示. 探测路径 $\sigma=10$ 与蝴蝶同宿的曲线 HB 的交点以及其上鞍点的一维分界线趋于鞍点周期轨道的曲线 LA. 求曲线 LA 上的点, 在该点上方朝着 r 较大值方向穿过 LA 时 Lorenz 吸引子不出现. 图 C.7.14 中通过 T - 点的虚线对应当分界线量 $A=0$ 时二维 Poincaré 映射中产生钩形的时刻 (见关于 Shimizu-Morioka 模型的讨论).

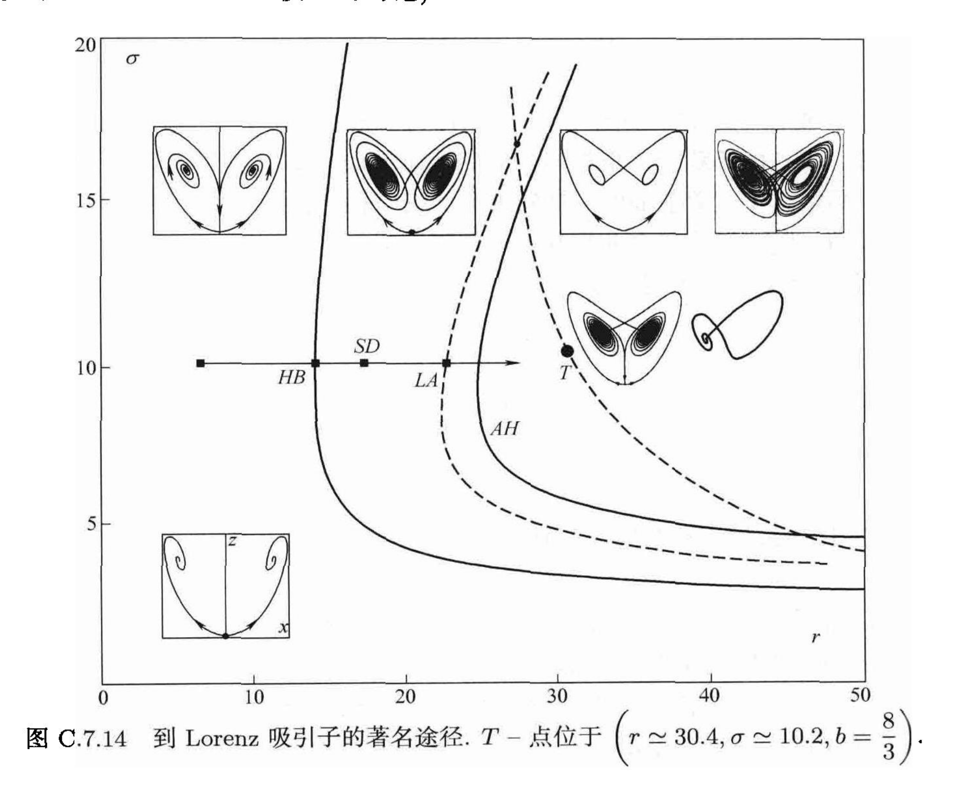


图 C.7.14 到 Lorenz 吸引子的著名途径. T - 点位于 $\left(r\simeq 30.4, \sigma\simeq 10.2, b=\frac{8}{3}\right)$.

我们已经看到对称系统中的同宿分支有许多共同点. 接下来我们描述在 “典型” 系统中鞍 - 焦点同宿回路所形成的通有现象. 特别地, 这个机制很好地工作在 Rössler 模型, 新 Lorenz 模型, 规范形 (C.2.27) 和许多其它模型中.

通向这种同宿分支的第一步是超临界 Andronov-Hopf 分支: 稳定平衡态失去它的稳定性变成鞍 - 焦点. 它的二维不稳定流形的边界是新生成的稳定周期轨道. 接下来, 让稳定周期轨道的实主乘子与其它的合并, 此后它们变成一对停留在单位圆内部的复共轭. 然后鞍 - 焦点的不稳定流形开始围绕稳定周期轨道, 从而形成一个

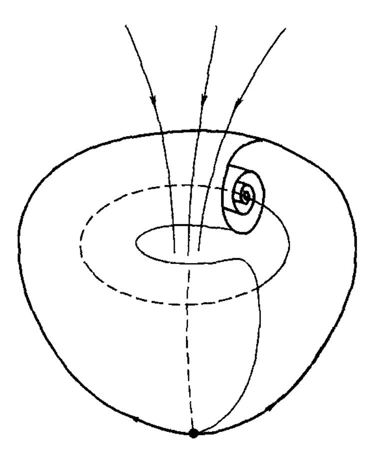


图 C.7.15　一个吸引涡流.

吸引 "杯子" 或者 "涡流", 如图 C.7.15 所示. 当系统的参数进一步变化时, 涡形扩大, 最后鞍 - 焦点的不稳定流形接触到它的稳定流形. 通常, 由于翻转分支或者环面分支, 这个同宿分支接着前面的周期轨道分支失去稳定性. 此外, 如果在鞍 - 焦点的鞍点量是正的, 则涡流将包含非平凡结构的吸引集.

让我们用新 Lorenz 模型 [128]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^2 - z^2 - ax + aF,\\ \dot{y} &= xy - bxz - y + G,\\ \dot{z} &= bxy + xz - z\end{aligned} \tag{C.7.6}$$

的例子形象化地实现这些步骤, 其中 (F, G) 是控制参数且 $\left(a = \dfrac{1}{4}, b = 4.0\right)$ (见图 C.7.16).

新 Lorenz 模型的分支很丰富. 其中之一是非横截同宿鞍 - 结点分支. 在 C.2 节, 我们已经找到正则鞍 - 结点分支曲线 SN. 与图 C.6.10 和图 C.2.4 相比较, 图 C.7.17 是系统在 SN 的上分枝附近分支图的放大. 这个分枝对应于具一个零特征指数而其它两个有负实部的结构不稳定平衡态. 在 SN 的左方, 这个临界平衡点消失, 在 SN 的右方它分裂成两个: 稳定点和鞍 - 焦点 (2,1). 曲线 H_1 对应于鞍 - 焦点同宿回路. H_1 与 SN 合并的点对应于非横截同宿鞍 - 结点余维 2 分支. 在这样的点, 鞍 - 结点的不稳定流形沿着强稳定流形回到平衡态. 曲线 SN 的剩余部分对应余维 1 分支曲面, 这些点将它分为两类交错区间. 在这些区间从右到左的道路上的分支序列是完全不同的. 在第一种情形这是一个普通的鞍 - 结点分支: 两个平衡态合并并消失. 在第二类线段上的点对应于具有同宿轨道的鞍 - 结点平衡态, 它在 SN 的左边当鞍 - 结点消失后变成一个吸引极限环. 好奇的是, 这个分支序列是可逆的: 从左到右穿过 SN 时, 周期轨道的稳定性回到了吸引的平衡态. 关于这一点, 见 14 章对 "安全"

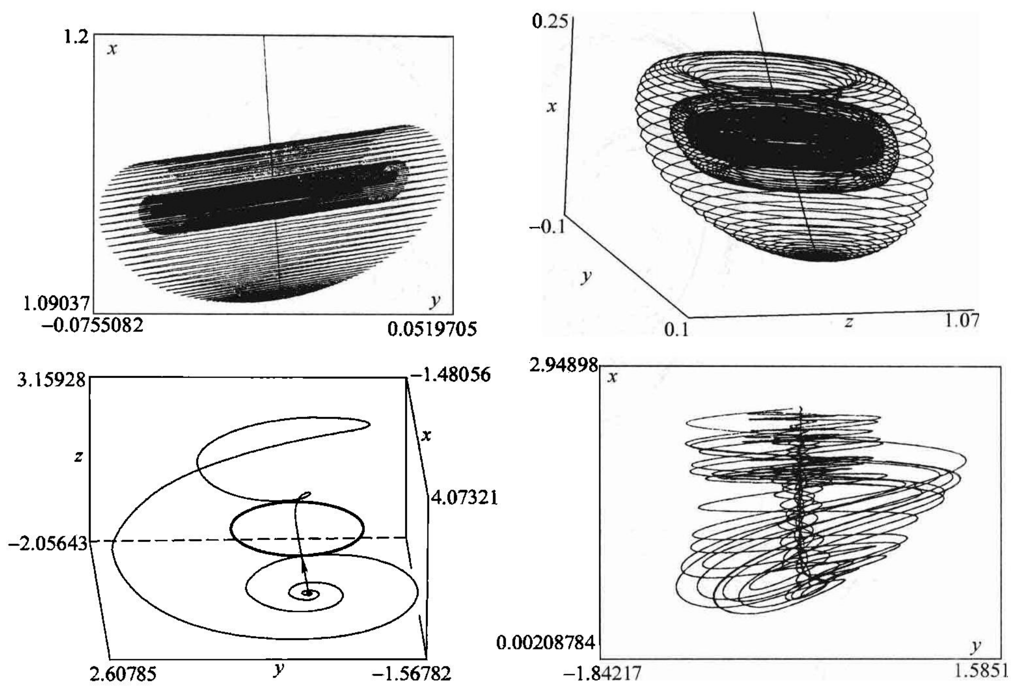


图 C.7.16　在新 Lorenz 系统中涡流的生成.

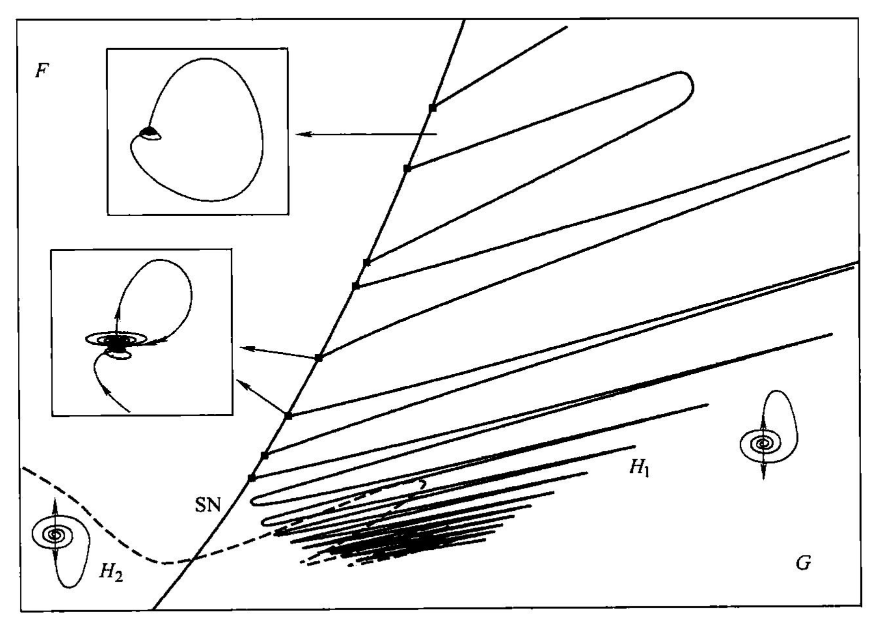


图 C.7.17　图 C.6.10 中分支图的放大. 点线对应于非横截鞍 – 结点同宿分支.

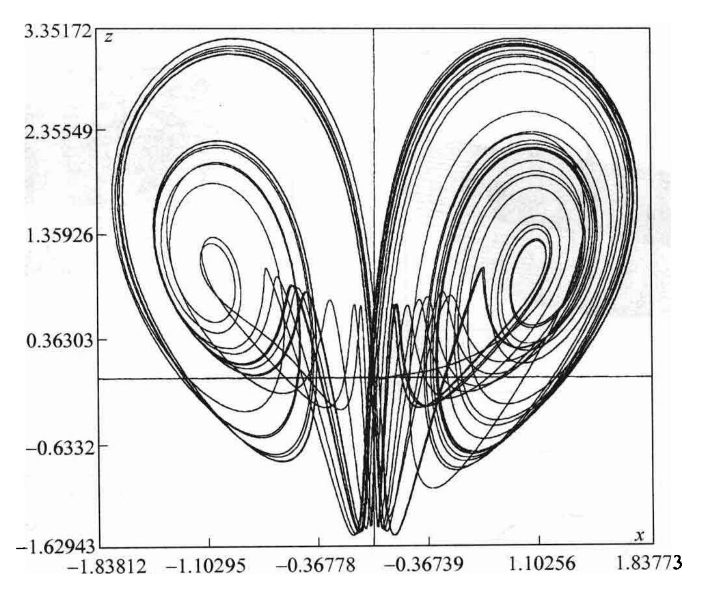


图 C.7.18　系统 (C.7.7) 在 $a=2, b=0.5, \mu=1.2$ 上的同宿爆炸起因于鞍 – 焦点的蝴蝶同宿.

和“危险”分支的讨论.

我们用对应于四维情形的鞍 – 焦点蝴蝶同宿的阐述来结束这一节. 考虑四维 Lorenz 系统的扰动

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -10(x-y), \\
\dot{y} &= rx - y - xz, \\
\dot{z} &= -\frac{8}{3}z + \mu w + xy, \\
\dot{w} &= -\frac{8}{3}w - \mu z
\end{aligned}$$

以及四维 Shimizu-Morioka 模型的扰动

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= -ay + x - xz, \\
\dot{z} &= w, \\
\dot{w} &= -bw - \mu z + x^2,
\end{aligned} \tag{C.7.7}$$

其中新参数 $\mu \geqslant 0$ 的引入使得限制在 (z, w) – 子空间上的原点的鞍点平衡态成为稳定焦点.

C7.# 87. 求在原点的平衡点的稳定、强稳定和不稳定线性子空间. 数值探测原点的主要同宿回路 ($\mu = 0$ 是好的初始猜测). 借助蝴蝶同宿或8字形同宿对它们进

行分类. 在同宿分支第一个和第二个鞍点量是什么? 对两个模型通过同宿爆炸出现的周期轨道的稳定和不稳定流形的维数你能够说些什么? 构造 Poincaré 映射. □

参考文献

[*] 这里的参考文献不求很全, 仅包含直接涉及本书内容的文献. 此外, 与本书课题特别相关的参考书都标上了星号.

[1] Afraimovich, V. S., Bykov, V. V. and Shilnikov, L. P. [1977] "The Origin and structure of Lorenz attractor," *Sov. Phys. Dokl.* **22**(5), 253–255.

[2] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. [1973] "On critical sets of Morse-Smale systems," *Trans. Moscow Math. Soc.* **28**, 1761–1765.

[3] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. [1974] "On some global bifurcations connected with the disappearance of fixed point of a saddle-node type," *Soviet Math. Dokl.* **15**, 1761–1765.

[4] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. [1974] "On small periodic perturbations of autonomous systems," *Doclady AN SSSR* **5**, 734–742.

[5] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. [1977] "The annulus principle and problems on interaction of two self-oscillation systems," *Prikladnaja Matematika i Mehanika* **41**, 618–627.

[6] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. [1982] "On a bifurcation of codimension-one leading to the appearance of a countable set of tori," *Soviet Math. Dokl.* **25**, 101–105.

[7] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. [1991] "Invariant tori, their breakdown and stochasticity," *Amer. Math. Soc. Transl.* **149**, 201–211.

[8] Andronov, A. A. [1933] "Mathematical problems of the theory of selfoscillations," in *All-Union Conference on Auto-oscillations*, November 1933(GTTI: Moscow-Leningrad), 32–71.

[9] Andronov, A. A. and Leontovich, E, A. [1937] "Some cases of the dependence of the limit cycles upon parameters," *Uchenye zapiski Gorkovskogo Universiteta* **6**, 3–24.

[10] Andronov, A. A. and Leontovich, E. A. [1968] "Dynamical systems of first degree of

roughness on the plane," *Am Math. Soc., Transl., II,Ser.* **75**, 149–199.

[11] * Andronov, A. A., Leontovich, E, A., Gordon, I. E. and Maier, A. G. [1971] *The Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane* (Israel program of scientific translations, Jerusalem).

[12] * Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. E. and Maier, A. G. [1973] *The Theory of Dynamical Systems on a Plane* (Israel program of scientific translations, Jerusalem).

[13] Andronov, A. A. and Pontryagin, L. S. [1937] "Systèmes grossières," *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **14**(5), 247–251.

[14] Andronov, A. A. and Vitt, A. A. [1930] "Zur Theorie des Mitmehmens von van der Pol," *Archiv für Elektrotechnik,* Bd. XXIV, 99.

[15] Andronov, A. A. and Vitt, A. A. [1933] "On Lyapunov stability," *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fisiki* **5**.

[16] Anosov, D. V., Bronshtejn, I. U., Aranson, S. Kh. and Grines, V. Z. [1988] *Smooth Dynamical Systems, Dynamical Systems I*, Encyclopedia of Mathematics Science I (Springer-Verlag: New York), 149–233.

[17] * Andronov, A. A., Vitt, A. A. and Khaikin, S. E. [1966] *Theory of Oscillations* (Pergamon Press: Oxford).

[18] Arneodo, A., Coullet, P., Spiegel, E. and Tresser, C. [1981] "Asymptotic chaos," *Physica* **D14**, 327–347.

[19] Arnold, V. I. [1973] "Lectures on bifurcations and versal families," *Recrs. Math. Surv.* **27**(5), 54–123.

[20] * Arnold, V. I. [1982] *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag: New York).[1)]

[21] * Arnold, V. I., Afraimovich, V. S., Ilyashenko, Y. S. and Shilnikov, L. P. [1994] *Bifurcation Theory*, Dynamical Systems V. Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Springer-Verlag: New York).

[22] Arnold, V. I. and Ilyashenko, Y. S. [1985] *Ordinary Differential Equations,* Dynamical Systems I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Springer-Verlag: New York).

[23] Auslander, L., Green, L. and Hahn, F. [1963] "Flows on homogeneous spaces," *Annals of Mathematics Studies* **53** (Princeton University Press: Princeton, N.J.).

[24] * Bautin, N. N. [1949] *Behavior of Dynamical Systems near the Boundaries of Stability Regions* (OGIZ GOSTEHIZDAT: Leningrad).

[25] * Bautin, N. N. and Leontovich, E. A. [1976] *Methods and Rules for the Qualitative Study of Dynamical Systems of the Plane* (Nauka: Moscow).

[26] Bautin, N. N. and Shilnikov, L. P. [1980] "Suplement I: Safe and dangerous boundaries of stability regions," *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Russian translation of the book by Marsden, J. E. and McCracken, M. (Mir: Moscow).

1) 有中译本(译自俄文版)——阿诺尔德(В.И.Арнольд) 著. 常微分方程的几何方法. 齐民友, 译. 北京: 科学出版社, 1989.

[27] Belitskii, G. R. [1979] *Normal Forms, Invariants, and Local Mappings* (Naukova Dumka: Kiev).

[28] Belogui, J. A. [1981] *Module de estabilidade para campos vetoriais emvariedades tridimensionais* (Ph.D. Thesis, I.M.P.A., Brazil).

[29] Belyakov, L. A. [1974] "A case of the degeneration of a periodic motion with homoclinic curves," *Math. Zametki* **15**, 336–341; [1980] "The bifurcation set in a system with a homoclinic saddle curve," *ibid.* **28**, 910–916; [1984] "Bifurcation of systems with homoclinic curve of a saddle-focus with saddle quantity zero," *ibid.* **36**, 838–843.

[30] Bendixson, J. [1901] "Sur les courbes definies par les equations differentielles," *Acta Math.* **24**.

[31] Birkhoff, G. D. [1927] "Dynamical systems," *Amer. Math. Soc., Colloquium Publications* **9**.

[32] Birkhoff, G. D. [1935] "Nouvelles recherche sur les systèmes dynamiques," *Memorie Pont Acad. Sci. Novi Lyncaei* **53**(1), 85–216.

[33] Bogdanov, R. I. [1975] "Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues," *Functional Analysis and Its Applications* **9**(2), 144–145.

[34] Bykov, V. V. [1978] "On the structure of a neighborhood of a separatrix contour with a saddle-focus," in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equation* (Gorky: Gorky State University), 3–32; [1980] "On bifurcations of dynamical systems with a separatrix contour containing a saddle-focus," *ibid.* 44–72; [1988] "On the birth of a non-trivial hyperbolic set from a contour formed by separatrices of a saddle," *ibid.* 22–32.

[35] Bykov, V. V. [1993] "The bifurcations of separatrix contours and chaos," *Physica* **D62**, 290–299.

[36] Cartwright, M. L. and Littlewood, J. E. [1945] "On nonlinear differential equations of the second order, I: The equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a), k$ large," *J. Lond. Math. Soc.* **20**, 180–189.

[37] Chenciner, A. [1981] "Courbes fermées invariantes non-normalement hyperboliques au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénerée de diffeomorphismes $\mathbb{R}^2$," *Comptes Rendus Acad. Sci. 292, Ser.* **1**, 507–510.

[38] Chow, S.-N., Deng, B. and Fiedler, B. [1990] "Homoclinic bifurcations of resonant eigenvalues," *J. Dyn. Diff. Eq.* **2**(2), 177–245.

[39] * Chow, S.-N. and Hale, J. [1982] *Methods of Bifurcation Theory* (Springer-Verlag: New York).

[40] * Chow, S.-N., Li, C. and Wang, D. [1994] *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields* (Cambridge University Press: Cambridge).

[41] Chua, L. O. [1998] *CNN: A Paradigm for Complexity* (World Scientific: Singapore).

[42] de Melo, W. [1980] "Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms," *Topology* **19**, 9–21.

[43] de Melo, W. and van Streen, S. J. [1987] "Diffeomorphisms on surfaces with finite number of moduli," *Erg. Theory Dynam. Systems* **7**, 415–462.

[44] Deng, B. [1993] "Homoclinic twisting bifurcations and cusp horseshoe maps," *J. Dyn. Diff. Eq.* **5**, 417–467.

[45] Diaz, L., Rocha, J. and Viana, M. [1996] "Strange attractors in saddlenode cycles: prevalence and globality," *Invent. Math.* **125**, 37–74.

[46] Doedel, E. [1997] "Nonlinear numerics," *Int. J. Bif. Chaos* **7**(9–10), 2127–2143.

[47] Dulac, H. [1923] "Sur les cycles limites," *Bull. Soc. Math. France* **51**, 45–188.

[48] Fenichel, N. [1971] "Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows," *Indiana Univ. Math. J.* **21**, 193–226.

[49] Fink, A. M. [1974] *Almost Periodic Differential Equations,* Lecture Notes in Mathematics **377** (Springer-Verlag: Berlin, New York).

[50] Gambaudo, J. M., Glendinning, P. and Tresser, C. [1988] "The gluing bifurcation. I: Symbolic dynamics of the closed curves," *Nonlinearity* **1**(1), 203–214.

[51] Gavrilov, N. K. [1978] "On some bifurcations of an equilibrium state with one zero and a pair of purely imaginary roots," in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations* (Gorky State University: Gorky); [1987] "On bifurcations of equilibrium with one zero and pair of pure imaginary eigenvalues and additional degeneracy," *ibid.* 43–51.

[52] Gavrilov, N. K. and Roshchin, N. V. [1983] "On the stability of an equilibrium with one zero and a pair of pure imaginary eigenvalues," in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations* Leontovich-Andronova, ed., (Gorky State University: Gorky), 41–49.

[53] Gavrilov, N. K. and Shilnikov, A. L. [1996] "On a blue sky catastrophe model," Proc. Int. Conf. *Comtemp. Problems of Dynamical Systems Theory,* ed. Lerman, L. (Nizhny Novgorod State University: Nizhny Novgorod). [1999] "An Example of blue sky catastrophe," in *Ams Transl. Series II.* "Methods of qualitative theory of differential equations and related topics." (AMS, Providence, Rhode Island).

[54] Gavrilov, N. K. and Shilnikov, L. P. [1972] "On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve I," *Math. USSR Sbornik* **88**(44), 467–485.

[55] Gavrilov, N. K. and Shilnikov, L. P. [1973] "On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve II," *ibid.* **90**(1), 139–156.

[56] * Golubitsky, M. and Schaeffer, D. [1985] *Singularities and Groups in Bifurcation Theory I* (Springer-Verlag: New York).

[57] * Golubitsky, M., Stewart, I. and Schaeffer, D. [1988] *Singularities and Groups in Bifurcation Theory II* (Springer-Verlag: New York).

[58] Gonchenko, S. V. and Shilnikov, L. P. [1990] "Invariants of Ω-conjugacy of diffeomorphisms with a structurally unstable homoclinic trajectory," *Ukrainian Math. J.* **42**(2), 134–140.

[59] Gonchenko, S. V. and Shilnikov, I. P. [1993] "On moduli of systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve," *Russian Acad. Sci. Izv. Math.* **41**(3), 417–445.

[60] Gonchenko, S. V., Turaev, D. V. and Shilnikov, L. P. [1993a] "On models with non-rough

Poincaré homoclinic curves," *Physica* **D62**, 1–14.

[61] Gonchenko, S. V., Turaev, D. V. and Shilnikov, L. P. [1993b] "Dynamical phenomena in multi-dimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve," *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.* **47**(3), 410–415.

[62] Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. [1996] "Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits," *Interdisc. J. Chaos* **6**(1), 1–17.

[63] Gonchenko, S. V., Sten'kin. O. V. and Turaev, D. V. [1996] "Complexity of homoclinic bifurcations and Ω-moduli," *Int. J. Bifurcation & Chaos* **6**(6), 969–989.

[64] * Guckenheimer, J. and Holmes, P. [1983] *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag: New York), Series title: Applied Mathematical Sciences **42**.

[65] Guimond, L. S. [1999] "Homoclinic loop bifurcations on a Möbius band," *Nonlinearity* **12**(1), 59–78.

[66] Halanay, A. [1966] *Differential Equations; Stability, Oscillations* (Academic Press: New York) Series title: Mathematics in Science and Engineering **23**.

[67] Hale, J. and Kocak, H. [1991] *Dynamics and Bifurcations* (Springer-Verlag: New York).

[68] Hermann, M. [1971] "Mesure de Lebesgue et nombre de rotation," *Proc. Symp. Geometry Topology,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 597 (Springer-Verlag: New York), 371–295.

[69] Homburg, A. J. [1996] "Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields," *Memoirs of the A.M.S.* **578**.

[70] Homburg, A. J., Kokubu, H. and Krupa, M. [1994] "The cusp horseshoe and its bifurcations in the unfolding of an inclination flip homoclinic orbit," *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **14**, 667–693.

[71] Homburg, A. J., Kokubu, H. and Naudot, V. [1997] "Homoclinicdoubling cascades," preprint.

[72] Homburg, A. J. and Krauskopf, B. [1998] "Resonant homoclinic flip bifurcations," preprint, Free University-Berlin.

[73] Ilyashenko, Yu. S. and Yakovenko, S. Yu. [1991] "Finite-smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields," *Uspechi Mat. Nauk,* Vol. 46, **1**(277), 1–39.

[74] Ilyashenko, Yu. S. and Yakovenko, S. Yu. [1993] "Nonlinear Stokes phenomena in smooth classification problems," *Adv. Soviet Math.*, Vol. 14, 235–287.

[75] Khazin, L. G. and Shnol, E. E. [1991] *Stability of Critical Equilibrium States* (Manchester University Press).

[76] Khibnik, A. I, Kuznetsov, Y. A., Levitin, V. V. and Nikolaev, E. V. [1993] "Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODE's and iterated maps," *Physica* **D62**(1–4), 360–371.

[77] Kisaka, M., Kokubu, H. and Oka H. [1993] "Bifurcations to *N*-homoclinic orbits and *N*-periodic orbits in vector fields," *J. Dyn. Diff. Eq.* **5**, 305–357.

[78] Kokubu, H., Komuro, M. and Oka, H. [1996] "Multiple homoclinic bifurcations from

orbit flip. I. Successive homoclinic-doublings," *Int. J. Bif. Chaos* **6**, 833–850.

[79] Kokubu, H. and Naudot, V. [1997] "Existence of infinitely manyhomoclinic-doubling bifurcations from some codimension-three homoclinic orbits," *J. Dyn. Diff. Eq.* **9**, 445–462.

[80] Krauskopf, B. [1994] "Bifurcation sequences at 1:4 resonance: An inventory," *Nonlinearity* **7**(3), 1073–1091.

[81] Krylov, N. M. and Bogolyubov, N. N. [1947] *Introduction to Nonlinear Mechanics* (Princeton University Press: Princeton).

[82] * Kuznetsov, Yu. A. [1998] *Elements of Applied Bifurcation Theory* (Springer-Verlag: New York).

[83] Kuznetsov, Yu. A. and Levitin, V. V. [1996] "CONTENT: A multiplatform environment for analyzing dynamical systems" (Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam), ftp.cwi.nl/pub/CONTENT.

[84] Levitan, B. M. and Zhikov, V. V. [1982] *Almost Periodic Functions and Differential Equations* (Cambridge University Press: Cambridge [Cambridgeshire]; New York).

[85] Leontovich, E. A. [1951] "On birth of limit cycles from separatrices," *DAN SSSR* **744**, 641–644.

[86] Li, W. and Zhang, Z. F. [1991] "The "blue sky catastrophe" on closed surfaces," *Adv. Series Dynam. Syst.* **9** (World Scientific, River Edge, N.J.), 316–332.

[87] Lorenz, E. N. [1963] "Deterministic non-periodic flow," *J. Atmos. Sci.* **20**, 130–141.

[88] Lukyanov, V. [1982] "On bifurcations of dynamical systems with a separatrix loop to a saddle-node," *Diff. Eq. (Russian)* **58**, 1493–1506.

[89] Lyapunov, A. M. [1950] "Problème général de la stabilité du mouvement," *Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse* **9**, 203–474.

[90] Lyapunov, A. M. [1966] *Stability of Motion* (Academic Press: New York).

[91] Malkin, I. G. [1952] *Theory of Stability of Motion* (Washington, D. C., United States Atomic Energy Commission, Series title: Translation series: AEC-tr-3352).

[92] Markov, A. A. [1933] "Stabilitat im Liapunoffschen Sinne und Fastperiodizitat," *Math. Zeitschr.* **36**.

[93] Mayer, A. G. [1943] " On center trajectories and a Birkhoff problem," *Mat. Sbornik* **12**(1).

[94] Meyer, K. R. [1968] "Energy functions for Morse–Smale systems," *Anter. J. Math.* **90**(4), 1031–1040.

[95] Medvedev, V. S. [1980] "On a new type of bifurcations on manifolds," *Mat. Sbornik* **113**, 487–492.

[96] Naudot, V. [1996] "Bifurcations homoclines des champs de vecteurs en dimension trois," thesis, l'Université de Bourgogne, Dijon.

[97] Newhouse, S., Palis, J. and Takens, F. [1983] "Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms," *Publ. Math. IHES* **57**, 5–71.

[98] * Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V. [1960] *Qualitative Theory of Differential Equa-*

tions (Princeton, N.J., Princeton University Press. Series title: Princeton Mathematical Series **22**).[2]

[99] Nozdracheva, V. P. [1982] "Bifurcation of a noncoarse separatrix loop," *Differ. Equations* **18**, 1098–1104.

[100] Ovsyannikov, I. M. and Shilnikov, L. P. [1987] "On systems with a saddlefocus homoclinic curve," *Math. USSR Sb.* **58**, 557–574.

[101] Ovsyannikov, I. M. and Shilnikov, L. P. [1992] "Systems with a homoclinic curve of multi-dimensional saddle-focus type, and spiral chaos," *Math. USSR Sb.* **73**, 415–443.

[102] Palis, J. [1969] "On Morse–Smale dynamical systems," *Topology* **4**, 385–404.

[103] Palis, J. [1978] "A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability," *Asterisque* **51**, 335–346.

[104] Palis, J. and de Melo, W. [1982] *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction* (Springer-Verlag: New York).

[105] Palis, J. and Pugh, C. [1975] "Fifty problems in dynamical systems," *Lecture Notes in Mathematics* Vol. 486, 34–353.

[106] Palis, J. and Smale, S. [1969] "Structural stability theorem," preprint.

[107] Peixoto, M. M. [1962] "Structural stability on two-dimensional manifolds," *Topology* **1**, 101–120.

[108] Poincaré, H. [1903] "Sur l'equilibre d'une masses fluide animés d'un mouvement de rotation," *Acta Mathematica* **7**.

[109] Poincaré, H. [1885] "Sur les courbes définies par des équations différentielles," *J. de Math. Pures et Appl.* **1**, 167–244.

[110] Poincaré, H. [1903] *Figures d'equilibre d'une masse fluide* (Paris).

[111] Poincaré, H. [1921] "Analyse des travans de Henri Poincaré faite parluimeme," *Acta Mathematica* **38**, 36–135.

[112] Pontryagin, L. S. [1933] "Les fonctions presque périodiques et l'analysis situs," *C.R. Acad. Sci.* **196**(17), 1201–1203.

[113] Pugh, C. C. [1967] "The closing lemma," *Amer. J. Math.* **89**, 956–1009.

[114] Robinson, C. [1989] "Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type," *Nonlinearity* **2**, 495–518.

[115] Robinson, C. [1992] "Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type II," *SIAM J. Math. Anal.* **23**, 1255–1268.

[116] Roussarie, R. [1986] "On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields," *Bol. Soc. Math. Brasil* **17**(2), 67–101.

[117] Rychlik, M. R. [1990] "Lorenz attractors through Sil'nikov-type bifurcation. Part I," *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **10**, 793–821.

---

[2] 有中译本(译自俄文版)——涅梅茨基(В.В.Немыцкий), 斯捷巴诺夫(В.В.Степанов)著. 微分方程定性论(上册). 王柔怀, 童勤谟译. 北京: 科学出版社, 1956; 涅梅茨基(В.В.Немыцкий), 斯捷巴诺夫(В.В.Степанов)著. 微分方程定性论(下册). 王柔怀, 童勤谟译. 北京: 科学出版社, 1959.

[118] Sacker, R. [1964] "On invariant surfaces and bifurcations of periodic solutions of ordinary differential equations," *IMM-NUY* **333**, New York State University.

[119] Sanstede, B. [1993] "Verzweigungstheorie homokliner Verdopplungen," Ph.D. Thesis, Free University of Berlin,Institut für Angewandte Analysis und Stochastic, Report No. 7, Berlin.

[120] Sanstede, B. [1995] "Center manifold for homoclinic solutions," *Weierstrass Inst. Appl. Analysis Stochastic*, preprint N 186.

[121] Shashkov, M. V. [1994] "Bifurcations of separatrix contours," Ph.D. Thesis, Nizhny Novgorod State University.

[122] Shashkov, M.V. [1992] "On bifurcations of separatrix contours with two saddles," *Int. J. Bif. Chaos* **2**(4), 911–914.

[123] Shashkov, M. V. [1992] "On the bifurcations of separatrix contours on two-dimensional surfaces. I," *Selecta Math. Sovietica* **11**(4), 341–353.

[124] Shashkov, M. V. [1994] "On the bifurcations of separatrix contours on two-dimensional surfaces. II," *ibid.* **13**(2), 175–182.

[125] Shashkov, M. V. and Turaev, D. V. [1996] "On the complex bifurcation set for a system with simple dynamics," *Int. J. Bif. Chaos* **6** (5), 949–968.

[126] Shilnikov, A. L. [1990] "Qualitative and numerical analysis of Lorenz-like systems," Ph.D Thesis, Gorky State University.

[127] Shilnikov, A. L. [1993] "Bifurcations of the Lorenz attractors in the Morioka–Shimizu model," *Physica* **D62**, 338–346.

[128] Shilnikov, A. L., Nicolis, G. and Nicolis, C. [1995] "Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model," *Int. J. Bif. Chaos* **5**(6), 1701–1711.

[129] Shilnikov, A. L., Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. [1993] "Normal forms and Lorenz attractors," *Int. J. Bif. Chaos* **1**(4), 1123–1139.

[130] Shilnikov, L. P. [1963] "Some cases of generation of periodic motion from singular trajectories," *Math. USSR Sbornik* **61**(103), 443–466.

[131] Shilnikov, L. P. [1965] "A case of the existence of a denumerable set of periodic motions," *Sov. Math. Dokl.* **6**, 163–166.

[132] Shilnikov, L. P. [1967] "The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus," *Soviet Math. Dokl.* **8**(1), 54–58.

[133] Shilnikov, L. P. [1967] "On a Poincaré-Birkhoff problem," *Math. USSR Sbornik* **3**, 415–443.

[134] Shilnikov, L. P. [1968] "On the generation of periodic motions from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type," *Math. USSR Sbornik* **6**, 427–437.

[135] Shilnikov, L. P. [1969] "On a new type of bifurcation of multi-dimensional dynamical systems," *Soviet Math. Dokl.* **10**, 1368–1371.

[136] Shilnikov, L. P. [1970] "A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type," *Math. USSR Sbornik*

10, 91–102.

[137] Shilnikov, L. P. [1975] "Theory of the bifurcations of dynamical systems," *Math. Physics* **20**, 674–676.

[138] Shilnikov, L. P. [1981] "The bifurcation theory and quasihyperbolic attractors," *Uspehi Mat. Nauk* **36**, 240–241.

[139] Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. [1997] "Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors," *Computers Math. Applic.* **34**(2–4), 173–193.

[140] Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. [2000] "A new simple bifurcation of a periodic orbit of blue sky catastrophe type," in AMS Transl. Series II. "Methods of qualitative theory of differential equations and related topics" (AMS, Rhode Island, Providence).

[141] Simonov, A. A. [1978] "An investigation of bifurcations in some dynamical systems by the methods of symbolics dynamics," *Sov. Math. Dokl.*, **19,** 759–763.

[142] Smale, S. [1960] "Morse inequalities for a dynamical system," *Bull. Amer. Math. Soc.* **66**, 43–49.

[143] Smale, S. [1963] "Diffeomorphisms with many periodic points," in *Diff. Combin. Topology*, ed. S. Cairus (Princeton University Press: Princeton), 63–86.

[144] Sotomayor, J. [1971] "Generic bifurcations of dynamical systems," in *Dynamical Systems Proc. Symp. Univ. Bahia,* Salvador, 561–582, Zbl.296.58007.

[145] Sotomayor, J. [1971] "Structural stability and bifurcation theory," in *Dynamical Systems Proc. Symp. Univ. Bahia,* Salvador, 549–560, Zbl.293.34081.

[146] Takens, F. [1974] "Singularities of vector fields," *Publ. Math. IHES* **43**, 47–100.

[147] Tresser, C. [1984] "About some theorems by L. P. Sil'nikov," *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor.* **40**, 441–461.

[148] Turaev, D. V. [1984] "On a case of bifurcations of a contour composed by two homoclinic curves of a saddle," in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations* (Gorky State University), 162–175.

[149] Turaev, D. V. [1991] "On bifurcations of dynamical systems with two homoclinic curves of the saddle," Ph.D. Thesis, Nizhny Novgorod State University.

[150] Turaev, D. V. [1996] "On dimension of nonlocal bifurcational problems," *Int. J. Bif. Chaos* **2**(4), 911–914.

[151] Turaev, D. V. and Shilnikov, L. P. [1987] "On bifurcations of a homoclinic "figure-eight" for a saddle with a negative saddle value," *Soviet Math. Dokl.* **44**(2), 422–426.

[152] Turaev, D. V. and Shilnikov, L. P. [1995] "On a blue sky catastrophe," *Soviet Math. Dokl.* **342**(5), 596–599.

[153] Turaev, D. V. and Shilnikov, L. P. [1998] "An example of a wild strange attractor," *Sbornik. Math.* **189**(2), 291–314.

[154] van der Pol, B. [1927] "Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance (receptance with reactive triode)," *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.* **3**, 65–80 (Reprinted in Bellman and Kakaba [1964]).

[155] Van Strien, S. J. [1982] *On Parameter Families of Vector Fields. Bifurcations Near*

Saddle-connections, Ph.D. Thesis, Utrecht University.

[156] * Wiggins, S. [1988] *Global Bifurcations and Chaos* (Springer-Verlag: New York).

[157] Eleonsky, V. M., Kulagin, N. E., Turaev, D. V. and Shilnikov, L. P. [1988] "On the classification of self-localized states of the electromagnetic field within nonlinear medium," DAN SSSR **309**(9) 898–852.

[158] Shashkov, M. [1999] "Impossibility of complete bifurcation description for some classes of systems with simple dynamics", Abstracts of Int. Conference, *Equadiff 99* (Berlin), 22.

[159] Shilnikov, L. P., Turaev, D. V. [1997] "Superhomoclinic orbits and multipulse homoclinic loops in Hamiltonion systems with discrete symmetries", Regular and Chaotic Dynamics **2**(3/4) 126–138.

[160] * Ilyashenno, Y. Li, Weigu [1999] Nonlocal bifurcations. *Math. Surveys and Monographs* **66** (AMS, Rhode Island, Providence).

[161] Afraimovich, V., Bykov, V. V. and Shilnikov L. P. [1983] "On attracting structurally unstable sets of Lorenz attrcator type", *Trans. Moscow. Math. Soc.* **44**, 150–213.

[162] Arneodo, A. Couller, P. H. and Spiegel, E. A. [1985] "The dynamics of triple convection", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **31**, 1–48.

[163] Arneodo, A. Couller, P. H., Spiegel, E. A. and Tresser, C. [1985] "Asymptotic chaos", *Physica* **14D**, 327–347.

[164] Back, A., Guckenheimer, J., Myers, M. R., Wicklin, F. J. and P. A. Worfolk [1992] "DsTool: Computer assisted exploration of dynamical systems", *Notices Amer. Math. Soc.* **39**(4), 303–309; ftp://cam.cornell.edu/pub/dstool/.

[165] Bautin, N. N. [1984] *Behavior of Dynamical Systems near the Boundaries of Stability Regions* (Nauka: Moscow).

[166] Belykh, V. N. [1980] Qualitative methods of the theory of nonlinear oscillations of concentrated systems, Gorky State Univerosity press: Gorky.

[167] Byragov, V. S. [1987] "Bifurcations in a two-parameter family of conservative mappings that are close to the Henon mapping", in *Methods of the Qualitative Theory of Differential Equations* (Gorky: Gorky State Univ. Press), 10–24.

[168] Bykov, V. V. [1998] "On bifurcations leading to chaos in Chua's circuit", *Int. J. Bifurcation & Chaos* **8**(4), 685–699.

[169] Bykov, V. V. and Shilnikov, A. L. [1992] "On boundaries of the region of existence of the Lorenz attractor", *Selecta Math. Sovietica* **11**(4), 375–382.

[170] Feigenbaum, M. [1978] "Quantative universality for a class of nonlinear transformations", *J. Statist. Phys.* **19**, 25–52.

[171] Gaspard, P. [1993] "Local birth of homoclinic chaos", *Physica* **D62**, 94–122.

[172] Gaspard, P. and Nicolis, G. [1983] "What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics?" *J. Stat. Phys.* **27**(1), 499–518.

[173] Glendenning, P. and Sparrow, C. [1984] "Local and global behavior near homoclinic orbits", *J. Stat. Phys.* **35**, 645–696.

[174] Glendenning, P. and Sparrow, C. [1985] "T-point: a codimension-two heteroclinic bifurcation", *J. Stat. Phys.* **43**, 479–488.

[175] Gonchenko, S. V. and Gonchenko, V. S. [2000] "On Andronov-Hopfbifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies", Preprint No. 556, WIAS, Berlin.

[176] Gonchenko, S. V. and Komlev, Yu. A [1988] "Bifurcations and chaos in a cubic map of the plane", in *Methods of Qualitative Theory of Diff. Equations* (Gorky University Press: Gorky), 33–39.

[177] Hindmarsh, J. L. and Rose, R. M. [1984] "A model of neuronal bursting using three cioupled first order differential equations", *Proc. R. Soc. Lond.* **B221**, 87–102.

[178] Khibnik, A. I., Kuznetsov, Yu. A., Levitin, V. V. and Nikolaev, E. V. [1993] "Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODEs and iterated maps", *Physica* **62D**, 360–371.

[179] Khibnik, A. I., Roose, D. and Chua, L. O. [1993] "On periodic orbits and homoclinic bifurcations in Chua's circuit with smooth nonlinearity", *Int. J. Bifurcation & Chaos* **3**(2), 363–384.

[180] Krauskopf, B. and Osinga H. M. [1999] "Investigating torus bifurcations in the forced Van der Pol oscillator", in *Numerical Methods for Bifurcation Problems and Large-Scale Dynamical Systems* eds. E. J. Doedel, L. S. Tuckerman, IMA Volumes in Mathematics and its Applications **119**, Springer-Verlag, to appear.

[181] Osinga H. M. [1999] "Non-orientable manifolds of periodic orbits", *Proceedings of Equadiff 99*, Berlin, to appear.

[182] Kuznetsov, Yu. A. [1998] "CONTENT – integrated environment for analysis of dynamical systems Tutorial", Ecole Normale Superieure de Lyon, Rapport de Recherche UPMA-98-224; ftp://ftp.cwi.nl/pub/CONTENT.

[183] Lorenz, E. N. [1984] "Irregularity: A fundumental property of the athmosphere", *Tellus* **A36**, 98–110.

[184] Mira, C. [1987] *Chaotic Dynamics: From the One-dimensional Endomorphism to the Two-Dimensional Diffeomorphism.* (World Scientific: Singapore-New Jersey-Hong Kong).

[185] Pisarevskii, V., Shilnikov, A. L. and Turaev, D. V. [1998] "Asymptotic normal forms for equilibria with a triplet of zero charactersitic exponents in systems with symmetry", *Regular and Chaotic Dynamics* **3**(1), 19–27.

[186] Roschin, N. V. [1978] "Unsafe stability boundaries of the Lorenz model", *J. Appl. Math. Mech.* **42**(5), 1038–1041.

[187] Rucklidge, A. M. [1994] "Chaos in magnetoconvection", *Nonlinearity* **7**, 1565–1591.

[188] Rössler, O. [1976] "An equation for continuous chaos", *Phys. Lett.* **57A**, 397–398.

[189] Shilnikov, A. L. and Shilnikov, L. P. [1991] "On the nonsymmetric Lorenz model", *Int. J. Bifurcation & Chaos***1**(4), 773–776.

[190] Shimizu, T. and Morioka, N. [1980] "On the bifurcation of a symmetric limit cycle to

an asymmetric one in a simple model", *Phys. Lett.* **76A**, 201–204.

[191] Vladimirov A. G. and Volkov, D. Yu. [1993] *Optics Commun.* **100**, 351–360.

第一卷和第二卷索引

A

B

C

G

K

L

M

N

T

W

X

Y

Z

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
18303-0	微积分学教程（第一卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程（第二卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程（第三卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析（第一卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析（第二卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义（第 3 版）	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、В. Н. 丘巴里阔夫
★25439-6	数学分析习题集 (根据俄文 2003 年版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
★	工科数学分析习题集 (根据俄文 2006 年版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
★29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第一册)	沐定夷、谢惠民 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
★	复分析导论（第一卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论（第二卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步（第 7 版）	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
★29221-3	实变函数论（第 5 版）	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法（第 6 版）	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程（第 6 版）	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义（第 2 版）	[俄] О. А. 奥列尼克
25766-3	偏微分方程习题集（第 2 版）	[俄] А. С. 沙玛耶夫
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫
★27249-9	数值方法（第 5 版）	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫，Н. П. 热依德科夫，Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论（第一卷）基础代数（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论（第二卷）线性代数（第 3 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论（第三卷）基本结构（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用（第一卷）曲面几何、变换群与场（第 5 版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯

续表

书号	书名	著译者
21492-5	现代几何学：方法与应用（第二卷）流形上的几何与拓扑（第5版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用（第三卷）同调论引论（第2版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
★28888-9	微分几何与拓扑学习题集（第2版）	[俄] А. С. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、А. Т. 福明柯
22059-9	概率（第一卷）(第3版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率（第二卷）(第3版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. В. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础（第一卷）事实. 模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础（第二卷）理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法（第4版）	[俄] В. И. 阿诺尔德
18530-0	理论力学（第3版）	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学（第一卷）(第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学（第二卷）(第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
★29223-7	非线性动力学定性理论方法（第一卷）	[俄] L.P. Shilnikov 等
★29464-4	非线性动力学定性理论方法（第二卷）	[俄] L.P. Shilnikov 等

说明：加★者为最新出版.

反盗版举报电话: (010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真: (010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址: 北京市西城区德外大街 4 号
高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编: 100120